



2014硕士学位研究生入学资格考试

GCT

数学

考前辅导教程

总第12版

全国工程专业学位研究生教育指导委员会 组编

清华大学出版社





2014 硕士学位研究生入学资格考试



考前辅导教程

刘庆华 主编

关 治 扈志明 王飞燕 编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是根据硕士学位研究生入学资格考试指南(大纲)而编写的数学辅导教材,是在 2013 版的基础上修订而成的。

全书安排算术、初等代数、几何与三角、一元微积分以及线性代数 5 部分内容,共 18 章. 在每章中,汇总了考试指南中所涉及的重要知识点,并通过例题加以讲解,同时,按试卷中的命题方式组织了一些典型题目.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售. 滴水涂抹后标识图案消失,水干后图案再现;揭下标识表膜置于白纸上,用彩笔涂抹后图案可透印.

版权所有,侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

2014 硕士学位研究生入学资格考试 GCT 数学考前辅导教程/刘庆华主编. --北京: 清华大学出版社, 2014

ISBN 978-7-302-35539-7

I. ①2… II. ①刘… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 034920 号

责任编辑: 刘 颖

封面设计: 傅瑞学

责任校对: 刘玉霞

责任印制: 李红英

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者: 清华大学印刷厂

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×230mm

印 张: 20

字 数: 446 千字

版 次: 2014 年 3 月第 1 版

印 次: 2014 年 3 月第 1 次印刷

印 数: 1~42000

定 价: 39.00 元

产品编号: 058448-01

总序

2014 硕士学位研究生入学资格考试

工程硕士专业学位是与工程领域任职资格相联系的专业学位。该专业学位的设置主要在于培养高层次的工程技术和工程管理人才。自 1997 年国务院学位委员会正式通过设置工程硕士专业学位以来,已批准 340 个培养单位,涉及 40 个工程领域,共招收工程硕士研究生 90 万余人,累计授予工程硕士学位 30 万余人。随着工程硕士研究生教育的发展,按照党的“十六大”对教育工作提出的“坚持教育创新,深化教育改革”的总体要求,借鉴国外先进的考试办法,结合我国的实际情况,建立相适应的工程硕士研究生入学考试制度,不仅是创新人才培养的需要,是我国研究生教育规模发展的需要,是我国高等教育参与国际竞争的需要,而且还是坚持教育创新的一项重要举措,是一项具有重要意义的改革实践。因此,国务院学位委员会办公室决定,自 2003 年起报考在职攻读工程硕士专业学位研究生的考生,需参加全国统一组织的入学资格考试,接受综合素质的测试。

硕士学位研究生入学资格考试,英文名称为 Graduate Candidate Test,简称 GCT。试卷由四部分构成:语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试和外语运用能力测试。GCT 试题知识面覆盖哲学、经济学、法学、教育学、文学、历史学、理学、工学、农学、医学、军事学、管理学等门类。试题重点考核考生综合能力水平和反应速度。经过近几年的实践和改革,考试内容和形式不断完善,考试的适用范围也逐步扩展到工程硕士以外的一些专业学位。

为配合考试办法的改革,从 2003 年起,全国工程硕士专业学位教育指导委员会特委托清华大学根据国务院学位委员会办公室组织制定的考试指南的要求和精神,组织编写了这套“硕士学位研究生入学资格考试考前辅导教程”丛书,以帮助考生在短时间内了解考试内容,提高应试水平。此后,丛书每年都组织有关资深专家进行改版,以及及时反映考试大纲的变化,不断提高整体质量。本套丛书考虑了应试人员的不同专业背景,侧重应试人员逻辑思维能力,阅读、表达及运用能力,抽象概括能力与基本运算能力等方面的提高。丛书包含了大

量的例题和习题,帮助应试人员加深对知识的理解,并进行自我训练和自我检验。

清华大学出版社为本丛书的出版给予了大力的支持,各位编委付出了辛勤的劳动。在此,向所有为本书的编写、修改和出版做出过贡献的人士表示诚挚的感谢!

作为考试辅导教材,本丛书力求简明扼要,准确反映考试指南的要求。但由于组织者的经验和水平有限,本书难免有疏漏和不足之处,欢迎大家提出宝贵意见,以便今后改进工作。

2013 年,国务院学位委员会、教育部、人力资源和社会保障部将“全国工程硕士学位教育指导委员会”更名为“全国工程专业学位研究生教育指导委员会”,统筹指导工程硕士学位、工程博士学位研究生教育的发展。相信在国务院学位委员会、教育部、人力资源和社会保障部的领导下,我国工程专业学位研究生教育将不断开创出健康发展的新局面。

全国工程专业学位研究生教育指导委员会

2014 年 2 月

前言

2014 硕士学位研究生入学资格考试

本

书是根据硕士学位研究生入学资格考试指南编写的数学辅导教材,以便考生备考。

在考试指南中,关于数学部分的测试重点为:考生所具有的数学方面的基础知识和基本思想方法,逻辑思维能力,数学运算能力,空间想像能力,以及运用所掌握的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力。

在硕士学位研究生入学资格考试中,数学测试部分包括算术、初等代数、几何与三角、一元函数微积分和线性代数 5 部分内容;测试的题目由 25 道四选一的单项选择题构成,其中算术、初等代数、几何与三角部分的题目有 15 道,一元函数微积分、线性代数部分的题目有 10 道;测试的时间为 45 分钟。

从试卷的设计中可以归纳出此项数学考试具有如下特点:

1. 内容多,战线长.从内容来看,涵盖小学、中学所学的全部数学内容及大学所学的大部分数学内容;从时间来看,跨越从小学到大学 16 年的历程。

2. 题量大,覆盖广.尽管 25 道题目与测试内容所涵盖的几百个知识点相比是不多的,但相对于 45 分钟的测试时间来说,题量还是相当大的,这意味着每道题的用时平均要控制在 1 分 48 秒之内.各部分内容所包含的题目数量使得题目具有很广的覆盖面。

3. 题型单一,重视基础.这是题量大、覆盖广的必然结果.为了使大多数考生能在短短的 45 分钟内完成 25 道相互独立的题目,只能采用四选一这样的简单题型,而题目中所涉及的知识点也只能是基础知识和基本方法,不太可能有复杂的推论和烦琐的计算.但题型简单、重视基础,并不意味着题目容易,其中一些题目的出题方式还是很灵活的。

尽管题目类型均为单项选择题,但要在很短的时间内给出正确的答案,就要求考生不仅要扎实地掌握所要考查的基础知识,而且还要灵活地运用这些基础知识来尽快地分析问题和解决问题。

为了使考生能够在比较短的时间内全面、准确地掌握考试内容,

了解和强化考试题型,培养熟练的考试技能,以利于在考试中取得理想的考试成绩,在本考前辅导教程的具体编写过程中,我们按如下 3 个方面来组织内容:

1. 为了便于考生进行系统的总结和复习,按知识结构细化了 5 部分的内容,将 5 部分内容分解为 18 章. 每章汇总了考试指南中所涉及的重要知识点,其中包括基本概念、基本理论以及基本方法,其间安排了一些例题以加强对重要知识点的讲解和分析.

2. 在每章中都安排了一节“典型例题”,其中的例题都是按照考试中四选一的题型来设计的,其中有些题目是近几年来考试真题的简单变形,随后给出正确答案和具体的分析过程. 通过这些典型问题,不仅可以使考生熟悉考试的题目类型以及知识点的可能测试方式和测试难度,而且通过对典型问题的分析,细化了所汇总的基本概念、基本理论和基本方法,以帮助读者突破难点,提高分析问题和解决问题的能力.

3. 为了便于读者全面地检验复习的情况,提高考试技能,书后附有 2013 年 GCT 数学基础能力测试题,供全面复习后的读者使用. 同时,与此教程配套出版了《硕士学位研究生入学资格考试 数学模拟试题与解析》,供考生选用.

由于编者的经验和水平所限,书中难免有疏漏和不足之处. 欢迎广大读者、辅导教师及专家批评指正.

编 者

2014 年 1 月

CONTENTS

目 录

第 1 部分 算 术

第 1 章 算术	2
1.1 数的概念、性质和运算	2
1 数的概念	2
2 数的整除	2
3 数的四则运算	3
4 比和比例	3
1.2 应用问题举例	3
1 整数和小数四则运算应用题	3
2 分数与百分数应用题	7
3 简单方程应用题	9
4 比和比例应用题	10
1.3 典型例题	11

第 2 部分 初 等 代 数

第 2 章 数和代数式	26
2.1 实数和复数	26
1 实数、数轴	26
2 实数的运算	26
3 复数	27
2.2 代数式及其运算	28
1 整式及其加法与乘法	28
2 因式分解	29
3 整式的除法	30
4 分式	31
5 根式	32
2.3 典型例题	33

第 3 章 集合、映射和函数	36
3.1 集合	36
1 集合的概念	36
2 集合的包含关系	37
3 集合的基本运算	37
3.2 映射和函数	38
1 映射的概念	38
2 函数	39
3 反函数	40
4 函数的单调性、奇偶性和周期性	41
5 幂函数、指数函数和对数函数	42
3.3 典型例题	44
第 4 章 代数方程和简单的超越方程	48
4.1 概念	48
4.2 一元一次方程	48
4.3 二元一次方程组	48
4.4 一元二次方程的性质	50
1 判别式	50
2 根和系数的关系	50
3 二次函数的图像和一元二次方程的根	50
4.5 解一元代数方程	51
1 配方法	51
2 公式法	52
3 分解因式法	52
4.6 根的范围、方程的变换	53
1 确定根所属的区间	53
2 方程的变换	54
4.7 典型例题	54
第 5 章 不等式	58
5.1 不等式的概念和性质	58
1 不等式的概念	58
2 不等式的基本性质	58
3 基本的不等式	58
4 解不等式	59
5.2 解含绝对值的不等式	60

5.3	解一元二次不等式	60
5.4	利用函数的性质和图像解不等式	62
5.5	典型例题	63
第6章	数列、数学归纳法	67
6.1	数列的基本概念	67
6.2	等差数列	68
6.3	等比数列	70
6.4	数学归纳法	72
6.5	典型例题	72
第7章	排列、组合、二项式定理和古典概率	77
7.1	排列和组合	77
1	基本概念	77
2	排列数和组合数公式	77
3	例题	78
7.2	二项式定理	80
7.3	古典概率问题	81
1	基本概念	81
2	等可能事件的概率	82
3	互斥事件有一个发生的概率	83
4	相互独立事件同时发生的概率	84
5	独立重复试验	85
7.4	典型例题	85

第3部分 几何与三角

第8章	常见几何图形	92
8.1	常见平面几何图形	92
1	三角形	92
2	四边形	93
3	圆和扇形	94
4	平面图形的全等和相似关系	94
8.2	常见空间几何图形	96
1	长方体	96
2	棱柱体和圆柱体	96
3	正棱锥体和正圆锥体	96
4	球	97
8.3	典型例题	98

第 9 章 三角学的基本知识	108
9.1 三角函数	108
1 角和三角函数	108
2 同角三角函数的关系	109
3 诱导公式	109
4 三角函数的图像和性质	110
9.2 两角和与差的三角函数	111
1 两角和与差公式	111
2 倍角与半角公式	112
9.3 解斜三角形	113
9.4 反三角函数	114
9.5 典型例题	116
第 10 章 平面解析几何	120
10.1 平面向量	120
1 基本概念	120
2 向量的加法与数乘	120
3 向量的内积	122
4 有向线段的定比分点	122
10.2 直线	123
1 直线的方向向量、倾斜角和斜率	123
2 直线的方程	123
3 两条直线的位置关系	125
10.3 圆	127
10.4 椭圆	128
10.5 双曲线	129
10.6 抛物线	130
10.7 例题	131
10.8 典型例题	131

第 4 部分 一元函数微积分

第 11 章 极限与连续	138
11.1 函数及其特性	138
1 函数的定义	138
2 函数的特性	138
3 复合函数与初等函数	139

11.2	数列的极限	141
1	数列极限的定义	141
2	数列极限的四则运算	141
11.3	函数的极限	142
1	函数极限的定义	142
2	函数极限的性质	143
3	函数极限的运算法则	143
4	两个重要极限	144
11.4	无穷小量与无穷大量	146
1	无穷小量与无穷大量的定义	146
2	无穷小量与无穷大量的关系	146
3	无穷小量与函数极限的关系	147
4	无穷小量的性质	147
5	无穷小量的比较	147
6	等价无穷小量替换定理	148
11.5	函数的连续性	149
1	连续的定义	149
2	函数间断点及分类	150
3	连续函数的运算法则	150
4	连续函数在闭区间上的性质	150
11.6	典型例题	151
第 12 章	一元函数微分学	156
12.1	导数的概念	156
1	导数的定义	156
2	导数的几何意义	158
3	可导性与连续性的关系	158
12.2	导数公式与求导法则	159
1	导数公式	159
2	四则运算的求导法则	160
3	复合函数的求导法则	161
12.3	高阶导数	163
12.4	微分	165
1	微分的定义	165
2	微分与导数的关系	165
3	微分的几何意义	165
4	微分基本公式和四则运算法则	165

12.5	中值定理	166
1	罗尔定理	166
2	拉格朗日中值定理	167
12.6	洛必达法则	168
12.7	函数的单调性与极值	171
1	函数单调性的判定法	171
2	函数的极值及判断	171
12.8	函数的最大值、最小值问题	173
12.9	曲线的凹凸、拐点及渐近线	175
1	曲线的凹凸、拐点	175
2	曲线的渐近线	177
12.10	典型例题	177
第 13 章	一元函数积分学	186
13.1	不定积分的概念和简单的计算	186
1	原函数、不定积分的概念	186
2	不定积分基本计算公式	186
3	不定积分的性质	187
13.2	不定积分的计算方法	188
1	第一类换元法(凑微分法)	188
2	第二类换元法	190
3	分部积分法	192
13.3	定积分的概念及性质	195
1	定积分的概念	195
2	定积分的几何意义	195
3	定积分的性质	196
13.4	微积分基本公式、定积分的计算	198
1	牛顿-莱布尼茨公式	198
2	变量替换法	199
3	分部积分法	199
13.5	定积分的应用	203
13.6	典型例题	204

第 5 部分 线性代数

第 14 章	行列式	216
14.1	行列式的概念与性质	216
1	行列式的定义	216

2	行列式的性质	217
3	几个特殊的行列式	219
14.2	行列式的计算	220
14.3	典型例题	222
第 15 章	矩阵	227
15.1	矩阵及其运算	227
1	矩阵的概念	227
2	矩阵的运算	228
3	方阵的行列式	231
4	特殊矩阵	232
15.2	可逆矩阵	233
1	可逆矩阵与逆矩阵的概念	233
2	矩阵可逆的充要条件	233
3	可逆矩阵的性质	234
15.3	矩阵的初等变换	236
1	初等变换	236
2	用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵	237
15.4	矩阵的秩	239
1	矩阵的秩的概念	239
2	矩阵的秩的计算	239
3	矩阵运算后秩的变化	240
15.5	典型例题	241
第 16 章	向量	249
16.1	n 维向量	249
1	n 维向量的定义	249
2	n 维向量的线性运算	249
16.2	向量组的线性相关性	251
1	向量的线性组合与线性表出	251
2	向量组的线性相关与线性无关	252
3	其他几个有关的结论	254
16.3	向量组的秩	255
1	向量组的秩和最大线性无关组	255
2	向量组的秩和矩阵的秩的关系	256
16.4	典型例题	258

第 17 章 线性方程组	264
17.1 线性方程组的基本概念	264
1 非齐次线性方程组	264
2 齐次线性方程组	265
17.2 求解齐次线性方程组	265
1 齐次线性方程组有非零解的条件	265
2 齐次线性方程组解的性质	266
3 齐次线性方程组解的结构、基础解系	266
4 消元法解齐次线性方程组	266
17.3 求解非齐次线性方程组	269
1 非齐次线性方程组有解的条件	269
2 非齐次线性方程组解的性质和结构	269
3 消元法解非齐次线性方程组	270
17.4 典型例题	273
第 18 章 矩阵的特征值和特征向量	279
18.1 特征值和特征向量的基本概念	279
1 特征值和特征向量的定义	279
2 特征值和特征向量的计算	279
3 特征值和特征向量的性质	281
18.2 矩阵的相似对角化问题	283
1 相似矩阵的定义	283
2 相似矩阵的性质	283
3 矩阵对角化的条件和方法	284
18.3 典型例题	288
2013 年 GCT 数学基础能力测试题	295
2013 年 GCT 数学基础能力测试题答案	299
附录 A 初等数学中的一些重要公式	300
附录 B 微积分中的一些常用公式	303

第1部分

算 术

第1章

CHAPTER 1

算 术

1.1 数的概念、性质和运算

1 数的概念

我们在数物体的时候,用来表示物体个数的 $1, 2, 3, \dots$ 叫做**自然数**.一个物体也没有,用 0 表示. 0 也是自然数.自然数都是整数.

将单位“ 1 ”平均分成若干份,表示这样的一份或几份的数叫做**分数**.表示其中一份的数是这个分数的**分数单位**.分数有**真分数**、**假分数**、**带分数**等.

将整数“ 1 ”平均分成 10 份, 100 份, 1000 份……这样的一份或几份是十分之几,百分之几,千分之几……它们可以用小数表示.小数分有限小数、无限小数、循环小数等.

整数和小数都是按照十进制计数法写出的数,其中个,十,百……以及十分之一,百分之一……都是**计数单位**.各个计数单位所占的位置,叫做**数位**.表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做**百分数**,也叫做**百分率**或**百分比**.百分数通常用“ $\%$ ”来表示.

2 数的整除

当整数 a 除以整数 $b(b \neq 0)$,除得的商正好是整数而无非零余数时,则称 a 能被 b 整除或称 b 能整除 a .当 a 能被 b 整除时,也称 a 是 b 的**倍数**, b 是 a 的**约数**.一个数的约数的个数是有限的,其中最小的约数是 1 ,最大的约数是它本身;一个数的倍数的个数是无限的,其中最小的倍数是它本身.

个位上是 $0, 2, 4, 6, 8$ 的数都能被 2 整除,个位上是 $0, 5$ 的数都能被 5 整除,各位上的数的和能被 3 整除的数本身也能被 3 整除.能被 2 整除的数称为**偶数**,不能被 2 整除的数称为**奇数**.

一个正整数,如果只有 1 和它本身两个约数,叫做**质数**(**素数**).一个正整数,如果除了 1 和它本身,还有其他约数,叫做**合数**.每个合数都可以写成几个质数相乘,这几个质数都叫做