依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學教科書

平面幾何學

胡敦復 榮方舟編著

商務印書館發行

平面幾何學

緒　論

§1. **幾何學之目的**　學者於幾何學,在初中已涉獵得其大概.然常有"幾何學究有何用"之疑問.蓋幾何學所論者爲虛空圖形,不着實際,故其爲用不著.夫吾人之思想必須整理,猶筋肉之必須操練然.體操之爲用,盡人知之.在操場上作一小時之步行,結果未出操場一步.蓋其目的固不在乎路程之走得而在乎筋肉之操練.幾何之爲用亦然.在課室中作一小時之習題,結果並無何等實用.蓋其目的亦不在乎問題之解決而在乎思想之整理.顧筋肉之操練易,思想之整理難.因思想爲空虛的,必有所依着,方可作有秩序之練習.幾何學實爲整理吾人思想之唯一工具.依據圖形,推求眞理,以整理吾人之思想,使有條不紊,此幾何學之主要目的也.

§2. **幾何學之要素　體面線點**　幾何學爲研究圖形之學.圖形之要素,不外乎體,面,線,點.學者於初中幾何已習知之.茲不嫌重複再分別述之.

空間有限部分曰體 (solid).體有形象,有大小,有位置.但非實

質,故與物體不同.物體於形象之外尙有性質,有色有味,或堅或柔.幾何中所謂體,則舍形象、大小、位置外,絕無他物.體有三個向度(dimensions),爲長(length),廣(breadth)及高(height).

體之分界曰面(surface).面有兩個向度,爲長及廣.面無高,故面不占有空間位置.

面之分界曰線(line).線有一個向度,爲長

線之分界曰點(point).點無向度.

體,面,線,點,或分或合,統稱曰圖形(figure).

試就運動觀察體、面、線、點之關係.點在空間只有位置而無向度.設點在空間移動,從一個位置移至他一位置,其所經空間之跡,便有一個向度,長.故點移動成線.線有一個向度,若在空間移動,則其所經空間之跡,便又添一向度,廣.故線移動成面.面若在空間移動,則其所經空間之跡,便又添一向度,高.故面移動成體.體占有了空間一部分,設體之三個向度遞減,減小至無,此時已不復有向度即已不復占有空間部分.然其位置固仍存在.此即所謂點也.

§3. **定義** 用特殊名詞表特殊圖形曰定義(definition).

§4. **定義一 直線 曲線** 固定一線上任意兩點之位置將此線旋轉.若此全線之位置一無改變,則此線曰**直線**(straight line).一線中無一部分爲直線者曰**曲線**(curve).

直線常簡稱曰線.故以下若但云線時,常指直線而言.

§5. **定義二 平面 曲面** 過面中任意兩點之直線若全在此面中,則此面曰**平面** (plane). 一面無一部分爲平面者曰**曲面** (curved surface).

§6. **定義三 半射線 線分 折線** 一端有界,一端無界之直線部分曰**半射線** (half lay). 半射線一端之界曰**原點** (origin). 兩端均有界之直線部分曰**線分** (line-segment). 諸線分連接所成之非直線曰**折線** (broken line).

§7. **定義四 角** 共一原點之兩半射線分此兩半射線所在之平面爲兩部分,此各部分皆曰**角** (angle). 兩半射線曰角之**兩邊** (side). 所共原點曰角之**頂點** (vertex). 試就運動觀察半射線與角之關係. 設一半射線固定其原點在平面中旋轉,從一個位置轉至他一位置,其所經平面上之迹便是角. 半射線不占有平面,角則占有平面一部分. 設一角之頂點不動,而減少其所占平面部分,減至於無,此時角之兩邊合而爲一,即爲一半射線.

§8. **線分大小之比較 角大小之比較** 線分與角爲幾何學中兩個重要之量. 凡同類量可比較大小. 故兩線分可比較大小,兩角可比較大小. 幾何學中關於量之比較,重直接,常不假助於單位設有甲乙兩線分欲比較其孰大孰小.將甲合置於乙上,使甲之第一端合於乙之第一端,然後視察其第二端之關係.若甲之第二端亦合於乙之第二端,則此二線分相等. 若甲之第二端在乙之外,則甲大

於乙.若甲之第二端在乙之內,則甲小於乙.設有甲乙兩角,欲比較其孰大孰小.將甲之頂點合於乙之頂點上,且令其一邊相重,然後觀察其第二邊之關係.若甲之第二邊亦合於乙之第二邊上,則此二角相等.若甲之第二邊在乙之外,則甲大於乙.若甲之第二邊在乙之內,則甲小於乙.

§9. **合同圖** 兩個圖形,位置不同.然當第一圖形移置於第二圖形上,而二圖能完全密合時,則此二圖曰合同圖 (congruent figures).

合同圖亦稱全等形.合同圖之重合部分曰對應部分.等線分及等角皆爲合同圖.

§10. **公理** 凡公衆認爲眞確而毫無疑義之眞理無待證明者曰公理 (axiom).

公理分二類 不專屬於幾何圖形的公理曰普通公理 (general axiom).專屬於幾何圖形的公理曰幾何公理 (geometric axiom)

§11. **普通公理**

1. 全量等於其各部分之和;全量比其任何一部分大.
2. 等量加等量,和相等
3. 等量減等量,差相等
4. 等量的同倍數量相等.
5. 等量的同分數量相等.

6. 不等量加等量和不等,原大者和亦大.

7. 不等量減等量差不等,原大者差亦大.

8. 等量減不等量差不等,所減者大差小

9. 不等量之同倍數量不等,大量之倍量大.

10. 不等量之同分數量不等,大量之分量大.

11 若甲量大於乙量,乙量大於丙量,則甲量大於丙量

12. 若甲量大於乙量,丙量大於丁量,則甲、丙二量之和大於乙、丁二量之和.

13. 若甲量大於乙量,丙量小於丁量,則甲量減丙量之差大於乙量減丁量之差.

14. 等式中任何量以其等量代之,此等式依舊成立(等於等量之量相等).

15. 不等式中任何量以其等量代之,此不等式依舊成立.

16. 諸量相加,若改換其加時先後次序,其和不變.

17. 甲乙二量比較大小,或甲大於乙,或甲等於乙,或甲小於乙,三者必居其一.

§12. 幾何公理

一. 圖形可不變其形象大小而任意變其位置.

二. 合同圖之量必相等.

三. 過二點之直線有一無二.由此更可推得數事:

(a) 二直線有二點重合或有一部分重合,則此二直線完全重合

(b) 疊置二直線可令全線相合,且令各線上之任意一點相合

(c) 二直線只能交於一點.

四. 二點在一平面之兩旁,則其聯線必與此平面相交.

五. 在一平面內,二點在一直線之兩旁,則其聯線必與此直線相交.

六. 線分爲其兩端間之最短路徑.

幾何公理,不止以上數條.以後隨時添補.

§13. **定理** 根據定義、公理等已認爲眞確之事而證明之眞理曰定理.(theorem).

定理常分爲二部分.一曰假設 (hypothesis), 一曰終決 (conclution).假設者,假定已知眞確之事.終決者從假設根據公理或已證明之定理可證其爲眞確之事也.

§14 **系** 從已證明之定理略加推想,即可斷定爲眞確之定理曰系 (corollary).

§15. **幾何學之分類** 專論同一平面中各圖形者曰平面幾何學 (plane geometry), 不專論同一平面中各圖形者曰立體幾何學 (solid geometry).

§16. **圖形之表法** 凡點常以 A, B, C …等大體字母表之.

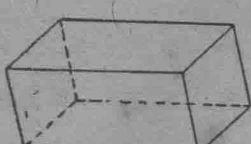
直線.半射線,線分皆以二點表之,即連書二個大字母如 AB, AC, BC ⋯⋯等.直線可寫其上任意二點.半射線以一原點及其上任意又一點表之.線分以兩端點表之.角以頂點冠以 $\angle$ 號表之,如 $\angle A$, $\angle B$ ⋯等.有時數角共一頂點時,則須連書三字母冠以 $\angle$ 號以資區別,如 $\angle BAC$,其中 A 爲頂點; B, C 爲二邊上各任意一點.其他圖形之表法,下文隨時添註.

§17. **語言之符號** 凡常用之語言,爲敍述簡單計,以符號代替如下:

語言	等於	大於	小於	不等於	不大於	不小於	幾等於	
符號	$=$	$>$	$<$	$\neq$	$\ngtr$	$\nless$	$\doteq$	
語言	合同於即全等於	相似於	加	減	因	故	平行	不平行
符號	$\cong$	$\backsim$	$+$	$-$	$\because$	$\therefore$	$\parallel$	$\nparallel$
語言	平行且等於	垂直	即爲所求	即爲所證				
符號	$\stackrel{\parallel}{=}$	$\perp$	Q. E. F	Q. E. D.				

習題一

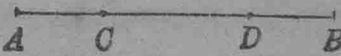
1. 直方體有多少面,多少線,多少點?
2. 圓柱體有多少面,多少線,多少點?



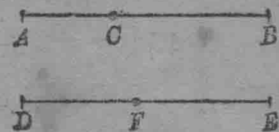
長方體

圓柱體

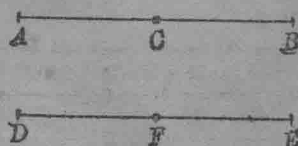
3. 線分 AB 上有 C,D 兩點. 若 $AC=DB$, 則 $AD=CB$. 此理合於普通公理第幾條?



4. 已知圖中 $AB=DE$, 又知 $AC<DF$. 則 CB, FE 之比較如何? 且述其根據.

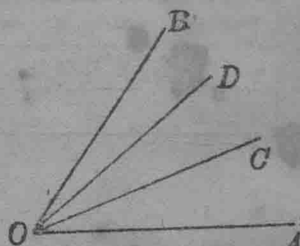


5. 已知圖中 $AB=DE$, 又知 $AC=CB$, $DF=FE$. 則 AC, DF 之比較如何? 何故?



6. 已知 $\angle AOD>\angle COB$, 則 $\angle AOC>\angle DOB$. 何故?

7. 若 $\angle AOC>\angle COD$, $\angle COD>\angle DOB$, 則 $\angle AOC>\angle DOB$. 何故?



8. 線分 AB 上有 M,N 二點. 若已知 $AM=MB$, 試說明 $AN>NB$.

第一編　直線形

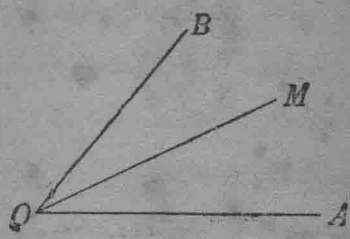
第一章　線分與角

§ 18.　**定義五　中點**　分一線分爲相等兩份之點曰此線分之中點(mid-point).

線分 AB 上一點 M. 若 $AM=MB$, 則 M 爲 AB 之中點.

§ 19.　**定義六　等分線**　分一角爲相等兩份之半射線曰此角之等分線 (bisector).

$\angle AOB$ 中一半射線 OM. 若 $\angle AOM=\angle MOB$, 則 OM 爲 $\angle AOB$ 之等分線

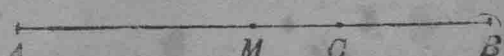


§ 20.　**幾何公理**

七.　一線分必有一中點.

八.　一角必有一等分線

§ 21.　**定理一**　一線分只有一中點.



〔假設〕 M 爲 AB 之中點，C 爲 AB 上其他任意一點.

〔終決〕 C 非 AB 之中點.

〔證〕 設 C 在 MB 上

則 $AC>AM$ (全量比其任何一部分大)

∵ $AM=MB$ (假設，定義五).

∴ $AC>MB$ (不等式中任何量以其等量代入，此不等式依舊成立)

然 $MB>CB$ (全量比其任何一部分大).

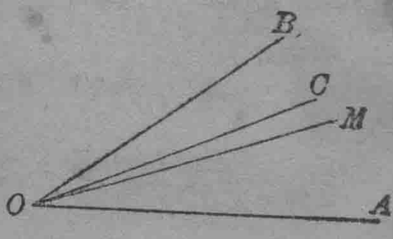
∴ $AC>CB$ (甲量大於乙量，乙量大於丙量，則甲量大於丙量).

故 C 非 AB 之中點. $Q.E.D.$

(若 C 在 AM 上，學者試自證之)

§ 22. **定理二** 一角只有一等分線.

〔假設〕 OM 爲 $\angle AOB$ 之等分線. OC 爲 $\angle AOB$ 內其他任意一半射線.



〔終決〕 OC 非 $\angle AOB$ 之等分線.

〔證〕 設 OC 在 $\angle MOB$ 內，

則 $\angle AOC>\angle AOM$ (全量比其任何一部分大).

∴ $\angle AOM=\angle MOB$ (假設，定義六).

∴　$\angle AOC > \angle MOB$　(不等式中任何量以其等量代入，此不等式依舊成立).

然　$\angle MOB > \angle COB$　(全量比其任何一部分大).

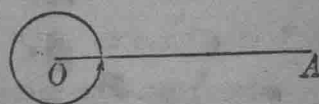
∴　$\angle AOC > \angle COB$　(甲量大於乙量，乙量大於丙量，則甲量大於丙量).

∴　OC 非 $\angle AOB$ 之中點.　Q. E. D.

(若 OC 在 $\angle AOM$ 內，學者試自證之).

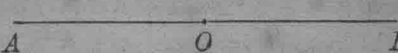
§23.　**定義七　周角**　包含完全平面之角曰周角 (perigon).

設固定半射線 OA 之原點 O，而將 OA 旋轉一周，仍至 OA 原位置. 如此所成之角卽周角.



§24.　**定義八　相屬角**　一周角所分成之二角曰互爲相屬角 (conjugate angles).

§25.　**定義九　直線角**　二邊成一直線之角曰直線角 (straight angle).



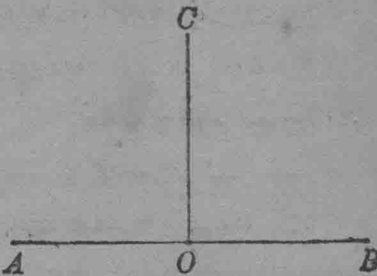
直線 AB 上作一點 O.

OA, OB 視爲角之邊，O 爲頂點. 如是所成之上下二相屬角，皆爲直線角. 簡記爲 $st\angle$.

§26.　**定義一〇　優角　劣角**　大於直線角之角曰優角 (major angle). 小於直線角之角曰劣角 (minor angle).

從一點引二半射線,常成優劣二角,若但稱曰角,常指劣角而言.

§ 27. **定義一一 直角** 直線角之半曰直角(right angle).



在 $st\angle AOB$ 中作一等分線 OC, 則 $\angle BOC$, $\angle COA$ 皆爲直角. 簡寫作 $R\angle$.

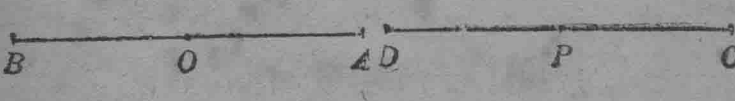
§ 28. **定義一二 鈍角 銳角** 大於直角之角曰鈍角(obtuse angle). 小於直角之角曰銳角 (acute angle).

§ 29. **定義一三 補角 餘角** 二角之和爲一直線角時,則此二角曰互爲補角 (supplement angles). 二角之和爲一直角時,則此二角曰互爲餘角 (complement angles).

§ 30. **定義一四 鄰角** 有二角,共有頂點又共有一邊,且分居於此共有邊之兩旁,則此二角曰互爲鄰角 (adjacent angles).

§ 31. **定義一五 對頂角** 二直線相交,其不爲鄰角之二角曰互爲對頂角 (vertical angles).

§ 32. **定理三 凡直線角皆相等.**



〔假設〕 $\angle AOB, \angle CPD$ 皆爲 $st\angle$.

〔終決〕 $\angle AOB = \angle CPD$.

〔證〕 移置 $\angle AOB$ 至 $\angle CPD$ 上令 OA 與 PC 相重, O 合於 P〔幾何公理三 (b)〕 則因 $\angle AOB, \angle CPD$ 皆爲直線角, 卽 AOB, CPD 皆爲直線, 故 OB 與 PD 亦相重合〔幾何公理三 (a)〕. 故 $\angle AOB, \angle CPD$ 爲合同圖.

$$\therefore \angle AOB = \angle CPD \quad \text{(幾何公理二)} \qquad Q.E.D.$$

§33. **系一** 凡直角皆相等.

§34. **系二** 等角之補角相等.

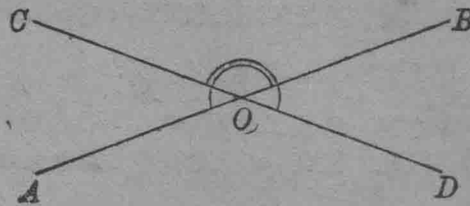
§35. **系三** 等角之餘角相等.

§36. **系四** 二直線相交成四個角,若其中一個爲直角,則其他三個均爲直角.

§37 **系五** 一周角等於二直線角;一直線角等於二直角;一周角等於四直角.

§33. **定義一六 垂線 斜線** 二直線相交成直角時,此二直線曰互爲垂線 (perpendiculars), 亦曰互相垂直, 或互相直交. 二直線相交成非直角時, 則此二直線曰互爲斜線 (oblique lines), 亦曰互相斜交. 其交點曰足 (foot). 垂線之交點曰垂足 (foot of perpendicular).

§39. **定理四** 對頂角相等.



〔假設〕 $\angle AOC$, $\angle BOD$ 爲對頂角.

〔終決〕 $\angle AOC = \angle BOD$.

〔證〕 $\angle AOC$, $\angle BOD$ 爲對頂角, 卽 AOB, COD 皆爲直線.

$\therefore$ $\angle AOB$, $\angle COD$ 皆爲 st.$\angle$. $\therefore$ $\angle AOB = \angle COD$(定理三).

$\therefore$ $\angle AOB - \angle BOC = \angle COD - \angle BOC$ (普通公理 3).

卽 $\angle AOC = \angle BOD$. Q. E. D.

第二章 三角形

§40. **定義一七 多角形** 諸線分相接圍成之形曰多角形(polygon). 此各線分曰多角形之邊(side). 相接兩邊所成之角曰多角形之角(angle). 各角之頂點曰多角形之頂點 (vertex) 一邊及其相接邊延線所成之角曰多角形之外角 (exterior angle). 不共一邊的兩頂點所聯線分曰多角形之對角線(diagonal) 諸邊之和曰多角形之周(perimeter).

有 n 個角的多角形就叫做 n 角形(n-gon).

多角形之各角皆爲劣角時, 此多角形曰凸多角形 (convex polygon). 多角形之各角中有優角時,此多角形曰凹多角形 (concave polygon).

凡凸多角形常簡稱曰多角形.故以下凡但稱多角形時,常指凸多角形而說.

多角形之最簡單者爲三角形, 三角形有三邊, 三角及三雙外角.三角形無對角線.

§41. **定義一八 三角形之高與底** 從三角形頂點至對邊或對邊之延線所作垂線曰三角形之高 (altitude) 其對邊曰三角形

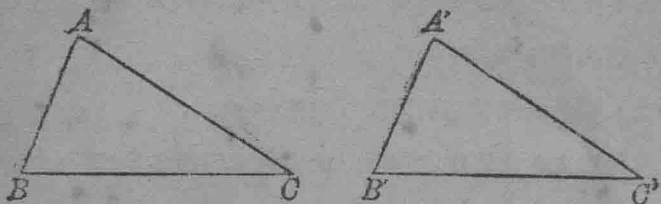
之底 (base).

§42. **定義一九　三角形之中線**　三角形頂點及其對邊中點所聯線分曰三角形之中線 median.

§43. **定義二〇　三角形之等分角線**　三角形角之等分線在形內部分曰三角形之等分角線 (angle-bisector)

三角形有三個高,三個中線,三個等分角線.

s.a.s. §44. **定理五**　兩三角形中,一三角形之兩邊及其所夾之角,各等於又一三角形之兩邊及其所夾之角,則此兩三角形爲合同圖.



〔假設〕 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$

〔終決〕 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

〔證〕 移置 $\triangle ABC$ 於 $\triangle A'B'C'$ 上,令 A 與 A' 合, AB 與 $A'B'$ 相重.則因 $\angle A=\angle A'$, $\therefore$ AC 與 $A'C'$ 亦相重.又 $\because$ $AB=A'B'$, $\therefore$ B 與 B' 合. $\because$ $AC=A'C'$, $\therefore$ C 與 C' 合.故 $\triangle ABC$ 之三個頂點 A,B,C 皆與 $\triangle A'B'C'$ 之三個頂點 A',B',C' 合,而三邊亦合.

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$　　Q. E. D.

〔註〕 本定理常簡寫爲 $s.a.s=s.a.s.$