

上海大学出版社

2006年上海大学博士学位论文 60



L_p -空间中凸体几何的极值问题

- 作者：王卫东
- 专业：运筹学与控制论
- 导师：冷岗松



上海大学出版社
2006年上海大学博士学位论文



L_p -空间中凸体几何的 极值问题

- 作者：王卫东
- 专业：运筹学与控制论
- 导师：冷岗松



图书在版编目(CIP)数据

2006 年上海大学博士学位论文. 第 2 辑/博士学位论文编辑部编. —上海:上海大学出版社,2010.6

ISBN 978-7-81118-513-3

I. 2... II. 博... III. 博士—学位论文—汇编—上海市—2006 IV. G643.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 162510 号

2006 年上海大学博士学位论文 ——第 2 辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.shangdapress.com> 发行热线 66135110)

出版人: 姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 890×1240 1/32 印张 278 字数 7 760 千

2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1—400

ISBN 978-7-81118-513-3/G·514 定价: 880.00 元(44 册)

Shanghai University Doctoral Dissertation (2006)

Extremum Problems in Convex Bodies Geometry of L_p – Space

Candidate: Wang Weidong

Major: Operations Research and Control Theory

Supervisor: Leng Gangsong

Shanghai University Press

• Shanghai •

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查,确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会名单:

主任: 杨 路	教授,华东师范大学软件学院	200062
委员: 曾振柄	教授,华东师范大学软件学院	200062
王汉兴	教授,上海立信会计学院	200072
郭兴明	教授,上海市应用数学和力学研究所	200444
周盛凡	教授,上海大学数学系	200444
导师: 冷岗松	教授,上海大学数学系	200444

评阅人名单:

杨 路	教授,华东师范大学软件学院	200062
曾振柄	教授,华东师范大学软件学院	200062
虞言林	教授,苏州大学数学系	215006
任德麟	教授,武汉科技大学数学系	430081
李庆国	教授,湖南大学数学系	410082

答辩委员会对论文的评语

王卫东同学的博士论文“ L_p -空间中凸体几何的极值问题”,选题属于现代几何学的前沿,是当前十多年来国际上发展十分迅速的凸几何研究领域的重要课题.

本文以 L_p -空间中凸体几何的极值问题作为研究内容和研究重点,其主要创新点有:

(1) 在 L_p -对偶混合体积的基础上提出了 L_p -对偶混合均质积分这一新概念,并建立了对偶混合均质积分的 Brunn-Minkowski 不等式;

(2) 研究了新几何体 $\Gamma_{-p}K$ 的性质,建立了联系新几何体 $\Gamma_{-p}K$ 和 L_p -质心体 $\Gamma_{-p}K$ 的不等式;

(3) 给出了 Blaschke-Santaló 不等式的一个逆形式;

(4) 深入研究了投影不等式 Petty 猜想的 L_p -形式和 L_p -Petty 投影不等式的逆形式;

(5) 引进了 L_p -混合投影体概念,并证明了相应的 Petty 投影不等式和 Shephard 问题;

(6) 分别建立了 L_p -Petty 投影体和 L_p -质心体的体积、均质积分和对偶均质积分的单调性不等式;

(7) 探讨了 L_p -曲率映象的性质和仿射等周不等式;

(8) 证明了关于 L_p -仿射表面积的仿射等周不等式,并通过引入 i 次 L_p -混合仿射表面积的概念,得到了关于 L_p -混合仿射表面积的一系列结果.

攻博期间,王卫东同学撰写的论文已经或即将发表在国

际国内的重要学术期刊《Indian J. Pure Appl. 》、《Math. Inequal. Appl. 》、《Acta Math. Sinica》、《数学学报(中文版)》、《数学年刊(中文版)》、《系统科学与数学(中文版)》等杂志上. 他的博士论文写作目标明确, 思路清晰, 对所研究领域的历史和现状有非常清楚的了解. 答辩中能正确回答问题. 从本论文可以看出, 作者具有坚实的理论基础和广博的专业知识, 具有很强的科研工作能力.

经答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决, 全票同意通过王卫东同学的博士学位论文答辩, 建议授予理学博士学位.

答辩委员会主任: **杨路**

2006 年 4 月 25 日

摘 要

本文研究内容隶属于 L_p -Brunn-Minkowski 理论(又称为 Brunn-Minkowski-Firey 理论)领域,该领域是近 10 年来在国际上发展非常迅速的一个几何学分支.本文主要利用 L_p -Brunn-Minkowski 理论的基本概念、基本知识和积分变换方法,研究 L_p -空间中凸体几何的理论、几何体的度量不等式和极值问题.一方面,我们对 L_p -Brunn-Minkowski 理论的基础理论进行了研究.另一方面,我们研究了 L_p -Brunn-Minkowski 理论领域诸多几何体: L_p -投影体、 L_p -质心体、新几何体 $\Gamma_{-p}K$ 、 L_p -John 椭球、 L_p -曲率映象以及由我们新引入的 L_p -混合投影体的体积、均质积分、仿射表面积构成的度量不等式和极值问题.

在 L_p -Brunn-Minkowski 理论的基础理论研究方面,我们首次提出了 L_p -混合均质积分的对偶概念—— L_p -对偶混合均质积分,这个概念也将 L_p -对偶混合体积和对偶均质积分的概念进行了推广.我们不仅研究了它的性质,给出了它的积分表达式和 Minkowski 不等式,而且利用这个新概念,我们建立了关于星体 L_p -调和径向组合对偶均质积分的 Brunn-Minkowski 不等式,使之与关于凸体 Firey L_p -组合均质积分的 Brunn-Minkowski 不等式相映成偶.同时,我们还加强了这两种 Brunn-Minkowski 不等式,分别给出了它们的隔离形式.著名的 Blaschke-Santaló 不等式的逆形式探讨,一直是经典 Brunn-

Minkowski 理论领域的热点课题,我们通过对新几何体 $\Gamma_{-p}K$ 的单调性研究,意外地获得了这方面的一个结论.

在 L_p -Brunn-Minkowski 理论领域里关于几何体的度量不等式和极值问题研究方面,我们投入了更多的精力.关于 L_p -投影体的研究,我们重点探讨了投影不等式 Petty 猜想的 L_p -形式($p=1$ 时即是投影不等式 Petty 猜想本身),并给出了几个相关的结论,特别是解决了 $p=2$ 时的投影不等式 Petty 猜想;与此同时,我们又研究了 L_p -Petty 投影不等式的逆形式,得到了多种版本的结果;此外,我们还比较深入地研究了 L_p -投影体以及它的极的单调性不等式,并获得了较好的效果.在 L_p -投影体和混合投影体概念的基础上,我们引入了一种新几何体—— L_p -混合投影体,研究了它的有关性质,给出了它的 Shephard 问题,并分别建立了关于这个新几何体的体积和均质积分的 Petty 投影不等式,从而把 L_p -Petty 投影不等式和关于混合投影体的 Petty 投影不等式予以了推广;特别值得一提的是,将 L_p -混合投影体的概念与 L_p -混合均质积分相结合,可以把关于 L_p -投影体(还有 L_p -质心体)体积的单调性不等式推广到均质积分形式,我们为此也做了一些工作.对 L_p -质心体,我们建立了关于 L_p -质心体和它的极的体积单调性不等式,并利用 L_p -混合投影体的概念将其推广到均质积分形式;同时,还探讨了 L_p -Busemann-Petty 质心不等式和 L_p -质心仿射不等式的逆形式,作为前者的应用,得到了中心凸体迷向常数的一个上界,对后者,给出了几种形式的结果;另外,结合对新几何体 $\Gamma_{-p}K$ 的研究,我们又意外获得了 L_p -Busemann-Petty 质心不等式的一个隔离形式.在新几何体 $\Gamma_{-p}K$ 的研究

上,我们不仅给出了它的 Shephard 问题,而且侧重研究了它与 L_p -质心体之间的不等式,当然还有前面的两个意外收获.就 L_p -John 椭球这个新概念而言,我们仅给出了关于它体积的一个已知不等式的加强形式和逆形式.关于 L_p -曲率映象,自 Lutwak 于 1996 年引入以来少有人问津,为此我们做了比较系统的研究,包括它的基本性质,与其有关的仿射等周不等式,以及它与 L_p -投影体和 L_p -质心体之间的一个有趣等式.对于 L_p -仿射表面积,我们主要是把 Petty, Lutwak, 冷岗松教授在经典仿射表面积的部分结果进行了推广,得到了 L_p -Petty 仿射投影不等式和其他几个与 L_p -投影体, L_p -质心体相关的仿射等周不等式.同时,在混合仿射表面积和 L_p -仿射表面积概念的基础上,我们通过引入 i 次 L_p -混合仿射表面积的概念,推广了 Lutwak 关于混合仿射表面积的一系列结果,特别是利用这个概念,得到了一个涉及一类星体的体积和对偶均质积分之间的不等式.

关键词 凸体,星体,不等式,极值, L_p -混合均质积分, L_p -对偶混合均质积分, L_p -投影体, L_p -混合投影体, L_p -质心体,新几何体 $\Gamma_{-p}K$, L_p -曲率映象, L_p -仿射表面积, L_p -混合仿射表面积

Abstract

This article belongs to the domain, is a high-speed developing geometry branch on the decade of late, of the L_p -Brunn-Minkowski theory (or called Brunn-Minkowski-Firey theory). Our main works are to research the theories of convex bodies, some inequalities and extremum properties of geometry bodies by applying the basic notions, basic theories and integral transforms of the L_p -Brunn-Minkowski theory. In the first aspect, the basic theories of the L_p -Brunn-Minkowski theory are studied. The other parts, we research the inequalities and extremum properties of some geometry bodies containing the L_p -projection body, L_p -centroid body, new geometry body, L_p -John ellipsoid, L_p -curvature image and a new notion from our definition — L_p -mixed projection body for these volumes, quermassintegrals and affine surface areas in the L_p -Brunn-Minkowski theory.

In the aspects of the basic theory for L_p -Brunn-Minkowski theory, we first show the dual of L_p -mixed quermassintegral — the notion of L_p -dual mixed quermassintegral which is the extensions of L_p -dual mixed volume and dual mixed quermassintegrals. For this new notion, we not only study its qualities, integral representation and Minkowski inequality, but also establish the Brunn-

Minkowski inequality of dual quermassintegrals for the L_p -harmonic radial combination of star bodies by applying this new notion, this inequality and the Brunn-Minkowski inequality of quermassintegrals for the Firey L_p -combination of convex bodies appear “dual” form. For above two Brunn-Minkowski inequality, these isolates are respectively obtained. The reverse of the well-known Blaschke-Santaló inequality is researched in the classical Brunn-Minkowski theory to be interest, we unexpectedly get a reverse of the Blaschke-Santaló inequality by applying the monotonicity of the new geometry body $\Gamma_{-p}K$.

We put into more vigor for the inequalities and extremum properties of geometry bodies in the L_p -Brunn-Minkowski theory. About the L_p -projection body, we mainly research the L_p -forms of the Petty’s conjectured projection inequality (this is just the Petty’s conjectured projection inequality when $p = 1$), and give several results, we particularly prove that the Petty’s conjectured projection inequality is true when $p = 2$. In the meantime, we give several versions for the reverses of the L_p -Petty projection inequality. In addition, we also get better results for the monotonicity inequalities of the L_p -projection body and its polar. Base on the L_p -projection body and the mixed projection bodies, we introduce a new geometry notion — L_p -mixed projection body, and study its qualities and Shephard problem; in particular, we extend the L_p -Petty projection inequality and the Petty projection inequality for the mixed projection bodies, to establish the

Petty projection inequality for the volumes and quermassintegrals of this new notion, respectively. We should stress that together with the L_p -mixed projection body and L_p -mixed quermassintegrals, the monotonicity inequalities for the L_p -projection body can be extended from the volumes to quermassintegrals. On the L_p -centroid body, the monotonicity inequalities of its volume are established, further, these inequalities are extended from volumes to quermassintegrals by using the notion of L_p -mixed projection body. We also give a reverse of the L_p -Busemann-Petty inequality and several reverse forms of the L_p -centroid affine inequality, and applying first reverse to get a upper bound for the isotropic constant of central convex bodies. Besides, a isolate form of the L_p -Busemann-Petty inequality is unexpectedly obtained by combining with the new geometry body $\Gamma_{-p}K$. For the $\Gamma_{-p}K$, we prove its Shephard problem, and mainly seek some inequalities for this new geometry body and L_p -centroid body, from this, two unexpected gains are obtained in front to be stated. On the L_p -curvature image, it be studied is lack since Lutwak introduce it in 1996. So our works, containing the basic qualities and affine isoperimetric inequalities, in the aspects of L_p -curvature image are better systemical, we specially find a interesting equality for the L_p -curvature image, L_p -projection body and L_p -centroid body. For the L_p -affine surface area, some inequalities, from Petty, Lutwak and G. S. Leng, respectively, are extended, so we get the L_p -affine

projection inequality and several affine isoperimetric inequalities associated with L_p -projection body and L_p -centroid body. Base on the notions of mixed affine surface area and L_p -affine surface area, we introduce the notion of L_p -mixed affine surface area, and extend Lutwak's results for the mixed affine surface area. In particular, we obtain an inequality associated with the volumes and dual quermassintegrals of a class of star bodies by using this notion.

Key words convex body, star body, inequality, extremum, L_p -mixed quermassintegral, L_p -dual mixed quermassintegral, L_p -projection body, L_p -mixed projection body, L_p -centroid body, new geometry body $\Gamma_{-p}K$, L_p -curvature image, L_p -affine surface area, L_p -mixed affine surface area

目 录

第一章 绪论	1
1.1 学科综述	1
1.2 本文研究的内容	6
1.3 本文取得的主要成果简介	7
第二章 Brunn-Minkowski 不等式的均质积分形式	39
2.1 预备知识	39
2.2 Brunn-Minkowski 不等式均质积分形式的加强	44
第三章 L_p -对偶混合均质积分	52
3.1 预备知识	52
3.2 L_p -对偶混合均质积分	55
3.3 L_p -对偶混合均质积分的 Minkowski 不等式	57
3.4 关于对偶均质积分的 Brunn-Minkowski 不等式	59
第四章 新几何体 $\Gamma_{-p}K$ 与 L_p -John 椭球	63
4.1 预备知识	63
4.2 新几何体 $\Gamma_{-p}K$ 的单调性	67
4.3 Blaschke-Santaló 不等式的一种逆形式	73
4.4 关于新几何体 $\Gamma_{-p}K$ 与 L_p -质心体之间的不等式	75
4.5 关于 L_p -John 椭球的不等式	77
第五章 L_p -投影体与 L_p -混合投影体	81
5.1 L_p -投影体与 L_p -混合投影体的概念和性质	82

5.2	关于投影不等式 Petty 猜想的 L_p -形式	89
5.3	关于 L_p -投影体与 L_p -混合投影体的单调性不等式	96
5.4	关于 L_p -Petty 投影不等式的逆形式	105
5.5	关于 L_p -混合投影体的 Petty 投影不等式	112
5.6	投影不等式 Petty 猜想的 L_2 -均质积分形式	116
第六章	L_p-质心体	120
6.1	引言和准备工作	120
6.2	关于 L_p -质心体的单调性不等式	122
6.3	关于 L_p -质心体的均质积分不等式	128
6.4	关于 L_p -Busemann-Petty 质心不等式和 L_p -质心仿射不等式的逆形式	130
第七章	L_p-曲率映象	135
7.1	预备知识	135
7.2	L_p -曲率映象的性质	137
7.3	关于 L_p -曲率映象的仿射等周不等式	142
7.4	关于 L_p -曲率映象与 L_p -投影体和 L_p -质心体的关系	146
第八章	L_p-仿射表面积与 L_p-混合仿射表面积	148
8.1	引言和准备工作	148
8.2	关于 L_p -仿射表面积的仿射等周不等式	151
8.3	L_p -混合仿射表面积	156
8.4	关于 Blaschke L_p -组合的两个 Brunn-Minkowski 不等式	164
第九章	关于今后工作的展望	167
参考文献		169
致 谢		180