

“十一五”国家重点图书出版规划项目

· 经 / 济 / 科 / 学 / 译 / 丛 ·

Time Series Analysis

# 时间序列分析

上册

詹姆斯·D·汉密尔顿 (James D. Hamilton) 著

 中国人民大学出版社

“十一五”国家重点图书出版规划项目

· 经 / 济 / 科 / 学 / 译 / 丛 ·

Time Series Analysis

---

# 时间序列分析

---

上册

詹姆斯·D·汉密尔顿 (James D. Hamilton) 著

夏晓华 译

胡毅 校

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

时间序列分析/ ( ) 汉密尔顿著; 夏晓华译. —北京: 中国人民大学出版社, 2014. 12  
(经济科学译丛)

书名原文: Time • series • analysis

ISBN 978-7-300-20213-6

I. ①时… II. ①汉… ②夏… III. ①时间序列分析 IV. ①O211. 61

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 243124 号

“十一五”国家重点图书出版规划项目

经济科学译丛

时间序列分析

詹姆斯·D·汉密尔顿 著

夏晓华 译

胡毅 校

Shijian Xulie Fenxi

---

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

电 话 010-62511242 (总编室)

010-82501766 (邮购部)

010-62515195 (发行公司)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com> (人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 涿州市星河印刷有限公司

规 格 185mm×260mm 16 开本

印 张 59.25 插页 4

字 数 1 143 000

邮政编码 100080

010-62511770 (质管部)

010-62514148 (门市部)

010-62515275 (盗版举报)

版 次 2015 年 1 月第 1 版

印 次 2015 年 1 月第 1 次印刷

定 价 118.00 元 (上下册)

---

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

# 《经济科学译丛》编辑委员会

---

学术顾问 高鸿业 王传纶 胡代光

范家骧 朱绍文 吴易风

主 编 陈岱孙

副主编 梁 晶 海 闻

编 委 (按姓氏笔画排序)

王一江 王利民 王逸舟

贝多广 平新乔 白重恩

刘 伟 朱 玲 许成钢

张宇燕 张维迎 李 扬

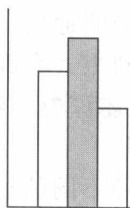
李晓西 李稻葵 杨小凯

汪丁丁 易 纲 林毅夫

金 碚 姚开建 徐 宽

钱颖一 高培勇 梁小民

盛 洪 樊 纲



# 《经济科学译丛》总序

中国是一个文明古国，有着几千年的辉煌历史。近百年来，中国由盛而衰，一度成为世界上最贫穷、落后的国家之一。1949年中国共产党领导的革命，把中国从饥饿、贫困、被欺侮、被奴役的境地中解放出来。1978年以来的改革开放，使中国真正走上了通向繁荣富强的道路。

中国改革开放的目标是建立一个有效的社会主义市场经济体制，加速发展经济，提高人民生活水平。但是，要完成这一历史使命绝非易事，我们不仅需要从自己的实践中总结教训，也要从别人的实践中获取经验，还要用理论来指导我们的改革。市场经济虽然对我们这个共和国来说是全新的，但市场经济的运行在发达国家已有几百年的历史，市场经济的理论亦在不断发展完善，并形成了一个现代经济学理论体系。虽然许多经济学名著出自西方学者之手，研究的是西方国家的经济问题，但他们归纳出来的许多经济学理论反映的是人类社会的普遍行为，这些理论是全人类的共同财富。要想迅速稳定地改革和发展我国的经济，我们必须学习和借鉴世界各国包括西方国家在内的先进经济学的理论与知识。

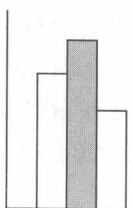
本着这一目的，我们组织翻译了这套经济学教科书系列。这套译丛的特点是：第一，全面系统。除了经济学、宏观经济学、微观经济学等基本原理之外，这套译丛还包括了产业组织理论、国际经济学、发展经济学、货币金融学、公

共财政、劳动经济学、计量经济学等重要领域。第二，简明通俗。与经济学的经典名著不同，这套丛书都是国外大学通用的经济学教科书，大部分都已发行了几版或十几版。作者尽可能地用简明通俗的语言来阐述深奥的经济学原理，并附有案例与习题，对于初学者来说，更容易理解与掌握。

经济学是一门社会科学，许多基本原理的应用受各种不同的社会、政治或经济体制的影响，许多经济学理论是建立在一定的假设条件上的，假设条件不同，结论也就不一定成立。因此，正确理解掌握经济分析的方法而不是生搬硬套某些不同条件下产生的结论，才是我们学习当代经济学的正确方法。

本套译丛于1995年春由中国人民大学出版社发起筹备并成立了由许多经济学专家学者组织的编辑委员会。中国留美经济学会的许多学者参与了原著的推荐工作。中国人民大学出版社向所有原著的出版社购买了翻译版权。北京大学、中国人民大学、复旦大学以及中国社会科学院的许多专家教授参与了翻译工作。前任策划编辑梁晶女士为本套译丛的出版做出了重要贡献，在此表示衷心的感谢。在中国经济体制转轨的历史时期，我们把这套译丛献给读者，希望为中国经济的深入改革与发展作出贡献。

《经济科学译丛》编辑委员会



# 前 言

很多经济学问题关注动态建模。这一领域的研究在过去十年有爆炸式增长，以致“时间序列计量经济学”已成为“实证宏观经济学”的代名词。

一些教材已经很好地涵盖了动态系统经济分析的进展，还有一些教材则总结了早期关于时间序列数据统计推断的文献。然而，写一本将理论与实证的相关问题整合到一起的书，同时包含最近十年的新发展，比如向量自回归分析、广义矩估计、非平稳时间序列建模，非常有必要。这就是《时间序列分析》的目标。

本书主要用于研究生计量经济学课程“时间序列分析”的教材。本书采用模块化结构以求最大限度的灵活性。例如，第13章关于卡尔曼滤波的前三节可以根据需要放在第4章后面。另外，跳过第13章对后文的理解也不会产生影响。除了灵活性，状态空间的思想已经完全集成到第1章的开始，状态空间表达（不含任何专业术语或形式主义）用来引出差分方程的关键结论。因此，当读者遇到状态空间框架的正式发展以及第13章的卡尔曼滤波时，对看到的符号以及关键思想想必已经非常熟悉。

谱分析（第6章）是读者可以选学或跳过的另外一个专题。在这一章，完整的模块化结构是由开始的引论、自回归生成函数以及滤子构成的。结论尽可能采用这些形式而不是谱的表达。

尽管本书在设计的时候是针对研究生计量经济学的时间序列分析，但本书也可以用于其他方面。本书自成体系，它以一年级研究生应有的知识为基础，同时包含了很丰富的数学附录。因此，本书也很适合不开计量经济学课程的一年级研究生在学习宏观经济学或动态方法的课程时使用，包括第 1、2 章，3.1 节~3.5 节，以及 4.1 节~4.2 节。

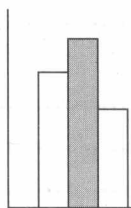
另外，本书也可以用于不专门讨论时间序列的传统计量经济学课程。主流的计量经济学课本关于数值方法；序列相关的渐近结果；不同分布的观测值；分布滞后模型的估计；自相关-异方差一致的标准误；贝叶斯分析或广义矩方法等的讨论较少。所有这些内容在时间序列分析中均有详细的讨论。因此，一个不专门讨论时间序列的计量经济学课程可以使用本书的 3.1 节~3.5 节，第 7~9 章以及第 14 章。可能的话，还可以采用第 5、11 和 12 章。同时，本书也自成体系，在第 9 章中关于传统的联立方程方法有非常详尽的讨论。事实上，本书的一个非常重要的目标是将（1）传统的联立方程计量方法；（2）当前流行的自回归和广义矩方法，平行地展开讨论。

最后，本书试图在方法上提供严格的思路，然而对那些只对应用感兴趣的学者也适用。这通过下述方法来实现：将很多证明细节放到章节最后的数学附录，以及提供了大量关于理论结果如何在实际中使用的例子。

本书由我在弗吉尼亚大学的讲义形成。首先且重要的是要感谢我的学生们，他们多年的提问与评论形成了本书的手稿。同时我也非常感谢我的同事们，他们对本书提出了非常多有用的建议，特别地，我要感谢 Donald W. K. Andrews, Jushan Bai, Peter Barse, Stephen R. Blough, John Cochrane, George Davis, Michael Dotsey, John Elder, Robert Engle, T. Wake Epps, Marjorie Flavin, John Geweke, Eric Ghysels, Carlo Giannini, Clive W. J. Granger, Alastair Hall, Bruce E. Hansen, Kevin Hassett, Tomoo Inoue, Ravi Jagannathan, Kenneth F. Kroner, Jaime Marquez, Rocco Mosconi, Edward Nelson, Masao Ogaki, Adrian Pagan, Peter C. B. Phillips, Peter Rappoport, Glenn Rudebusch, Raul Susmel, Mark Watson, Kenneth D. West, Halbert White, 以及 Jeffrey M. Wooldridge。同时我要感谢 Pok-sang Lam 和 John Rogers 慷慨地分享了他们的数据。感谢 Keith Sill 和 Christopher Stomberg 在绘图上的帮助，感谢 Rita Chen 帮助完成附录 B 中的统计表格，以及感谢 Richard Mickey 为本书的编辑所付出的辛勤劳动。

詹姆斯·D·汉密尔顿





# 目 录

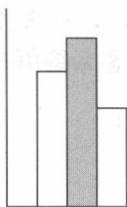
<b>第 1 章 差分方程</b> .....	1
1.1 一阶差分方程 .....	1
1.2 $p$ 阶差分方程 .....	7
附录 1. A 第 1 章性质证明 .....	22
第 1 章参考文献 .....	27
<b>第 2 章 滞后算子</b> .....	28
2.1 简介 .....	28
2.2 一阶差分方程 .....	31
2.3 二阶差分方程 .....	34
2.4 $p$ 阶差分方程 .....	38
2.5 初始条件及无界序列 .....	42
第 2 章参考文献 .....	48
<b>第 3 章 平稳自回归移动平均过程</b> .....	49
3.1 期望、平稳性和遍历性 .....	49
3.2 白噪声 .....	54
3.3 移动平均过程 .....	55
3.4 自回归过程 .....	60
3.5 混合自回归移动平均过程 .....	68
3.6 自协方差生成函数 .....	70
3.7 可逆性 .....	74

附录 3. A 无限阶移动平均过程的收敛结论 .....	78
第 3 章习题 .....	80
第 3 章参考文献 .....	82
<b>第 4 章 预测 .....</b>	<b>83</b>
4.1 预测的原理 .....	84
4.2 基于无限个观测的预测 .....	89
4.3 基于有限个观测的预测 .....	97
4.4 正定对称矩阵的三角分解 .....	100
4.5 线性投影更新 .....	105
4.6 高斯过程的最优预测 .....	114
4.7 自回归移动平均过程的和 .....	117
4.8 沃尔德分解与博克斯-詹金斯建模哲学 .....	124
附录 4. A 普通最小二乘回归与线性投影 .....	129
附录 4. B 一阶移动平均过程协方差矩阵的三角分解 .....	130
第 4 章习题 .....	132
第 4 章参考文献 .....	132
<b>第 5 章 极大似然估计 .....</b>	<b>134</b>
5.1 简介 .....	134
5.2 高斯一阶自回归过程的似然函数 .....	135
5.3 高斯 $p$ 阶自回归过程的似然函数 .....	141
5.4 高斯一阶移动平均过程的似然函数 .....	145
5.5 高斯 $q$ 阶移动平均过程的似然函数 .....	149
5.6 高斯 $p$ 阶自回归 $q$ 阶移动平均过程的似然函数 .....	151
5.7 数值优化 .....	152
5.8 极大似然估计的统计推断 .....	162
5.9 不等式约束 .....	166
附录 5. A 第 5 章性质证明 .....	169
第 5 章习题 .....	171
第 5 章参考文献 .....	171
<b>第 6 章 谱分析 .....</b>	<b>173</b>
6.1 总体谱 .....	174
6.2 样本谱 .....	179

6.3	总体谱估计 .....	185
6.4	谱分析的应用 .....	190
	附录 6. A 第 6 章性质证明 .....	195
	第 6 章习题 .....	202
	第 6 章参考文献 .....	202
<b>第 7 章</b>	<b>渐近分布理论 .....</b>	<b>203</b>
7.1	渐近分布理论回顾 .....	203
7.2	序列相关观测的极限定理 .....	210
	附录 7. A 第 7 章性质证明 .....	220
	第 7 章习题 .....	224
	第 7 章参考文献 .....	225
<b>第 8 章</b>	<b>线性回归模型 .....</b>	<b>226</b>
8.1	确定性回归元与独立同分布高斯扰动下的普通最小二乘法回顾 .....	226
8.2	一般条件下的普通最小二乘法 .....	234
8.3	广义最小二乘法 .....	248
	附录 8. A 第 8 章性质证明 .....	257
	第 8 章习题 .....	261
	第 8 章参考文献 .....	262
<b>第 9 章</b>	<b>线性联立方程系统 .....</b>	<b>264</b>
9.1	联立方程偏差 .....	264
9.2	工具变量与两阶段最小二乘法 .....	270
9.3	识别 .....	276
9.4	完全信息极大似然估计 .....	280
9.5	基于简化型的估计 .....	284
9.6	联立方程偏差综述 .....	286
	附录 9. A 第 9 章性质证明 .....	286
	第 9 章习题 .....	290
	第 9 章参考文献 .....	290
<b>第 10 章</b>	<b>协方差平稳的向量过程 .....</b>	<b>291</b>
10.1	向量自回归简介 .....	291

10.2	向量过程的自协方差与收敛性结论 .....	296
10.3	向量过程的自协方差生成函数 .....	301
10.4	向量过程的谱 .....	304
10.5	向量过程的样本均值 .....	314
	附录 10. A 第 10 章性质证明 .....	322
	第 10 章习题 .....	327
	第 10 章参考文献 .....	328
<b>第 11 章</b>	<b>向量自回归 .....</b>	<b>329</b>
11.1	无约束向量自回归的极大似然估计与假设检验 .....	329
11.2	二元格兰杰因果检验 .....	342
11.3	有约束向量自回归的极大似然估计 .....	349
11.4	脉冲响应函数 .....	361
11.5	方差分解 .....	366
11.6	向量自回归与结构计量模型 .....	368
11.7	脉冲响应函数的标准误 .....	380
	附录 11. A 第 11 章性质证明 .....	385
	附录 11. B 解析导数的计算 .....	391
	第 11 章习题 .....	396
	第 11 章参考文献 .....	397
<b>第 12 章</b>	<b>贝叶斯分析 .....</b>	<b>401</b>
12.1	贝叶斯分析简介 .....	401
12.2	向量自回归的贝叶斯分析 .....	411
12.3	数值贝叶斯方法 .....	413
	附录 12. A 第 12 章性质证明 .....	416
	第 12 章习题 .....	422
	第 12 章参考文献 .....	422
<b>第 13 章</b>	<b>卡尔曼滤波 .....</b>	<b>424</b>
13.1	动态系统的状态空间表达 .....	424
13.2	卡尔曼滤波的推导 .....	430
13.3	基于状态空间表达的预测 .....	435
13.4	参数的极大似然估计 .....	440
13.5	稳态卡尔曼滤波 .....	446

13.6	平滑 .....	451
13.7	卡尔曼滤波的统计推断 .....	455
13.8	时变参数 .....	457
	附录 13. A 第 13 章性质证明 .....	463
	第 13 章习题 .....	468
	第 13 章参考文献 .....	470
<b>第 14 章</b>	<b>广义矩方法 .....</b>	<b>473</b>
14.1	广义矩估计 .....	474
14.2	例子 .....	481
14.3	拓展 .....	491
14.4	广义矩与极大似然估计 .....	494
	附录 14. A 第 14 章性质证明 .....	499
	第 14 章习题 .....	500
	第 14 章参考文献 .....	501



## 1.1 一阶差分方程

本书关注事件在时间上的动态结果。研究变量在第  $t$  期的值记为  $y_t$ 。假定给出的动态方程将变量  $y$  第  $t$  期的值  $y_t$  与另外的变量  $w_t$  以及  $y$  的前一期联系起来：

$$y_t = \phi y_{t-1} + w_t. \quad [1.1.1]$$

方程 [1.1.1] 称为线性一阶差分方程。所谓差分方程即将变量  $y_t$  与它的滞后期联系起来的表达式。上式称为一阶差分方程是因为仅仅只有变量的一阶滞后 ( $y_{t-1}$ ) 出现在方程中。注意到该方程将  $y_t$  表示成  $y_{t-1}$  和  $w_t$  的线性函数。

式 [1.1.1] 的一个例子是 Goldfeld (1973) 对美国货币需求函数的估计。Goldfeld 的模型将公众实际持有货币量的对数 ( $m_t$ ) 与总体实际收入的对数 ( $I_t$ )、银行账户利率的对数 ( $r_b$ ) 和商业票据利率的对数 ( $r_a$ ) 联系起来：

$$m_t = 0.27 + 0.72m_{t-1} + 0.19I_t - 0.045r_b - 0.019r_a. \quad [1.1.2]$$

这是式 [1.1.1] 在  $y_t = m_t$ ,  $\phi = 0.72$ , 以及

$$w_t = 0.27 + 0.19I_t - 0.045r_b - 0.019r_a$$

时的特殊情形。为了分析该系统的动态性，这里将所有的投入变量 ( $I_t$ ,  $r_b$  和  $r_a$ ) 的效应用  $w_t$  来表示。

第3章中,投入变量  $w_t$  将被处理为随机变量,式 [1.1.1] 关于产出序列  $y_t$  的统计性质将会进一步深入研究。为了对这些讨论做准备,首先需要理解差分方程的机制。在第1章和第2章的讨论中,投入变量  $\{w_1, w_2, \dots\}$  被简化为一系列确定的数字。我们的目标是为了回答下面的问题:如果动态系统由式 [1.1.1] 描述,  $w$  的改变对  $y$  的影响是什么?

### □ 用递归替代法求解差分方程

前提假定是动态方程 [1.1.1] 控制了  $y$  在所有时期的行为。因此,在每个时期,我们有一个方程将当期的  $y$  值与前一期的  $y$  值以及当期的  $w$  值联系起来:

时期	方程	
0	$y_0 = \phi y_{-1} + w_0$	[1.1.3]
1	$y_1 = \phi y_0 + w_1$	[1.1.4]
2	$y_2 = \phi y_1 + w_2$	[1.1.5]
⋮	⋮	
$t$	$y_t = \phi y_{t-1} + w_t$	[1.1.6]

若知道  $y$  在  $t=-1$  期开始时的值以及  $w$  在  $t=0, 1, 2, \dots$  期的值,则可以通过模拟该动态系统求出  $y$  在任意时刻的值。比如,如果已知  $y$  在  $t=-1$  期以及  $w$  在  $t=0$  期的值,可以由式 [1.1.3] 计算出  $y$  在  $t=0$  的值。给定这个值  $y_0$  以及  $w$  在  $t=1$  期的值,可以由式 [1.1.4] 计算出  $y$  在  $t=1$  期的值:

$$y_1 = \phi y_0 + w_1 = \phi(\phi y_{-1} + w_0) + w_1,$$

或

$$y_1 = \phi^2 y_{-1} + \phi w_0 + w_1.$$

给定  $y_1$  以及  $w$  在  $t=2$  期的值,可以由式 [1.1.5] 计算  $y$  在  $t=2$  期的值:

$$y_2 = \phi y_1 + w_2 = \phi(\phi^2 y_{-1} + \phi w_0 + w_1) + w_2,$$

或

$$y_2 = \phi^3 y_{-1} + \phi^2 w_0 + \phi w_1 + w_2.$$

依此类推,  $y$  在第  $t$  期的值可以看做  $y$  的初始值  $y_{-1}$  和  $w$  在第 0 期到第  $t$  期的历史值的函数:

$$y_t = \phi^{t+1} y_{-1} + \phi^t w_0 + \phi^{t-1} w_1 + \phi^{t-2} w_2 + \dots + \phi w_{t-1} + w_t. \quad [1.1.7]$$

这个过程被称为是求解差分方程 [1.1.1] 的递归替代法。

### □ 动态乘子

注意到,式 [1.1.7] 将  $y_t$  表示成初始值  $y_{-1}$  和  $w$  的历史值的线性函数。这使得我们可以很容易计算  $w_0$  对  $y_t$  的影响。若保持  $y_{-1}$  以及  $w_1, w_2, \dots, w_t$  不变,  $w_0$  的变化对  $y_t$  的影响为:

$$\frac{\partial y_t}{\partial w_0} = \phi^t. \quad [1.1.8]$$

注意到上面的计算过程对时刻  $t$  ( $y_{t-1}$  给定) 也成立;  $y_{t+j}$  能表示成  $y_{t-1}$  和  $w_t, w_{t+1}, \dots, w_{t+j}$  的函数:

$$y_{t+j} = \phi^{j+1} y_{t-1} + \phi^j w_t + \phi^{j-1} w_{t+1} + \phi^{j-2} w_{t+2} + \dots + \phi w_{t+j-1} + w_{t+j}. \quad [1.1.9]$$

$w_t$  对  $y_{t+j}$  的影响为

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \phi^j. \quad [1.1.10]$$

因此, 动态乘子式 [1.1.10] 仅仅取决于  $j$ , 即  $y_{t+j}$  与  $w_t$  之间的时间间隔。乘子并不取决于时间  $t$ , 也就是说乘子不取决于观测值本身所处的时间。这一结论对于任意线性差分方程都成立。

以 Goldfeld 货币需求设定式 [1.1.2] 为例, 说明如何计算动态乘子。假设我们想知道未来两期收入  $I_{t+1}$  和  $I_{t+2}$  保持不变的前提下, 当期收入  $I_t$  增加一个单位对货币需求的影响:

$$\frac{\partial m_{t+2}}{\partial I_t} = \frac{\partial m_{t+2}}{\partial w_t} \times \frac{\partial w_t}{\partial I_t} = \phi^2 \times \frac{\partial w_t}{\partial I_t}.$$

由式 [1.1.2],  $I_t$  增加一个单位会导致  $w_t$  增加 0.19 个单位, 意味着  $\partial w_t / \partial I_t = 0.19$ 。因为  $\phi = 0.72$ , 故有

$$\frac{\partial m_{t+2}}{\partial I_t} = (0.72)^2 (0.19) = 0.098.$$

因为  $I_t$  表示对数收入,  $I_t$  增加 0.01 个单位对应收入增长 1%。 $m_t$  增长  $(0.01) \cdot (0.098) \cong 0.001$  对应货币持有增长 0.1%。因此公众会期望当期收入增长 1% 会导致两个季度后货币持有增长接近于 0.1%。

$y$  对  $w$  的动态响应会随着式 [1.1.1] 中  $\phi$  值的不同而不同。若  $0 < \phi < 1$ , 式 [1.1.10] 中的乘子  $\partial y_{t+j} / \partial w_t$  以几何级数的速度趋于 0。图 1.1(a) 画出了  $\phi = 0.8$  时,  $\phi^j$  在不同  $j$  处的值。若  $-1 < \phi < 0$ , 乘子  $\partial y_{t+j} / \partial w_t$  将会像图 1.1(b) 一样正负交替。在这种情况下,  $w_t$  的增加会导致  $y_t$  的增加,  $y_{t+1}$  的减小,  $y_{t+2}$  的增加, 等等。同样, 效应的绝对值也会以几何级数的速度趋向于 0。若  $\phi > 1$ , 动态乘子将会像图 1.1(d) 一样按指数速度增长。随着时间的增加,  $w_t$  的变化所带来的效应会越来越大。对于  $\phi < -1$ , 式 [1.1.1] 将会呈现图 1.1(d) 一样的振荡发散过程。

因此, 若  $|\phi| < 1$ , 系统是稳定的;  $w_t$  的变化所带来的影响最终会消失。若  $|\phi| > 1$ , 系统是发散的。对于边界情形, 即  $\phi = 1$ , 式 [1.1.9] 的解变为

$$y_{t+j} = y_{t-1} + w_t + w_{t+1} + w_{t+2} + \dots + w_{t+j-1} + w_{t+j}. \quad [1.1.11]$$

这里, 产出变量  $y$  是投入变量  $w$  的历史值之和。 $w$  增加一单位将会导致  $y$  永久



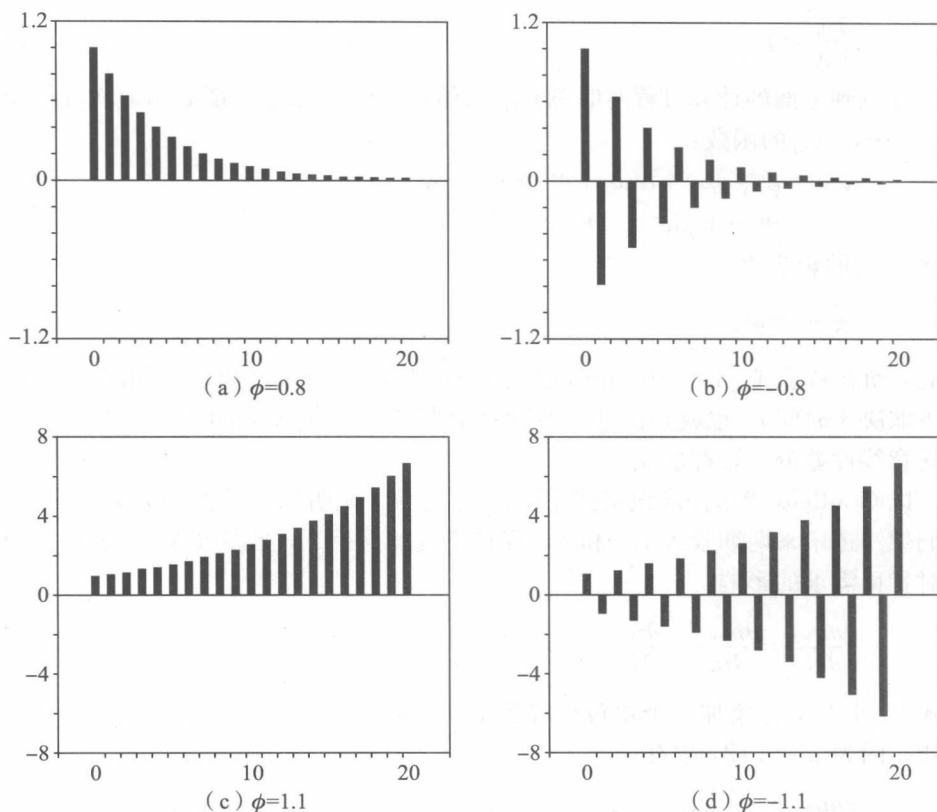


图 1.1 不同的  $\phi$  对应的一阶差分方程的动态乘子 ( $\partial y_{t+j} / \partial w_t = \phi^j$  是滞后阶数  $j$  的函数)

地增加一个单位:

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = 1, \quad j=0, 1, \dots$$

我们感兴趣的可能是  $w$  的效应对将来所有实现值  $y$  的现值的影响。对于给定的未来值  $y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots$  和一个常利率<sup>①</sup>  $r > 0$ ,  $t$  时刻的现值为

$$y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} + \frac{y_{t+2}}{(1+r)^2} + \frac{y_{t+3}}{(1+r)^3} + \dots \quad [1.1.12]$$

令  $\beta$  表示折现因子:

$$\beta \equiv 1/(1+r).$$

注意到  $0 < \beta < 1$ 。现值式 [1.1.12] 可以写为

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t+j}. \quad [1.1.13]$$

① 这里利率由 1 的分数来测度; 因此  $r=0.1$  对应于 10% 的利率。