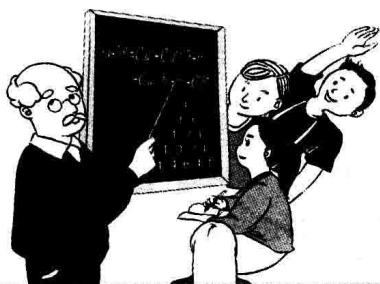


数林外传 系列
跟大学名师学中学数学

趣味数学100题

◎ 单 尊 著

中国科学技术大学出版社



数林外传 系列
跟大学名师学中学数学

趣味数学100题

◎ 单增 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书的100道题目是从国内外大量资料中筛选出来的,每一道题都有一个巧妙的解法,可谓“四两拨千斤”。这些解答中,有作者认真推敲后给出的,也有著名学者提供的,是创造性思维的结晶,处处闪烁着智慧的火花。同学们学习之余,思考书中几道耐人寻味的趣题,一定能使思维更加机敏,数学水准大为提高。

图书在版编目(CIP)数据

趣味数学 100 题/单增著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2012. 11

(数林外传系列:跟大学名师学中学数学)

ISBN 978-7-312-03120-5

I. 趣… II. 单… III. 中学数学课—高中—习题集
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 230918 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

<http://press.ustc.edu.cn>

合肥华星印务有限责任公司印刷

全国新华书店经销

*

开本:880 mm×1230 mm 1/32 印张:4.125 字数:95 千

2012 年 11 月第 1 版 2012 年 11 月第 1 次印刷

定价:10.00 元

前 言

这本课外读物由 100 道问题与解答组成。

课外读物可以配合课堂的学习，帮助你理解、消化课堂里学到的知识与方法。

但是，课外读物并不仅仅是为了配合课堂学习。实际上，课外的天地广阔得多，可以任我们想象、观赏、驰骋、翱翔。

读课外书，仿佛逛公园，可以凭着你自己的兴趣，随意地浏览。一时读不懂的，可以暂时放过；懂了的，过些时候再看看，或许又有新的体会。总之，“开卷有益”。书，希望你不要过久地冷落它。

这本小书中，如果有一些问题能引起你的兴趣，如果有一些技巧已经被你掌握，我们将感到非常高兴。

作 者

目 次

前言	(I)
100 题	(1)
1 积的化简	(1)
2 分式方程	(1)
3 有理? 无理?	(1)
4 利用条件	(2)
5 整整齐齐	(2)
6 根式计算	(3)
7 无理方程	(3)
8 解方程组	(4)
9 1234?	(4)
10 填得分表	(5)
11 欧拉的题	(6)
12 三头百足	(6)
13 完全平方	(7)
14 不全相等	(7)
15 并不复杂	(8)
16 二次不等式?	(8)
17 高次不等式	(8)
18 重重根号	(9)

19	研究生试题	(9)
20	事半功倍	(10)
21	诺模图	(10)
22	韦达定理	(11)
23	上抛物体	(11)
24	不定方程	(12)
25	不成 A. P.	(12)
26	斐波那契数	(13)
27	和的估计	(13)
28	细毛虫	(14)
29	跑道的面积	(14)
30	外角之和	(15)
31	猫与鼠	(15)
32	镶嵌图形	(16)
33	例外情况	(16)
34	针扎圆纸片	(17)
35	“相像”三角形	(17)
36	中心对称	(18)
37	烙饼翻身	(18)
38	分饼	(19)
39	凸 $2n$ 边形	(19)
40	湖里的鳄	(19)
41	海莱定理	(20)
42	剪相似形	(20)
43	相似与位似	(21)

44	透视与全等	(21)
45	作正三角形	(22)
46	三等分角	(22)
47	直尺作图	(23)
48	作平行线	(23)
49	四等分圆周	(24)
50	找中点	(24)
51	找圆心	(24)
52	欧拉公式	(25)
53	两色问题	(25)
54	不用三角	(25)
55	三等于二	(26)
56	托勒密定理	(27)
57	三只老虎	(27)
58	四只狮子	(28)
59	游泳池容积	(28)
60	金字塔体积	(29)
61	史氏问题	(29)
62	分蛋糕	(30)
63	穿过地球	(30)
64	猜两个数	(31)
65	保险柜的锁	(31)
66	换钱机器	(32)
67	移动盘子	(32)
68	跳舞统计	(33)

-
- 69 巴山怪蛇 (33)
- 70 三阶幻方 (33)
- 71 胜券在握 (34)
- 72 移动棋子 (34)
- 73 两两配对 (35)
- 74 负号变正号 (35)
- 75 棋盘走马 (36)
- 76 围成圆圈坐 (36)
- 77 能选几个数? (37)
- 78 和与差 (37)
- 79 均不互素 (37)
- 80 超过半数 (38)
- 81 十五个数 (38)
- 82 五次幂的和 (38)
- 85 同心圆盘 (39)
- 84 法雷数列 (40)
- 85 项数不多 (40)
- 86 最多几条 (41)
- 87 1990 (41)
- 88 新的运算 (42)
- 89 和集 (42)
- 90 数字不为 0 (43)
- 91 直角三角形的面积 (43)
- 92 矩形套矩形 (44)
- 93 一个分式的值 (44)

94	四阶幻方	(44)
95	阿里巴巴	(45)
96	有理数的平方和	(45)
97	二十四点	(46)
98	无穷对相等	(46)
99	硬币涂色	(47)
100	齿轮的投影	(47)
解答	(48)

100 题

1 积的化简

求 $\sqrt[256]{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{256}+1)}+1$.

本题的关键在于将根号里的乘积化简,不可一味蛮算.

2 分式方程

解分式方程:

$$\frac{16x-13}{4x-3} + \frac{40x-43}{8x-9} = \frac{32x-30}{8x-7} + \frac{20x-24}{4x-5}.$$

直接就去分母是比较麻烦的,怎样处理为好?

3 有理? 无理?

a 是一个正无理数, b 也是一个正无理数. a^b 是否一定是

无理数?

4 利用条件

已知 $xyzt = 1$, 求和:

$$\frac{1}{1+x+xy+xyz} + \frac{1}{1+y+yz+yzt} + \frac{1}{1+z+zt+ztx} \\ + \frac{1}{1+t+tx+txy}.$$

直接通分是笨拙的做法, 需要利用条件将某些项的形状变一变.

5 整整齐齐

解方程组:

$$\begin{cases} x(y+z) = 5, \\ y(z+x) = 10, \\ z(x+y) = 13. \end{cases}$$

这种方程组的形状非常整齐: x, y, z 的地位平等. 注意到这种整齐性(对称性), 解法便会井井有条.

6 根式计算

已知 $a > 0, b > 0$, 求

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$$

在 $x = \frac{2ab}{b^2+1}$ 时的值.

计算时应当注意式子的特点.

7 无理方程

方程

$$\sqrt{2.5^2 - x^2} - \sqrt{1.7^2 - x^2} = 1.2$$

怎样解比较简单?

8 解方程组

解方程组：

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}}, \\ \sqrt[4]{x^3y} - \sqrt[4]{xy^3} = \sqrt{12}. \end{cases}$$

问题本身不算复杂. 如果求解时, 弄得十分麻烦, 多半会误入歧途. 应当及早改变做法, 不要坚持在错误的道路上走下去.

9 1234?

设 x_1, x_2, \dots, x_7 都是实数, 并且

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1,$$

$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12,$$

$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123,$$

求 $16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$ 的值.

这值是 1234 吗?

10 填得分表

某次考试共 6 道试题,均为判断题.考生认为正确的就画“√”,错误的就画“×”.记分的方法是:每道题答对的给 2 分,不答的给 1 分,答错的不给分.

已知赵、钱、孙、李、周、吴、郑 7 人的答案及前 6 个人的得分,记录在表 10.1 中,请在表 10.1 中填出郑的得分.

表 10.1

人 题号	赵	钱	孙	李	周	吴	郑
1		√	√	√	×	×	√
2	√		×	×	√	×	×
3	√	×		√	×	×	×
4	√	√	×		×	√	√
5	√	×	√	√		×	√
6	√	√	×	×	×		×
得分	7	5	5	5	9	7	

11 欧拉的题

大数学家欧拉对应用题特别感兴趣. 例如, 他曾经考虑过下面的问题:

两个农妇共带 100 只鸡蛋去卖. 一个带得多, 一个带得少, 但卖了同样多的钱. 一个农妇对另一个说: “如果我有你那么多鸡蛋, 我能卖 15 元.” 另一个说: “如果我只有你那么多鸡蛋, 只能卖 $6\frac{2}{3}$ 元.” 问两人各有多少鸡蛋.

希望有尽可能简单的解答.

12 三头百足

鲲鹏洞中有两种怪物: 三头与百足. 每只百足有一个头, 一百只脚. 每只三头有三个头. 如果三头与百足共有 26 个头, 794 只脚. 问每只三头有几只脚?

13 完全平方

找一个四位数 n , 使得 $n^2 - m^2$ 为完全平方数, 这里, m 是将 n 的数字反过来写得到的数.

说明对于位数大于 4 的数, 也可以解同样的问题. 对于二位数与三位数呢?

当然, 我们排除了 m 与 n 相等的情形.

14 不全相等

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 n 个不全相等的数, 并且 $x_1 + \frac{1}{x_2} = x_2 + \frac{1}{x_3} = \dots = x_{n-1} + \frac{1}{x_n} = x_n + \frac{1}{x_1}$.

求证: $x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 = 1$.

条件“不全相等”是有作用的, 否则

$$x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 = x_1^{2n}$$

可以为任何(不等于 0 的)数. 弄清“不全相等”是如何起作用的, 也就差不多解决了这个问题.

15 并不复杂

a, b, c, d 都是正数, 并且

$$c + d < a, \quad c + d < b.$$

求证: $ac + bd < ab$.

16 二次不等式

已知 $k > a > b > c > 0$, 求证:

$$k^2 - (a + b + c)k + (ab + bc + ca) > 0.$$

17 高次不等式

证明: 对任意实数 x , 不等式

$$x^6 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0$$