"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等教育"十二五"应用型本科规划教材

线性代数辅导教程(第二版)

张学奇 赵梅春 主编

中国人民大学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

线性代数辅导教程

（第二版）

张学奇　赵梅春　主编

中国人民大学出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数辅导教程（第二版）/张学奇，赵梅春主编. —北京：中国人民大学出版社，2015.1

普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

ISBN 978-7-300-20791-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张… ②赵… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 029053 号

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

线性代数辅导教程（第二版）

张学奇　赵梅春　主编

Xianxing Daishu Fudao Jiaocheng

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　话	010-62511242（总编室）		010-62511770（质管部）
	010-82501766（邮购部）		010-62514148（门市部）
	010-62515195（发行公司）		010-62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http:www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　销	新华书店		
印　刷	三河市汇鑫印务有限公司		
规　格	185mm×260mm　16 开本	**版　次**	2015 年 2 月第 1 版
印　张	12.5	**印　次**	2015 年 2 月第 1 次印刷
字　数	280 000	**定　价**	26.00 元

内 容 提 要

本书是与“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《线性代数》(第二版) (张学奇、赵梅春主编，中国人民大学出版社出版) 配套使用的辅导教材，主要作为学生学习线性代数课程的同步学习辅导书和习题课教材，同时也可供报考研究生的学生系统复习之用.

本书内容按章编排，每章 (第六章除外) 包括教学基本要求、内容概要、知识结构图、要点剖析、释疑解难、典型例题解析、单元自测题等内容. 各章节中内容概要部分归纳出了每一章的基本概念、基本定理、基本性质及它们之间的相互关系，便于学生从结构上系统掌握、理解、记忆学习内容；要点剖析部分对每一章的学习要点和基本知识点进行了深入剖析，对解题方法进行了点拨，加深学生对知识的理解和掌握；释疑解难部分对学生学习中遇到的典型疑难问题进行了分析、解答和纠错，帮助学生纠正学习中易犯的错误，解答学生学习中的疑问；典型例题解析部分按题型分类，把对基本知识的理解和掌握、解题技能的培养融于典型题型的范例中，提高解题能力.

本书内容丰富、思路清晰、例题典型，突出对教学内容的提炼、要点的剖析和解题方法的点拨，注重典型例题的分析和总结，对提高学生学习兴趣、培养分析解决问题能力具有积极促进作用.

前　言

本书是与"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材《线性代数》(第二版)配套使用的辅导教材,主要作为学生学习线性代数课程的同步学习辅导书和习题课教材,同时也可供报考研究生的学生系统复习之用.

全书按教材章节顺序编排,与教材同步,每章(第六章除外)包括教学基本要求、内容概要、知识结构图、要点剖析、释疑解难、典型例题解析、单元自测题等内容,为学生进行同步学习辅导提供资料,为教师习题课和教学选材提供参考.本书突出对教学内容的提炼和概括、知识要点的剖析、解题方法的归纳、典型例题的分析和总结,体现数学思想与方法,注重培养学生抽象思维能力、计算能力、分析问题和解决问题的能力.

教学基本要求部分主要是根据经济管理类本科线性代数课程的教学基本要求确定的.对教学要求的层次,按"理解"、"了解"或"掌握"、"会"的次序表示要求程度上的差异.

内容概要部分以表格的形式概括归纳出了每一章的基本概念、基本定理、基本性质、主要方法及它们之间的相互关系,便于学生从结构上系统掌握、理解、记忆学习内容.

知识结构图部分给出了每章内容间的结构关系,便于学生从整体上把握知识间的逻辑结构关系.

要点剖析部分对每一章的学习要点和基本知识点进行了深入剖析,对解题方法进行了点拨,加深学生对基本概念、基本定理、基本方法的理解和掌握.

释疑解难部分对学生学习中遇到的典型疑难问题进行了分析、解答和纠错,帮助学生纠正学习中易犯的错误,解答学生学习中的疑问.

典型例题解析部分按题型分类,力图把对基本概念的理解、基本理论的运用、基本方法的掌握、解题技能的培养融于典型题型的范例中.例题的选取突出典型性、示范性,包括基本题、综合题、考研真题,典型题型配有必要的分析、点评和类题练习,注重一题多解,拓宽思路,有助于学生举一反三,提高解题能力.

每章中还编写了单元自测题和提示,便于学生自己检查对线性代数基本概念、基本理论、基本方法的掌握情况.

本书由张学奇、赵梅春主编,参加编写的还有姚慧玲、郭求知、岳卫芬,全书由张学奇统稿定稿.由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请同行和读者批评指正!

编　者

2014 年 9 月

教师信息反馈表

为了更好地为您服务,提高教学质量,中国人民大学出版社愿意为您提供全面的教学支持,期望与您建立更广泛的合作关系.请您填好下表后以电子邮件或信件的形式反馈给我们.

您使用过或正在使用的我社教材名称		版次	
您希望获得哪些相关教学资料			
您对本书的建议(可附页)			
您的姓名			
您所在的学校、院系			
您所讲授的课程名称			
学生人数			
您的联系地址			
邮政编码		联系电话	
电子邮件(必填)			
您是否为人大社教研网会员	□是,会员卡号:________ □不是,现在申请		
您在相关专业是否有主编或参编教材意向	□是 □否 □不一定		
您所希望参编或主编的教材的基本情况(包括内容、框架结构、特色等,可附页)			

我们的联系方式:北京市西城区马连道南街12号
中国人民大学出版社应用技术分社
邮政编码:100055
电话:010-63311862
网址:http://www.crup.com.cn
E-mail:rendayingyong@163.com

目　　录

第一章　矩　　阵

本章主要内容包括矩阵的概念、矩阵的运算、行列式的计算、分块矩阵、方阵的逆矩阵、矩阵的初等变换和矩阵的秩，其中矩阵的运算、行列式的计算、方阵的逆矩阵、矩阵的初等变换和矩阵的秩是重点，矩阵的初等变换和矩阵的秩是研究矩阵的一种重要手段，它是后续各章内容的基础.

一、教学基本要求

（1）理解矩阵的概念.

（2）了解单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵以及它们的性质.

（3）掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置以及它们的运算规律；了解方阵的幂、方阵乘积的行列式的性质.

（4）了解行列式的概念；掌握行列式的基本性质.

（5）会应用行列式的定义、性质和相关定理计算比较简单的行列式.

（6）理解逆矩阵的概念；掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件；了解伴随矩阵的概念.

（7）掌握矩阵的初等变换；了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念.

（8）理解矩阵秩的概念并掌握其求法.

（9）掌握矩阵的初等变换及用矩阵的初等变换求逆矩阵的方法.

二、内容概要

1. 矩阵的概念

矩阵的概念与特殊矩阵见表 1-1.

表 1-1　矩阵的概念与特殊矩阵

名　称	矩 阵 特 征	矩阵形式与说明
矩阵的定义	由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成的一个 m 行 n 列的矩形数表 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为一个 m 行 n 列的矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵，记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$. 数 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素	矩阵实质是一个矩形数表 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

续表

名称	矩阵特征	矩阵形式与说明
矩阵的相等	如果两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的对应元素相等，即满足 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$	① 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵；② 对应元素相等 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$
对角矩阵	主对角线以外的元素都为零的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 称为对角矩阵	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$
单位矩阵	对角元素全是 1 的对角矩阵称为单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$
上三角矩阵	若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中非零元素只出现在主对角线（包括主对角线）的右上方，即满足 $a_{ij}=0$ $(i>j,i,j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为上三角矩阵	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$
下三角矩阵	若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中非零元素只出现在主对角线（包括主对角线）的左下方，即满足 $a_{ij}=0$ $(i<j,i,j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为下三角矩阵	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$
对称矩阵	若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$
反对称矩阵	若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}$，$a_{ii}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&\cdots&0\end{pmatrix}$
行阶梯矩阵	① 元素全为零的行位于全部非零行（有元素不为零的行）的下方；② 非零行的首个非零元素（即位于最左边的非零元）的列下标随其行下标的递增而严格递增	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\bullet&*&*&*&*&*&*&*\\0&\bullet&*&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&\bullet&*&*&*\\0&0&0&0&0&0&\bullet&*\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

续表

名 称	矩阵特征	矩阵形式与说明
行最简矩阵	① 为行阶梯形矩阵；② 非零行的第一个非零元素为 1；③ 非零行的第一个非零元素所在列的其余元素都为 0	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&*&*&0&*&0&*\\0&1&*&*&0&*&0&*\\0&0&0&0&1&*&0&*\\0&0&0&0&0&0&1&*\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

2. 矩阵的运算

矩阵的运算及其运算规律见表 1-2.

表 1-2 矩阵的运算及其运算规律

运算名称	定 义	运算规律
矩阵加法	设两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，将矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 对应位置元素相加得到的 $m\times n$ 矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$	① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$； ② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$； ③ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$
数与矩阵乘法	设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，k 为任意数，以数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个元素所得到的矩阵叫作数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘法，记作 $k\boldsymbol{A}$，即 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})$	① $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$； ② $(k+h)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{A}$； ③ $(kh)\boldsymbol{A}=k(h\boldsymbol{A})$
矩阵乘法	设 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则由元素 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$ 构成的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$	① $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$； ② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$； $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$； ③ $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$
矩阵的转置	将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的行与列互换，所得到的 $n\times m$ 矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，简称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$； ② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$； ③ $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$； ④ $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
方阵的幂	设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 是正整数，k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，记作 $\boldsymbol{A}^k$，即 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}$（$k$ 个 $\boldsymbol{A}$ 的乘积）	① $\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$； ② $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$

3. 方阵的行列式

行列式的概念、性质与计算见表 1-3.

表 1-3　行列式的概念、性质与计算

	内　容	说　明
行列式定义	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$	它是 $n!$ 项的代数和，每一项都是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积，每一项中各元素的行标排成自然序排列 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，该项符号当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，则取正号，为奇排列，则取负号
行列式性质	行列式的基本性质： ① 行列式转置后，其值不变； ② 交换行列式的某两行，行列式改变符号； ③ 行列式某一行所有元素的公因子可以提到行列式符号外面； ④ 若行列式的某一行的各元素都是两个数的和，则此行列式等于两个相应的行列式的和； ⑤ 把行列式的某一行的所有元素乘以数 k 加到另一行的相应元素上，行列式的值不变. 注：对列具有相同性质	行列式性质的推论： ① 若行列式某两行的对应元素相同，则此行列式的值等于零； ② 若行列式中某一行的元素全为零，则此行列式的值等于零； ③ 若行列式中有两行的对应元素成比例，则行列式的值等于零. 注：对列具有相同性质
行列式展开	① 行列式 D 的值等于它的任意一行各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$； ② 行列式 D 中某一行的各元素与另一行对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即 $a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0 (i \neq s)$	对列具有相同性质
行列式计算	① 三角化方法：利用行列式的性质将行列式化为三角形行列式，利用三角形行列式结果来进行行列式计算； ② 降阶展开法：利用行列式的性质将某几行或某几列尽可能多的元素变为零，然后按行（列）展开，将行列式化为较低阶行列式； ③ 归纳法：先通过对低阶行列式的计算找出规律，再归纳推理出一般结论的行列式计算方法； ④ 递推法：是将行列式从高阶向低阶变形，找出递推公式，利用递推公式将行列式进行降阶计算的方法	$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod\limits_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$
方阵的行列式	将 $\boldsymbol{A}$ 中的元素按原来顺序构成一个 n 阶行列式，称此行列式为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $\det\boldsymbol{A}$，或 $\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	$\lvert\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\rvert = \lvert\boldsymbol{A}\rvert$；$\lvert k\boldsymbol{A}\rvert = k^n\lvert\boldsymbol{A}\rvert$； $\lvert\boldsymbol{AB}\rvert = \lvert\boldsymbol{A}\rvert \cdot \lvert\boldsymbol{B}\rvert$

4. 可逆矩阵

逆矩阵的概念与性质见表 1-4.

表 1-4 逆矩阵的概念与性质

逆矩阵定义	对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，简称 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$
伴随矩阵	设 A_{ij} 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的行列式 $\|\boldsymbol{A}\|$ 中的元素 a_{ij} 的代数余子式，用 $\boldsymbol{A}^*$ 表示由 A_{ij} 构成的 n 阶方阵 (A_{ij}) 的转置矩阵，即 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$，称 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
逆矩阵性质	若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则：① $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；② $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；③ $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；④ $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
可逆的条件	① 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的，即 $\|\boldsymbol{A}\|\neq 0$; ② n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形为 $\boldsymbol{E}_n$； ③ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可以表示成有限个初等矩阵的乘积; ④ n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$； ⑤ 存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$
逆矩阵求法	① 伴随矩阵法：$\boldsymbol{A}^{-1}=\|\boldsymbol{A}\|^{-1}\boldsymbol{A}^*$； ② 初等变换法：$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})\to\cdots\to(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1})$； ③ 用定义和性质求逆矩阵

5. 分块矩阵

分块矩阵的概念与运算见表 1-5.

表 1-5 分块矩阵的概念与运算

	定 义	说 明
分块矩阵	在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列之间加进一些纵线和横线，把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成若干块，每一块视为一个小矩阵，并称之为 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵或子块，以子矩阵为元素的矩阵称为分块矩阵	根据矩阵的结构特征和计算需要，将矩阵进行分块，使矩阵的结构变得更加清晰
分块矩阵加法	设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 采取完全相同的分块方法，即 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})$，其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 有相同的行数和相同的列数，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij})$	要求矩阵为同型矩阵，分块方法完全相同，对应子块相加
数与分块矩阵乘法	设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})$，数 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的乘积就是把 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的每一个子矩阵相乘，即 $k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{ij})$	乘积 $k\boldsymbol{A}$ 是把 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的每一个子矩阵相乘
分块矩阵乘法	设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵，在对 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 进行分块时，让左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法与右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法相同，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行相同，分块时左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法与右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法必须相同
分块矩阵的转置	分块矩阵转置时，不但要将行列互换，而且行列互换后的各子矩阵都应转置	注意子矩阵都应转置

6. 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换与初等矩阵见表 1-6.

表 1-6 矩阵的初等变换与初等矩阵

	矩阵的初等变换	初 等 矩 阵
概念	① 交换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（列）和第 j 行（列）; ② 用非零数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（列）的所有元素; ③ 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行（列）各元素乘同一数 k 加到第 i 行（列）对应的元素上	① 交换单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行（列）和第 j 行（列）所得到的初等矩阵记作 $\boldsymbol{P}(i,j)$; ② 用非零数 k 乘以单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行（列）所得到的初等矩阵记作 $\boldsymbol{P}(i(k))$; ③ 将 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行（i 列）乘以数 k 加到第 i 行（j 列）所得到的初等矩阵记作 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$
关系	① 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换就相当于对 $\boldsymbol{A}$ 左乘一个相应的 m 阶初等矩阵; ② 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换就相当于对 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个相应的 n 阶初等矩阵	
矩阵等价	① 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换得到，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$; ② 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的标准形; ③ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$; ④ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$	
性质	① 任意非零矩阵都可以经过初等行变换化为行阶梯形矩阵; ② 任意非零矩阵都可以经过初等行变换化为行最简形矩阵; ③ 任意一个矩阵都可以经过有限次初等变换化为等价标准形; ④ n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形为 $\boldsymbol{E}_n$; ⑤ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可以表示成有限个初等矩阵的乘积	
应用	① 利用初等变换求矩阵的等价标准形; ② 利用初等变换求逆矩阵; ③ 利用初等变换求矩阵的秩	

7. 矩阵的秩

矩阵的秩的概念与性质见表 1-7.

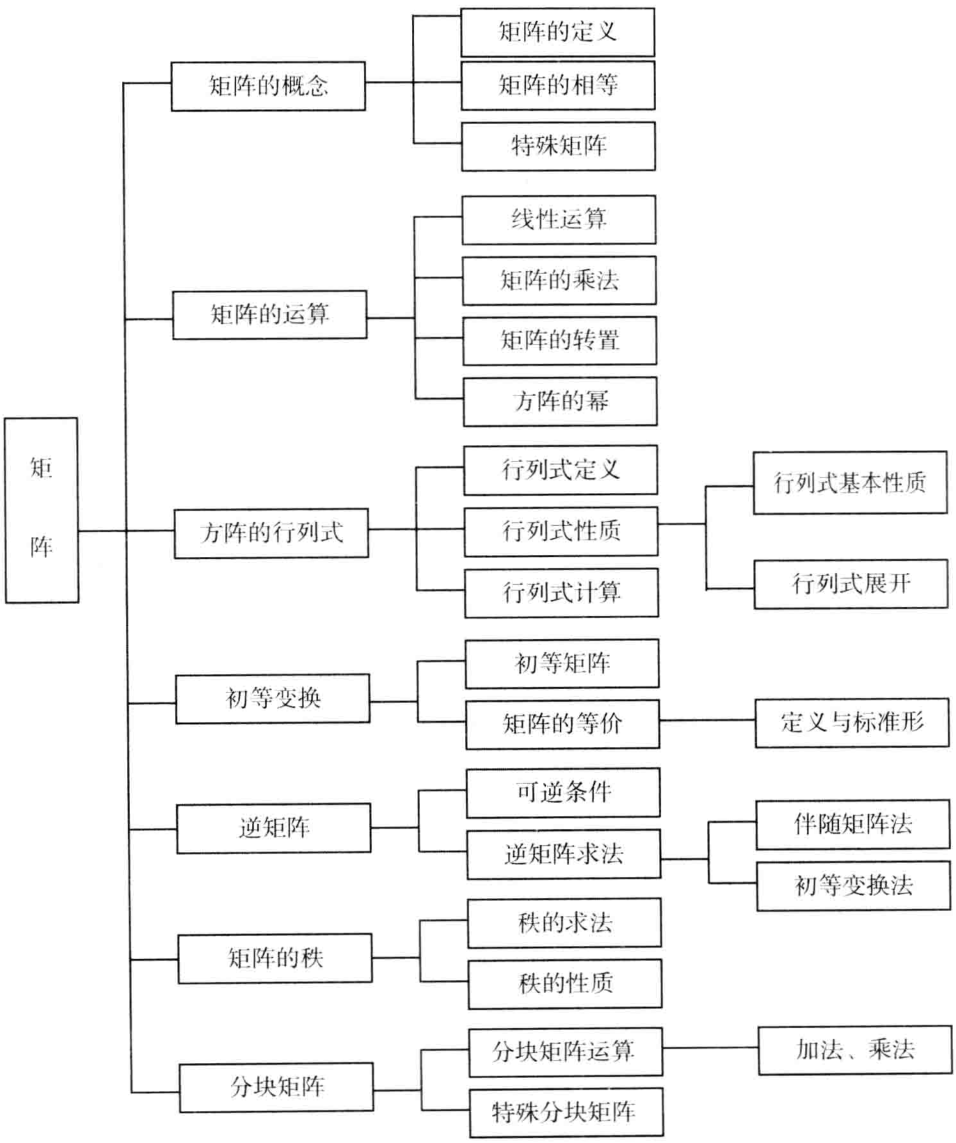
表 1-7 矩阵的秩的概念与性质

定义	① 矩阵的秩为矩阵中非零子式的最高阶数; ② 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 r 阶非零子式，而所有 $r+1$ 阶的子式全等于零，则 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
性质	① 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有某个 s 阶子式不为0，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geqslant s$，若 $\boldsymbol{A}$ 中所有 s 阶子式全为0，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<s$; ② 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$; ③ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$; ④ $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\}$; ⑤ 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$; ⑥ 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩，即若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$; ⑦ 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$; ⑧ n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$

续表

求法	① 定义求秩法：求矩阵中不为零子式的最高阶数； ② 初等变换求秩法：对矩阵进行初等行变换将其化为行阶梯形矩阵，则行阶梯形矩阵中非零行的行数即是该矩阵的秩

三、知识结构图



四、要点剖析

1. 矩阵的运算

矩阵的运算主要包括矩阵的加减法、数与矩阵乘法、矩阵的乘法、矩阵的转置、方阵

的幂，需要重点掌握的是矩阵的乘法.

(1) 对于矩阵的运算一定要搞清三点：什么条件下可以运算；运算的结果是什么；如何运算. 矩阵的加减法运算：必须是同型矩阵，运算结果仍为同型矩阵，运算方式是对应位置元素相加减；矩阵的乘积：只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时才能相乘，相乘所得矩阵的行数为左矩阵的行数，列数为右矩阵的列数，运算方式是乘积矩阵的第 i 行、第 j 列的元素 c_{ij} 等于左矩阵的第 i 行按列序排列的每个元素与右矩阵中第 j 列按行序排列的每个元素对应乘积之和；矩阵的幂运算：只有方阵才能讨论正整数幂.

(2) 矩阵的各种运算满足相应的运算规律和运算性质，学习中可以通过与数的运算法则相比较的方法来掌握矩阵的运算规律. 需要注意矩阵乘法的运算规律与数的运算规律既有相似之处，又有不同之处. 明显的不同之处包括以下几点：① $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$；② 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$；③ 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$，且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

2. 行列式的计算

利用行列式的性质和展开定理计算行列式是行列式计算的重点，掌握行列式的计算方法和技巧是学习中的难点.

行列式计算的基本方法是利用行列式的性质化为三角行列式和按展开定理将行列式降阶. 行列式的计算方法较多具有一定的技巧性，计算中通常要根据行列式的特点采用一些特殊的计算方法，如递推法、数学归纳法、降阶法等等.

3. 逆矩阵

逆矩阵是矩阵理论中的一个重要概念. 学习中要理解逆矩阵的概念，熟悉矩阵的可逆条件，掌握求逆矩阵的各种方法.

矩阵可逆的条件主要有：

(1) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的，即 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$；

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形为 $\boldsymbol{E}_n$；

(3) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可以表示成有限个初等矩阵的乘积；

(4) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$；

(5) 存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$.

求逆矩阵的方法有：

(1) 伴随矩阵法：① 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$，若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆；② 分别计算代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}$，并按行列对换的次序写出伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$；③ 按照公式 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，求出逆矩阵.

(2) 运用定义和性质求逆法：根据同阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$，以及逆矩阵的性质可求逆矩阵.

(3) 分块求逆法：若 $|\boldsymbol{A}_{ii}| \neq 0\ (i = 1, 2, \cdots, s)$，则

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_{22}^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}$$

由此可求分块对角矩阵的逆矩阵.

（4）初等变换法：① 构造 $n \times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})$；② 对 $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})$ 施行一系列的初等行变换，直至将其左边子矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，此时右边子矩阵即为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E}) \rightarrow \overset{\text{初等行变换}}{\cdots\cdots} \rightarrow (\boldsymbol{E} \vdots \boldsymbol{A}^{-1})$$

4. 分块矩阵

（1）分块矩阵的运算是矩阵运算的一个重要技巧，对于高阶和结构特殊的矩阵，运算时经常按一定规则划分成分块矩阵. 经过矩阵分块后，能突出该矩阵的结构，简化具有某种特征的矩阵的运算，还可将大矩阵的运算转化为小矩阵的运算. 矩阵分块后，一方面可以对子矩阵进行矩阵运算，另一方面又可以将每一个子矩阵作为分块矩阵的元素按照运算法则进行计算.

（2）为了保证分块矩阵能够运算，必须注意分块的方法，特别是分块矩阵的乘法，分块时左矩阵的列分法必须与右矩阵的行分法相同. 对矩阵按列分块与按行分块是常用的分块方法，这样可以使矩阵与向量及线性方程组相联系. 矩阵分块运算的另一常见情形是分块对角矩阵的运算，其元素类似于对角矩阵相应的运算.

5. 矩阵的初等变换与矩阵的等价

初等变换在线性代数计算中用得最多，贯穿于线性代数的始终，如本章中的求逆矩阵、求矩阵的秩，其他章节中的求向量组的秩、讨论向量组的线性相关性、求极大无关组、求解线性方程组等，都要用到矩阵的初等变换，所以必须熟练掌握矩阵的初等变换，并能应用它解决相关问题.

证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的方法：① 证明它们的标准形相同；② 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAQ}$；③ 证明它们的秩相等.

6. 矩阵的秩

矩阵的秩是矩阵理论中的一个重要概念. 矩阵的秩的等价条件：① 矩阵的秩为矩阵中非零子式的最高阶数；② 矩阵的秩等于矩阵的行向量组和列向量组的秩.

求矩阵的秩的基本方法：

（1）利用定义求秩法，即求矩阵中不为零子式的最高阶数.

（2）利用初等变换求秩法，即对矩阵进行初等行变换将其化为行阶梯形矩阵，则行阶梯形矩阵中非零行的行数即是该矩阵的秩. 有时，也可以将定义和初等变换结合求矩阵的秩.

（3）利用向量组求秩法，也即求向量组的行秩或列秩.