普通高等教育“十二五”规划教材

(第二版)

概率论与数理统计

GAILVLUN YU SHULITONGJI

袁德正 主 编
刘仁南 副主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

（第二版）

袁德正　主　编
刘仁南　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括概率论与数理统计两部分.概率论部分包括:随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理;数理统计部分包括:数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析.

本书可作为普通高等院校非数学专业概率论与数理统计课程教材,也可作为相关科技人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 袁德正主编.—2版.—北京:科学出版社,2013

(普通高等教育"十二五"规划教材)

ISBN 978-7-03-036613-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①袁… Ⅲ.①概率论—高等教育—教材 ②数理统计—高等教育—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 020879 号

责任编辑:王纯刚 / 责任校对:刘玉靖
责任印制:吕春珉 / 封面设计:东方人华

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 12 月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2013 年 1 月第 二 版 印张:14
2013 年 8 月第二次印刷 字数:310 000

定价:29.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈铭浩〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62130874

本书编写人员

主　编　袁德正

副主编　刘仁南

参　编　刘建忠　陈绚青　马　强　卢金余

第二版前言

本书的第一版自 2006 年由科学出版社出版以来，共印刷了 7 次. 根据我国高等教育从精英教育向大众化教育转变，以及现代教育技术手段在教学中广泛应用的现状，尤其是近几年扩招对非重点二本院校的教学特点的要求和考研需求，我们重新修订了本书，以满足此类院校非数学专业培养应用型人才的概率论与数理统计课程的教学需要.

修订的第二版教材保留了第一版的系统和风格，知识结构条理清晰、重点突出；在概率论与数理统计概念、定理的叙述上，由浅入深，由具体到抽象，由特殊到一般，通俗易懂；内容上突出概率论与数理统计知识的应用性和实用性，具有教学进度可控性和教学内容可选性的优点.

本次修订根据不同的教学要求和分层教学的需要，修改了一些内容、例题，增加了基础知识复习题、应用题和综合练习题，使得习题的题型更加广泛. 学生在掌握概率统计的基本概念和方法的同时，可以得到数学素养的熏陶和逻辑思维的训练，从而进一步提高学生的学习能力和综合能力，体现以人为本、分层培养学生的教学理念，有利于应用型人才的培养. 在本次修订中，对本书进行了立体化教学设计，配套了多媒体课件，并在多媒体课件习题中，配有习题解答，希望能更好地满足高校老师课堂教学与学生自主学习的需要.

本次修订得到科学出版社和同行的帮助支持，在此深表感谢. 新版中存在的不足之处，欢迎专家、同行和读者给予批评指正.

编　者

2012 年 9 月

第一版前言

概率论与数理统计是一门基础数学课程．它的基本概念、理论和方法在自然学科和社会学科中都有着广泛的应用．本书所讲内容是解决实际问题的有力数学工具，有助于提高读者分析问题、解决问题和理论联系实际的能力，有助于提高读者的数学素质和综合素质．

本书内容分两部分：前五章为概率部分，作为基础知识讲述了随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理；第六到第十章为数理统计部分，主要介绍数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析．

本书是由教学经验丰富的教师在多年教学研究的基础上编写而成的．编写时，我们依据普通高等院校教学基本要求，结合高等技术师范类院校教学和考研的要求，在选材和叙述上尽量从实际问题出发，由浅入深，由具体到抽象，由特殊到一般，力求语言精练，通俗易懂，淡化纯理论推导内容，增加实用性例题和习题，有助于读者掌握概率论与数理统计基础知识和解决实际问题的方法．编写时，我们既考虑各章节的相互联系，也考虑各章节的独立性，便于教与学．讲授时可根据具体情况，增减部分章节的内容，调节某些章节的顺序．在每一章的章末，配备了难易程度不同的习题，供学生选做．另外，书末附有习题答案和部分习题提示，仅供参考．本书可以作为普通高等院校非数学专业概率论与数理统计课程的教材，也可以供有关科技人员参考．书中如有不妥之处，恳请读者予以批评、指正．

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率 …… 1

§1.1　随机事件 …… 1

1.1.1　随机试验与样本空间 …… 1

1.1.2　随机事件及其运算 …… 2

§1.2　随机事件的概率 …… 5

1.2.1　频率　概率的统计定义 …… 5

1.2.2　古典概型 …… 6

1.2.3　概率的公理化定义及其性质 …… 8

§1.3　条件概率 …… 10

1.3.1　条件概率 …… 10

1.3.2　乘法公式 …… 12

§1.4　事件的独立性 …… 13

1.4.1　事件的独立性 …… 13

1.4.2　伯努利试验 …… 16

§1.5　全概率公式与贝叶斯公式 …… 17

1.5.1　全概率公式 …… 17

1.5.2　贝叶斯公式 …… 18

习题 1 …… 20

第 2 章　随机变量及其分布 …… 24

§2.1　随机变量及其分布函数 …… 24

2.1.1　随机变量的概念 …… 24

2.1.2　随机变量的分布函数 …… 25

§2.2　离散型随机变量及其分布 …… 27

2.2.1　分布律及其性质 …… 27

2.2.2　常见离散型随机变量的分布 …… 28

2.2.3　泊松定理 …… 31

§2.3　连续型随机变量及其分布 …… 32

2.3.1　密度函数及其性质 …… 32

2.3.2　常见连续型随机变量的分布 …… 34

§2.4 随机变量函数的分布…… 40
2.4.1 离散型随机变量函数的分布 …… 40
2.4.2 连续型随机变量函数的分布 …… 41
习题 2 …… 43

第 3 章 多维随机变量及其分布 …… 46

§3.1 二维随机变量…… 46
3.1.1 多维随机变量的定义 …… 46
3.1.2 联合分布函数 …… 46
3.1.3 二维离散型随机变量 …… 47
3.1.4 二维连续型随机变量 …… 49
§3.2 边缘分布…… 51
3.2.1 边缘分布函数 …… 51
3.2.2 二维离散型随机变量的边缘分布 …… 51
3.2.3 二维连续型随机变量的边缘分布 …… 52
§3.3 条件分布…… 55
3.3.1 二维离散型随机变量的条件分布 …… 55
3.3.2 二维连续型随机变量的条件分布 …… 56
§3.4 随机变量的独立性…… 58
3.4.1 随机变量的独立性 …… 58
3.4.2 二维离散型随机变量的独立性 …… 58
3.4.3 二维连续型随机变量的独立性 …… 60
§3.5 二维随机变量函数的分布…… 61
3.5.1 离散型随机变量函数的分布 …… 61
3.5.2 连续型随机变量函数的分布 …… 63
习题 3 …… 66

第 4 章 随机变量的数字特征 …… 71

§4.1 数学期望…… 71
4.1.1 离散型随机变量的数学期望 …… 71
4.1.2 连续型随机变量的数学期望 …… 73
4.1.3 随机变量函数的数学期望 …… 75
4.1.4 数学期望的性质 …… 77
§4.2 方差…… 78
4.2.1 方差的定义 …… 79
4.2.2 方差的性质 …… 81
§4.3 协方差 相关系数…… 82

习题 4 …… 87

第 5 章　大数定律及中心极限定理 …… 92

§5.1　大数定律 …… 92

5.1.1　切比雪夫不等式 …… 92

5.1.2　切比雪夫大数定律 …… 93

5.1.3　伯努利大数定律 …… 94

§5.2　中心极限定理 …… 94

习题 5 …… 96

第 6 章　数理统计的基础知识 …… 98

§6.1　数理统计的基本概念 …… 98

6.1.1　总体与样本 …… 99

6.1.2　统计量 …… 99

6.1.3　频率直方图与条形图　经验分布函数 …… 100

§6.2　常用统计量及抽样分布 …… 104

6.2.1　正态总体样本均值的分布 …… 104

6.2.2　χ^2 分布 …… 104

6.2.3　t 分布 …… 106

6.2.4　F 分布 …… 108

习题 6 …… 109

第 7 章　参数估计 …… 112

§7.1　参数的点估计 …… 112

7.1.1　矩估计法 …… 113

7.1.2　最大似然估计法 …… 114

§7.2　估计量的评选标准 …… 118

7.2.1　无偏性 …… 118

7.2.2　有效性 …… 120

7.2.3　一致性 …… 121

§7.3　区间估计 …… 121

7.3.1　区间估计的基本概念 …… 121

7.3.2　正态总体均值的置信区间 …… 123

7.3.3　正态总体方差的置信区间 …… 124

习题 7 …… 126

第 8 章　假设检验 …… 129

§8.1　假设检验的基本概念 …… 129

§8.2　正态总体均值的假设检验 …… 131
8.2.1　单个正态总体均值的检验 …… 131
8.2.2　两个正态总体均值的检验 …… 135
§8.3　正态总体方差的假设检验 …… 137
8.3.1　单个正态总体方差的检验 …… 137
8.3.2　两个正态总体方差的检验 …… 139
§8.4　分布函数的拟合检验 …… 141
习题 8 …… 144

第 9 章　方差分析 …… 149

§9.1　单因素试验的方差分析 …… 149
9.1.1　单因素试验方差分析的数学模型 …… 150
9.1.2　平方和分解　方差分析 …… 151
§9.2　双因素试验的方差分析 …… 154
9.2.1　无交互作用的双因素试验的方差分析 …… 154
9.2.2　有交互作用的双因素试验的方差分析 …… 158
习题 9 …… 162

第 10 章　回归分析 …… 164

§10.1　一元线性回归 …… 165
10.1.1　回归方程 …… 165
10.1.2　最小二乘估计 …… 166
10.1.3　回归方程的显著性检验 …… 167
10.1.4　预测与控制 …… 170
§10.2　一元非线性回归 …… 172
§10.3　多元线性回归 …… 175
10.3.1　多元线性回归模型 …… 175
10.3.2　显著性检验 …… 177
习题 10 …… 179

习题答案与提示 …… 182

附表 …… 194

主要参考文献 …… 209

第1章

随机事件及其概率

概率论是研究随机现象及其统计规律性的数学分支.随机事件及其概率是概率论中的两个基本概念.本章讨论的随机事件及其关系和运算,概率的定义、性质和计算是概率论的基本问题之一.

§1.1 随机事件

1.1.1 随机试验与样本空间

在自然界和人类社会活动中,人们观察到的现象大体可分为两种类型,一类是可事先预言的,如松开捏着硬币的手,硬币确定地向地面掉去;在标准大气压下,纯净水加热到 100℃必然沸腾.这类在一定条件下必然发生的现象,我们称之为**确定性现象**或**必然现象**.另一类现象是事先不可预言的,如松开手时,我们却不可能确定掉在地上的硬币是正面朝上,还是反面朝上.同样,沸腾了的水中,某个水分子的运动速度、运动方向、运动轨迹等却不得而知.虽然无法预先知道落地的硬币是正面朝上还是反面朝上,但历史上曾有不少人作过抛掷硬币的试验.试验结果表明,在大量的重复试验中,一枚均匀的硬币,正面朝上和反面朝上的次数接近相等,而且试验的次数越多,两种结果就越接近相等.同样,加热中的每个水分子的运动方向、速度、轨迹等是不确定的,但大量的分子运动的结果却在温度、压强等宏观表现上呈现出其规律性,这种规律性称为**统计规律性**.

在一定的条件下可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,但在大量重复试验或观察下,其结果却呈现统计规律性的现象,我们称之为**随机现象**.

概率论和数理统计就是研究随机现象及其内在统计规律性的一门数学学科.

概率论与数理统计的理论与方法有着很广泛的应用,几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产、国民经济的各个部门以及人们的日常生活中.

在一定条件下对自然和社会现象进行观察和实验称为试验,满足以下条件的试验称为**随机试验**.

(1) 在相同的条件下,试验可以重复进行.

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但其所有的可能结果事先是知道的.

(3) 在试验结果出现之前,不能确定哪一个结果会出现.

本书中我们所指的试验都是随机试验,用 E 表示.

随机试验所有可能出现的结果组成一个集合,我们把这个集合称为这个试验的**样本空间**,记作 Ω. 组成样本空间 Ω 的每个元素,称为**样本点**或**基本事件**,记作 ω.

设 E_1 为试验"投掷一枚硬币,考察其正面朝上还是反面朝上",用"正"表示正面朝上,"反"表示反面朝上,于是对应于 E_1 的样本空间为

$$\Omega_1=\{正,反\}.$$

设 E_2 为试验"掷两枚硬币,依次考察其朝上的是正面还是反面",类似于 E_1,对应于 E_2 的样本空间为

$$\Omega_2=\{正正,正反,反正,反反\}.$$

设 E_3 为试验"掷两枚硬币,考察其正面朝上的个数",分别用数字 0,1,2 表示出现正面的相应个数,则对应于 E_3 样本空间为

$$\Omega_3=\{0,1,2\}.$$

设 E_4 为试验 "投掷一枚骰子,考察其朝上的那一面的点数",则对应于 E_4 的样本空间为

$$\Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

设 E_5 为试验"某电话交换台,在某一时段内接到电话呼唤的次数",则对应的样本空间由所有非负整数组成,即

$$\Omega_5=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

设 E_6 为试验"某种灯泡的使用寿命",对应于 E_6 的样本空间为

$$\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

给出试验的样本空间,是描述随机现象的第一步,问题不同,样本空间就不同. 值得注意的是,相同的试验,由于研究目的不同,其样本空间也不一样,如 Ω_2 和 Ω_3. 也就是说,样本空间的样本点一般取决于随机试验和它的研究目的.

1.1.2 随机事件及其运算

设 E 为随机试验,Ω 为其样本空间,我们称 Ω 的子集为**随机事件**,简称**事件**,一般用大写字母 A,B,C 等来表示.

在试验中事件 A 发生,当且仅当它所包含的一个样本点出现.

如上述例子中投掷一枚骰子的试验 E_4,样本空间为 $\Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\}$,子集

$A=\{1,3,5\}$和子集$B=\{2,4,6\}$均为事件，事件A也可以称为“掷出奇数点”的事件，事件B也可以称为“掷出偶数点”的事件.

样本空间Ω和不含任何样本点的空集$\varnothing$也是事件，按事件发生的定义，事件Ω在每次试验中必然发生，故称其为**必然事件**；类似地，空集$\varnothing$作为一个事件，在每次试验中都不可能发生，故称其为**不可能事件**. 为了方便讨论，我们将它们作为随机事件的两个极端情形与其它事件统一加以处理.

既然事件是样本点的集合，因此和集合一样，事件间也有各种关系和运算. 下面讨论事件间的关系及事件的运算.

1. 包含关系

若事件A中的每一个样本点都是事件B的样本点，则称事件B**包含**事件A，记为$B\supset A$或$A\subset B$. 显然$B\supset A$的含义是事件A发生必然导致事件B发生.

仍以上述试验E_4为例，设事件C为朝上的那一面的点数不超过5的事件，即$C=\{1,2,3,4,5\}$，而$A=\{1,3,5\}$，因此$A\subset C$.

显然，对任何事件A，必有$\Omega\supset A\supset\varnothing$.

对于事件A和B，如果有$A\subset B$和$B\supset A$同时成立，则称事件A与B**相等**，记为$A=B$.

2. 事件的并

由事件A和事件B的所有样本点组成的事件，称为事件A与事件B的**并**，记为$A\cup B$. 事件$A\cup B$就是事件A与事件B至少有一个发生的事件.

例如，事件$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,3,5\}$，则事件$A\cup B=\{1,2,3,5\}$.

如事件$A\supset B$，则$A\cup B=A$. 显然，对任何事件A，必有$A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\varnothing=A$.

n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$至少有一个发生的事件记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，同时，定义可列个事件的并事件为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

3. 事件的交

由事件A和事件B所共有的样本点所组成的事件称为事件A与事件B的**交**，记为$A\cap B$或AB. 事件AB就是事件A与事件B同时发生的事件.

例如，试验E_4中，“掷出奇数点”的事件$A=\{1,3,5\}$与事件“掷出点数大于2”的事件$D=\{3,4,5,6\}$的交事件为$A\cap D=\{3,5\}$.

如事件$A\supset B$，则$A\cap B=B$. 显然，对任何事件A，必有$A\cap\Omega=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生的事件记为$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，定义可列个事件的交事件为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

4. 互不相容事件

如果事件 A 和事件 B 不含相同的样本点,即 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B **互不相容**. 事件 A 与事件 B 互不相容就是事件 A 与事件 B 不能同时发生.

显然,基本事件之间是互不相容的.

5. 事件的差

由属于 A 但不属于 B 的所有样本点所组成的事件,称为事件 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$. 事件 $A-B$ 就是事件 A 发生但事件 B 不发生的事件.

6. 对立事件

样本空间 Ω 与事件 A 的差 $\Omega-A$,称为事件 A 的**对立事件或逆事件**,记为 $\overline{A}$. 事件 $\overline{A}$ 就是事件 A 不发生的事件. 对每次随机试验,事件 A,$\overline{A}$ 必有一个发生.

事件 A 与 B 的差可表示为 $A-B=A\cap\overline{B}=A-AB$.

设 A 为任意事件,显然有 $A\cap\overline{A}=\varnothing$,$A\cup\overline{A}=\Omega$,$\overline{\overline{A}}=A$,$\overline{\Omega}=\varnothing$,$\overline{\varnothing}=\Omega$.

由于事件是样本空间的一个子集,所以事件间的关系与运算自然完全符合集合的关系与运算,这些关系和运算也可用维恩(Venn)图来表示,如图 1.1 所示 . 重要的是我们要学会用概率论的语言来描述这些关系与运算,并且会用这些运算与关系来表示各种事件.

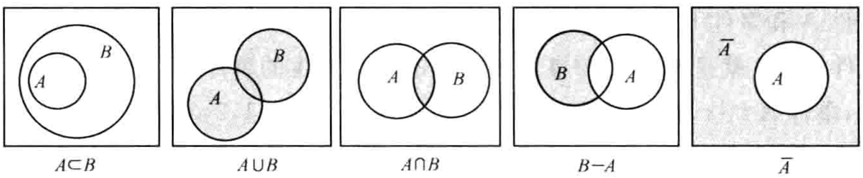

图 1.1 事件的关系和运算

与集合的运算一样,事件的运算满足下列运算律.

(1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A.$$

(2) 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

(3) 分配律

$$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC),$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

(4) 德·摩根(De Morgan)律(对偶律)

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

对于有限个或可列个事件,德·摩根律也成立,即

$$\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k \overline{A_k},\quad \overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k \overline{A_k}.$$

例 1.1 设 A,B,C 为 3 个事件,则

(1) A 与 B 都发生而 C 不发生的事件可以表示为

$$AB\overline{C} \text{ 或 } AB-C \text{ 或 } AB-ABC.$$

(2) A,B,C 恰好有一个发生的事件可表示为

$$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C.$$

(3) A,B,C 中至少有一个发生的事件可表示为

$$A\cup B\cup C$$

或表示为 7 个互不相容事件的并的形式

$$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC.$$

(4) A 发生而 B 与 C 都不发生的事件可表示为

$$A\overline{B}\overline{C} \text{ 或 } A-B-C \text{ 或 } A(\overline{B\cup C}).$$

(5) A,B,C 都发生的事件可表示为

$$ABC.$$

(6) A,B,C 恰好有两个发生的事件可表示为

$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC.$$

§ 1.2 随机事件的概率

1.2.1 频率 概率的统计定义

在研究随机现象时,我们首先要了解可能出现哪些事件,其次是研究各种事件发生的可能性大小.随机事件发生的可能性大小始终受其内部隐蔽的统计规律性支配,它是可以度量的.

在随机试验 E 中,事件 A 可能发生,也可能不发生.在相同的条件下,对随机试验 E 进行 n 次重复,事件 A 发生的次数称为事件 A 发生的**频数**,记为 n_A,称 $f_n(A)=n_A/n$ 为随机事件 A 在这 n 次试验当中发生的**频率**.

历史上曾有不少人做过抛掷硬币的试验,事件 A 为正面朝上,其结果如表 1.1 所示.

表 1.1 抛掷硬币的试验及结果

试验者	n	n_A	$f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

上面的试验证实,在大量重复试验中,均匀硬币出现正面的频率总在 1/2 的附近波

动,抛掷的次数越多,其波动的幅度就越小.

同一事件 A 在不同的重复试验中,频率是不同的.但实践表明,当试验次数 n 逐渐增大时,频率将呈现其稳定性.也就是说,频率 $f_n(A)=n_A/n$ 总在一个确定的正数 p 附近波动,并且当 n 逐渐增大时,这种波动的幅度逐渐地减小.我们把这个频率的稳定值 p 称为事件 A 发生的**概率**,记为 $P(A)$.这样定义事件的概率,通常称为**概率的统计定义**.

容易证明,对于任意事件 A 的频率具有下列性质.

(1) 非负性:$f_n(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性:$f_n(\Omega)=1$.

(3) 可加性:若 $A\cap B=\varnothing$,则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

1.2.2 古典概型

下面我们来讨论一类最简单的随机试验,它具有下列两条基本性质.

(1) 在试验中它的全部可能结果只有有限个,即其样本空间为有限集

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

(2) 基本事件$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$发生是等可能的,即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})=\frac{1}{n}.$$

由于这类试验是概率论发展初期的主要研究对象,因此把这类试验的数学模型称为**古典概型**或**等可能概型**.古典概型的一些概念具有直观、容易理解的特点,在概率论中占有重要的地位.

以下我们来讨论古典概型下的事件概率的计算.

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,并且每个基本事件发生是等可能的.设事件 A 包含 $k(k\leqslant n)$个样本点,定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}.$$

按这种方法来定义概率称为概率的古典定义.它是由法国数学家拉普拉斯(Laplace)在 1812 年给出的.

例 1.2 设有编号为 1,2,…,30 的考签,一学生任意抽一张考签进行考试,求学生抽到前 10 号考签这一事件的概率.

解 由于学生抽到任一考签的可能性是一样的,所以这是一个古典概型问题. 设 A 为"学生抽到前 10 号考签"的事件,样本点总数为 30,事件 A 包含的样本点数为 10,故所求概率为

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

例 1.3 盒子内有标号为 0～9 的 10 个球,随机从中任取 3 个球,求

(1) 取到的 3 个球的号码含有 9 的概率;

(2) 取到的 3 个球号码都为奇数的概率.

解　样本空间包含的样本点总数为 10 个球中取 3 个球的组合 $C_{10}^3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$.

(1) 设 A 为事件"取到的 3 个球的号码含有 9"，A 所包含的样本点数为 $C_9^2=36$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_9^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}.$$

(2) 设 B 为事件"取到的 3 个球号码都为奇数"，B 所包含的样本点数为 $C_5^3=10$，故所求概率为

$$P(B)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}.$$

例 1.4　将 15 名学生随机地平均分成三组，这 15 名学生中有 3 名女生，12 名男生，试求

(1) 每组各分到一名女生的概率；

(2) 3 名女生分配在同一组的概率.

解　将 15 名学生平均分成三组的分法总数，即样本点总数为

$$C_{15}^5C_{10}^5C_5^5=\frac{15!}{5!\times10!}\times\frac{10!}{5!\times5!}\times\frac{5!}{5!}=\frac{15!}{5!\times5!\times5!}.$$

(1) 设 A 为事件"每组各分到一名女生". 将 3 名女生分到 3 个组每组各一名的分法数为 $3!$，12 名男生平均分配在 3 个组的分法数为 $C_{12}^4C_8^4C_4^4=\frac{12!}{4!\times4!\times4!}$，于是 A 所包含的样本点总数为 $3!C_{12}^4C_8^4C_4^4=\frac{3!\times12!}{4!\times4!\times4!}$，故

$$P(A)=\frac{3!C_{12}^4C_8^4C_4^4}{C_{15}^5C_{10}^5C_5^5}=\frac{3!\times12!}{(4!)^3}\times\frac{(5!)^3}{15!}=\frac{25}{91}.$$

(2) 设 B 为事件"3 名女生分配在同一组". 将 3 名女生分配在同一组的分法数为 3，而在这 3 种的每种分法下其余 12 名男生的分法(一个组为两名，另两个组各 5 名)数为 $C_{12}^5C_7^5C_2^2=\frac{12!}{2!\times5!\times5!}$，于是 B 所包含的样本点数为 $3C_{12}^5C_7^5C_2^2=\frac{3\times12!}{2!\times5!\times5!}$，故

$$P(B)=\frac{3C_{12}^5C_7^5C_2^2}{C_{15}^5C_{10}^5C_5^5}=\frac{3\times12!}{2!\times5!\times5!}\times\frac{(5!)^3}{15!}=\frac{6}{91}.$$

例 1.5　将 n 个球随机地放入 $N(N\geqslant n)$个格子中，试求

(1) 某指定的 n 个格子中各有一球的概率；

(2) 恰有 n 个格子中各有一球的概率；

(3) 第一格子无球的概率.

解　这是一个古典概型问题. 由于每个球可放入 N 个格子中的任一个，所以 n 个球放入 N 个格子中的不同方法数为 N^n，即样本空间共有 N^n 个样本点.

(1) 设 A 为事件"某指定的 n 个格子中各有一球"，故事件 A 所包含的样本点数为 n 个球在所指定的那 n 个格子中的全排列 $n!$，于是

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$