普通高等教育“十二五”规划教材
工 科 数 学 精 品 丛 书

概率论与数理统计学习指南

刘吉定　罗　进　杨向辉　主编

科 学 出 版 社

普通高等教育“十二五”规划教材
工科数学精品丛书

概率论与数理统计学习指南

刘吉定　罗　进　杨向辉　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是与《概率论与数理统计及其应用》(第三版)配套的辅助教材，也可与其他概率论与数理统计教材配套使用.全书内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析.各章分为内容提要、题型归类与解题方法、习题及解答三大部分.书中所选习题具有代表性、题型多样、覆盖面广、解答详细.

本书可供高等学校(非数学专业)理、工科各专业作为教材使用，也适合概率论与数理统计课程的教研者、学习者和考研者使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指南/刘吉定，罗进，杨向辉主编.—北京：科学出版社，2015.1

(工科数学精品丛书)

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-042694-9

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①刘… ②罗… ③杨… Ⅲ. 概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 284871 号

责任编辑：王雨舸/责任校对：肖 婷

责任印制：高 嵘/封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2014 年 12 月第 一 版 印张：14 1/4

2014 年 12 月第一次印刷 字数：276 000

定价：32.50 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

概率论与数理统计是高等学校理工科和经管类学生的必修课程，是全国硕士研究生入学考试数学科目的必考内容之一.概率论与数理统计不仅是学习后续数学课程和专业课程的必备基础课程，也是自然科学和工程技术领域中的一种重要数学工具，它在培养学生的计算能力、逻辑推理能力和抽象思维能力方面起着十分重要的作用.然而，概率论与数理统计课程具有内容丰富、习题类型多、技巧性强、应用广泛等特点，而教学时数有限，很多内容和方法不能在课堂教学内完成，这就要求学生不仅要在课堂内系统学习其基本概念和理论，还需要在课外进行大量的自学与练习以熟练掌握解题方法与技巧.

为了使理工科和经管类本科生能较深刻地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论和解题方法与技巧，同时，为了给考研复习的本科生提供参考资料，给讲授概率论与数理统计课程的高校教师提供教学参考书，我们根据长期的概率论与数理统计课程教学实践，参考了多种概率论与数理统计教材和复习资料，按照《概率论与数理统计及其应用》(第三版)(刘吉定、罗进、严国义主编，科学出版社出版)的框节结构和顺序，编写了本书.该书信息量大，收集并解答了通行教材和辅导书上的习题.每章具体内容如下：

(1) 内容提要.简要介绍每一章的基本概念、基本理论和基本方法.

(2) 题型归类与解题方法.精选了一批典型习题进行归类分析与解答，并对解题方法给予点评.

(3) 习题及解答.每章给出了适量习题及详细解答，供读者自测.

参加本书编写工作的有刘吉定、罗进、杨向辉、彭章艳、孙艳军等.第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章、第 8 章由刘吉定编写，第 5 章由罗进编写，第 6 章由杨向辉编写，第 7 章由彭章艳编写，全书由刘吉定统稿.

本书的编写得到了相关教学管理部门的大力支持，科学出版社的编辑为本书的出版给予了热情的支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢.

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指教.

编　者
2014 年 10 月

目　录

第1章　随机事件与概率 …… 1
1.1　内容提要 …… 1
1.1.1　基本内容 …… 1
1.1.2　重点与难点 …… 6
1.1.3　疑难解答 …… 6
1.2　题型归类与解题方法 …… 7
1.2.1　样本空间与随机事件 …… 7
1.2.2　古典概型与几何概型的计算 …… 8
1.2.3　利用事件的关系和概率性质进行计算(证明) …… 11
1.2.4　利用加法与乘法公式及条件概率计算概率 …… 14
1.2.5　利用全概率公式与Bayes公式计算概率 …… 17
1.2.6　利用独立性及伯努利概型计算概率 …… 20
1.3　习题及解答 …… 23
1.3.1　习题 …… 23
1.3.2　习题解答 …… 26
第2章　随机变量及其分布 …… 32
2.1　内容提要 …… 32
2.1.1　基本内容 …… 32
2.1.2　重点与难点 …… 40
2.1.3　疑难解答 …… 40
2.2　题型归类与解题方法 …… 42
2.2.1　有关随机变量分布的概念及性质 …… 42
2.2.2　求随机变量的分布 …… 42
2.2.3　常见分布在计算概率中的应用 …… 45
2.2.4　有关二维随机变量及其分布的概念、性质 …… 47
2.2.5　求二维随机变量的各种分布 …… 47
2.2.6　随机变量独立性的讨论 …… 53
2.2.7　求随机变量函数的分布 …… 53
2.3　习题及解答 …… 63
2.3.1　习题 …… 63
2.3.2　习题解答 …… 65

第 3 章　随机变量的数字特征 …… 70
3.1　内容提要 …… 70
3.1.1　基本内容 …… 70
3.1.2　重点与难点 …… 74
3.1.3　疑难解答 …… 75
3.2　题型归类与解题方法 …… 76
3.2.1　离散型随机变量的数学期望与方差的求法 …… 76
3.2.2　连续型随机变量的数学期望与方差的求法 …… 78
3.2.3　随机变量函数的数学期望与方差的求法 …… 80
3.2.4　协方差与相关系数的计算 …… 82
3.2.5　数学期望与方差的应用 …… 86
3.2.6　切比雪夫不等式的应用 …… 88
3.3　习题及解答 …… 89
3.3.1　习题 …… 89
3.3.2　习题解答 …… 90
第 4 章　大数定律与中心极限定理 …… 93
4.1　内容提要 …… 93
4.1.1　基本内容 …… 93
4.1.2　重点与难点 …… 95
4.1.3　疑难解答 …… 95
4.2　题型归类与解题方法 …… 96
4.2.1　随机变量序列依概率收敛的判定及证明 …… 96
4.2.2　验证随机变量序列服从大数定律 …… 97
4.2.3　验证随机变量之和近似服从正态分布 …… 98
4.2.4　独立同分布中心极限定理的应用 …… 98
4.2.5　德·莫佛-拉普拉斯中心极限定理的应用 …… 101
4.3　习题及解答 …… 104
4.3.1　习题 …… 104
4.3.2　习题解答 …… 106
第 5 章　数理统计的基本概念 …… 111
5.1　内容提要 …… 111
5.1.1　基本内容 …… 111
5.1.2　重点与难点 …… 115
5.1.3　疑难解答 …… 115

5.2 题型归类与解题方法 …… 116
5.2.1 统计量的判定及统计值的计算 …… 116
5.2.2 样本均值与方差的分布及应用 …… 117
5.2.3 χ^2 分布及应用 …… 120
5.2.4 t 分布及应用 …… 122
5.2.5 F 分布及应用 …… 123
5.3 习题及解答 …… 124
5.3.1 习题 …… 124
5.3.2 习题解答 …… 127
第 6 章 参数估计 …… 132
6.1 内容提要 …… 132
6.1.1 基本内容 …… 132
6.1.2 重点与难点 …… 134
6.1.3 疑难解答 …… 134
6.2 题型归类与解题方法 …… 135
6.1.1 点估计 …… 135
6.2.2 点估计的评价标准 …… 140
6.2.3 正态总体参数的区间估计(利用表 6-1 求解) …… 145
6.2.4 大样本下非正态总体参数的区间估计 …… 147
6.3 习题及解答 …… 148
6.3.1 习题 …… 148
6.3.2 习题解答 …… 150
第 7 章 假设检验 …… 154
7.1 内容提要 …… 154
7.1.1 基本内容 …… 154
7.1.2 重点与难点 …… 159
7.1.3 疑难解答 …… 159
7.2 题型归类与解题方法 …… 161
7.2.1 单个正态总体参数的假设检验 …… 161
7.2.2 两个正态总体参数的假设检验 …… 164
7.2.3 非正态总体参数的假设检验 …… 167
7.2.4 假设检验的两类错误 …… 168
7.2.5 总体分布的 χ^2 优度拟合检验 …… 169

7.2.6 秩和检验 …… 171
7.2.7 独立性检验 …… 172
7.3 习题及解答 …… 172
7.3.1 习题 …… 172
7.3.2 习题解答 …… 178
第8章 方差分析与回归分析 …… 188
8.1 内容提要 …… 188
8.1.1 基本内容 …… 188
8.1.2 重点与难点 …… 198
8.1.3 疑难解答 …… 198
8.2 题型归类与解题方法 …… 201
8.2.1 单因素试验的方差分析 …… 201
8.2.2 双因素等重复试验的方差分析 …… 202
8.2.3 双因素无重复试验的方差分析 …… 203
8.2.4 一元线性回归 …… 204
8.2.5 多元线性回归 …… 206
8.2.6 最小二乘估计 …… 208
8.3 习题及解答 …… 209
8.3.1 习题 …… 209
8.3.2 习题解答 …… 212

第1章 随机事件与概率

1.1 内容提要

1.1.1 基本内容

1. 随机试验

在一定的条件下可能出现也可能不出现的现象，称为随机现象.对随机现象的观测，称为试验.如果试验满足以下条件：

(1) 可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪个结果会出现.

则称该试验为随机试验，简称为试验，常用字母 E 来表示.

2. 样本空间和样本点

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记做 Ω.样本空间的元素称为样本点，记做 ω.

3. 随机事件

(1) 样本空间 Ω 的(某些)子集称为随机事件，简称事件，常用 $A,B,C,\cdots$ 表示.

(2) 设 A 是一个事件，在每次试验中，当且仅当 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生.

(3) 在每次试验中总会发生的事件称为必然事件，必然事件就是 Ω.

(4) 在每次试验中都不发生的事件称为不可能事件.不可能事件就是 $\varnothing$.

(5) 样本空间 Ω 的单点子集 $\{\omega\}$ 称为基本事件.

4. 事件之间的关系与事件的运算

(1) 包含关系.若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A 或事件 A 包含于事件 B，记做 $A \subset B$.

(2) 相等关系.若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记做 $A = B$.

(3) 和事件.事件 A 与事件 B 至少有一个发生(A 发生或 B 发生)的事件称为 A 与 B 的和事件，记做 $A \cup B$.

设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，其中至少有一个发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记做

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \triangleq \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

设$A_1,A_2,\cdots$为一列事件，其中至少有一个发生的事件称为$A_1,A_2,\cdots$的和事件，记做$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 积事件.事件A与事件B同时发生的事件称为A与B的积事件，记做$A \cap B$，也记做AB.

n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生的事件称为$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件，记做

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \triangleq \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

一列事件$A_1,A_2,\cdots$同时发生的事件称为$A_1,A_2,\cdots$的积事件，记做$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(5) 差事件.事件A发生且事件B不发生的事件称为事件A与事件B的差事件，记做$A-B$.

(6) 互不相容.对于事件A与事件B，若$A \cap B=\varnothing$(即A与B不能同时发生)，则称A与B互不相容或互斥.

(7) 互逆.对于事件A与事件B，若$A \cup B=\Omega$，$A \cap B=\varnothing$(即A，B中必有一个发生，且仅有一个发生)，则称A与B互为逆事件或互为对立事件.A的对立事件B记做$B=\overline{A}$，且有$\overline{A}=\Omega-A$.

点评　A,B互逆$\underset{\text{不成立}}{\overset{}{\Longleftrightarrow}}A,B$互斥.

5. 随机事件的运算律

(1) 交换律：$A \cup B=B \cup A$，$AB=BA$.

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$，$(AB)C=A(BC)$.

(3) 积对和的分配律：$A(B \cup C)=(AB) \cup (AC)$；

和对积的分配律：$A \cup (BC)=(A \cup B)(A \cup C)$.

(4) 等幂律：$A \cup A=A$，$AA=A$.

(5) $\overline{\overline{A}}=A$.

(6) $A-B=A\overline{B}=A-AB$.

(7) 吸收律：$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B=B \Leftrightarrow AB=A$.

(8) 德·摩根律：

$$\overline{A \cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\ \overline{AB}=\overline{A} \cup \overline{B};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

6. 频率的定义及性质

(1) 频率的定义.事件A在n次试验中出现的次数η_n称为事件A发生的频数，$f_n(A)=\frac{\eta_n}{n}$称为事件A在这n次试验中发生的频率.

(2) 频率的性质：

① $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

② $f_n(\Omega)=1$；

③ 若事件A,B互不相容，则$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

7. 概率的公理化定义及性质

(1) 概率的公理化定义.设Ω是样本空间，$\mathscr{F}$是Ω的某些子集组成的集类，如果$\mathscr{F}$满足下列条件：

① $\Omega\in\mathscr{F}$；

② 若$A\in\mathscr{F}$，则$\overline{A}\in\mathscr{F}$；

③ 若$A_n\in\mathscr{F}\ (n=1,2,\cdots)$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

则称$\mathscr{F}$为Ω上的σ^-域.$\mathscr{F}$的元素A称为事件.

对于样本空间Ω上给定的σ^-域$\mathscr{F}$，设P是定义在$\mathscr{F}$上的一个实值集合函数，如果它满足如下条件：

① 非负性：$P(A)\geqslant 0,\forall A\in\mathscr{F}$；

② 规范性：$P(\Omega)=1$；

③ 可列可加性：若$A_n\in\mathscr{F}\ (n=1,2,\cdots)$，且两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$$

则称P为概率，而称三元体$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间.

(2) 概率的性质：

① $P(\varnothing)=0$；

② 有限可加性：若$A_1,A_2,\cdots,A_n$是一组两两互不相容的随机事件，则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k);$$

③ $P(\overline{A})=1-P(A)$；

④ $P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

⑤ 单调性：若$B\subset A$，则$P(A-B)=P(A)-P(B)$，从而$P(B)\leqslant P(A)$；

⑥ 对于任意事件A，有$P(A)\leqslant 1$；

⑦ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，更一般地，

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n);$$

⑧ 次可加性：$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$，$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.

点评 性质 ⑦ 称为加法公式，性质 ④ 称为减法公式.

8. 古典概率

称随机现象的数学模型为古典概型，如果这种随机现象满足：

(1) 样本空间 Ω 是有限集，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2) 每个基本事件$\{\omega_i\}$发生的可能性相等，即 $P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$.

此时，对于任何事件 $A\subset\Omega$，有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 包含的基本事件总数}}.$$

并把它称为古典概率.

9. 几何概率

向某一可度量的有界区域 G（坐标轴上的区间，平面上或空间中的区域等）内随机地投掷一点，如果该点必落在 G 内，且落在 G 内任何两个度量（如长度、面积或体积等）相等的子区域内的可能性相等，则称这种随机试验的数学模型为几何概型.此时，随机点落在 G 的子区域 A 内的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量（长度、面积或体积）}}{G\text{ 的度量（长度、面积或体积）}}.$$

并把它称为几何概率.

10. 条件概率

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为 A 发生的条件下 B 发生的条件概率.

条件概率具有如下性质：

(1) $P(B\mid A)\geqslant 0$；

(2) $P(\Omega\mid A)=1$；

(3) 若 $B_1,B_2,\cdots$ 是一列两两互不相容的随机事件，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\mid A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n\mid A).$$

点评 以上三条说明：在固定 A 的情况下 $P(B\mid A)$ 为概率，故有关概率的其他性质对条件概率也成立.读者试着叙述并给出证明.

11. 独立性

设 A,B 是两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B 相互独立.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,若 $\forall\, 2\leqslant k\leqslant n,1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(1) n 个事件独立性的两点应用:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则

① $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$;

② $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2)]\cdots[1-P(A_n)]$.

(2) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立 $\underset{\text{不成立}}{\overset{}{\rightleftarrows}}$ $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

(3) A,B 独立 $\underset{\text{不成立}}{\overset{\text{不成立}}{\rightleftarrows}}$ A,B 互斥.

(4) A,B 独立 $\Leftrightarrow A,\overline{B}$ 独立 $\Leftrightarrow \overline{A},B$ 独立 $\Leftrightarrow \overline{A},\overline{B}$ 独立.

(5) 若 $P(A)>0$,则"A,B 独立 $\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B)$".

(6) 若 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$,则 A 与任何事件 B 独立.

12. 四个公式

(1) 乘法公式.若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(2) 全概率公式.设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为完备事件组(即 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$, $B_iB_j=\varnothing\ (1\leqslant i\neq j\leqslant n)$),且 $P(B_i)>0\ (1\leqslant i\leqslant n)$,则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

(3) 贝叶斯(逆概)公式.设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为完备事件组,且 $P(B_i)>0\ (1\leqslant i\leqslant n)$,$P(A)>0$,则

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

(4) 二项概率公式.伯努利概型:在相同的条件下,重复做 n 次试验,这 n 次试验是相互独立的,每次试验的可能结果只有两个,即 A 和 $\overline{A}$,且在每次试验中 A 发生的概率不变,这样的 n 次试验称为 n 重伯努利概型.

假设在伯努利概型中,每次试验事件 A 发生的概率为 p,则

① 在 n 次试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$p_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\ (0\leqslant k\leqslant n);$$

② 试验进行 k 次,A 在第 k 次试验是第 r 次发生的概率为

$$p=C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}\ (k=r,r+1,\cdots).$$

1.1.2 重点与难点

1. 重点

掌握事件的表示与运算律;掌握概率的定义与性质;掌握条件概率的意义,会计算事件的条件概率;熟悉事件独立性的概念与应用;会用加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式;会计算基本的古典概型.

2. 难点

利用概率的性质进行推理和计算;将实际问题用事件表示;古典概型的计算.

1.1.3 疑难解答

(1) 概率为 0 的事件一定是不可能事件吗?概率为 1 的事件一定是必然事件吗?

答 不一定.例如,在区间$[0,1]$中随机地取一个数,记事件 $A=\{$所取数为 $0.3\}$,根据几何概型的定义,有 $P(A)=0$,但 $A\neq\varnothing$.即事件 A 不是不可能事件 $\varnothing$.再记事件 $B=\overline{A}$,则 $P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1$,但 $B\neq\Omega$,即事件 B 不是必然事件 Ω.

(2) 概率为 0 或 1 的事件与任何事件相互独立吗?

答 一定相互独立.因为,若事件 A 满足 $P(A)=0$,则对任何事件 B,有 $AB\subset A$,则 $P(AB)=0$,故 $P(AB)=P(A)P(B)$,所以事件 A 与任何事件 B 相互独立.又由 $P(A)=1\Rightarrow P(\overline{A})=0$.再由事件相互独立的性质知,事件 $\overline{A}$ 与任何事件 B 相互独立.由此说明,概率为 1 的事件与任何事件也相互独立.

(3) 如何区分条件概率与概率的乘法公式?

答 ① 从样本空间上讲,计算 $P(AB)$ 的样本空间为 Ω,计算 $P(B|A)$ 的样本空间 A;一般来说,$P(B\mid A)$ 比 $P(AB)$ 大.

② 凡涉及事件 A 与 B"同时"发生,用 $P(AB)$;有"包含"关系或主从条件关系的,用 $P(B|A)$.即条件概率一定是在某事件已发生的条件下该事件发生的概率.

(4) 事件 A,B 相互独立与事件 A,B 互斥能否同时成立?

答 不一定.

① 当 $A=\varnothing$,B 为任何事件时,$P(AB)=P(A)P(B)=0$,且 $AB=\varnothing$,即 A,B 相互独立且互斥,两种关系同时成立.

② 当 $P(A)>0$,$P(B)>0$ 时,"A,B 互斥"与"A,B 相互独立"不可能同时成立.理由是:一方面,若 A,B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$,故 $AB\neq\varnothing$,即 A,B 不可能互斥.因此,若 A,B 相互独立,则 A,B 不可能互斥;另一方面,若 A,B 互斥,则 $P(AB)=0$,从而 $0=P(AB)<P(A)P(B)$,即 A,B 不可能相互独立.因此,若 A,B 互斥,则 A,B 不可能相互独立.

1.2　题型归类与解题方法

1.2.1　样本空间与随机事件

1. 样本空间的描述

例 1.1　写出下列随机试验的样本空间：

(1) 抛三枚硬币(E_1)，则

$\Omega_1=\{$(正正正)，(正正反)，(正反正)，(反正正)，(正反反)，(反正反)，(反反正)，(反反反)$\}$；

(2) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止(E_2)，则

$\Omega_2=\{$(正)，(反正)，(反反正)，$\cdots$，(反反 $\cdots$ 反正)，$\cdots\}$；

(3) 记录一个班的一次数学考试平均成绩(百分制)(E_3)，则

$$\Omega_3=\left\{\frac{i}{n}\mid i=0,1,\cdots,100n\right\};$$

(4) 往圆心在原点的单位圆内任掷一点，求点的坐标(E_4)，则

$$\Omega_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

点评　(1) 样本空间本质上是集合，即满足某些特性的事物的全体.因此，样本空间的描述就是集合的描述，其描述法有枚举法与特性刻画法两种.例如，Ω_1，Ω_2 为枚举法，Ω_3，Ω_4 为特性刻画法.

(2) 样本空间分有限空间与无穷空间.

(3) 对试验的不同理解，可能造成不同的样本空间.如本例中的 E_1 就有下面不同的理解：

① 三枚硬币可辨，抛三枚硬币依次将每枚硬币抛下(相当于将一枚硬币连续抛三次)，这种抛法有序，则样本空间如 Ω_1，有 8 个样本点；

② 三枚硬币不可辨，将它们一次抛下，这种抛法无序，则样本空间 $\Omega'_1=\{$(正正正)，(正正反)，(正反反)，(反反反)$\}$，有 4 个样本点.

2. 随机事件的表示

例 1.2　设 A,B,C 为三个事件，将下列事件用 A,B,C 表示.

(1) D_1：A 发生，B,C 都不发生；

(2) D_2：三事件中恰有一个发生；

(3) D_3：三事件中恰有两个发生；

(4) D_4：三事件都不发生；

(5) D_5：三事件中至少有一个发生；

(6) D_6：三事件中不多于一个发生；

(7) D_7：三事件中不多于两个发生；

(8) D_8:三事件中至少两个发生;

(9) D_9:A,B 中至少一个发生,C 不发生.

解 (1) 由于 B,C 都不发生当且仅当 $\overline{B}$,$\overline{C}$ 同时发生,所以 $D_1 = A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) $D_2 =$ {只有 A 发生或只有 B 发生或只有 C 发生} $= A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$;

(3) $D_3 =$ {只有 A,B 发生} $\cup$ {只有 A,C 发生} $\cup$ {只有 B,C 发生}

$= AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$;

(4) 由于 A,B,C 都不发生当且仅当 $\overline{A}$,$\overline{B}$,$\overline{C}$ 同时发生,所以 $D_4 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(5) $D_5 = A \cup B \cup C$;

(6) $D_6 =$ {三事件都不发生} $\cup$ {三事件中恰有一个发生} $= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup D_2$;

(7) 因为 $\overline{D_7} = ABC$,所以 $D_7 = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$;

(8) $D_8 =$ {三事件都发生} $\cup$ {三事件中恰有两个发生} $= ABC \cup D_3$;

(9) $D_9 = (A \cup B)\overline{C}$.

点评 (1) 诸事件中至少或至多 k 个发生的事件往往用恰好 i 个发生的事件来表示.例如,设 $A =$ {n 个事件中至多 k 个发生},令 $B_i =$ {n 个事件中恰好 i 个发生}($0 \leqslant i \leqslant n$),则 $A = B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_k$.

(2) 求某随机事件 A,有时考虑它的逆事件 $\overline{A}$ 显得容易些.

3. 事件的关系

例 1.3 证明:$A \cup B = A \cup (B - AB)$.

证 方法一 显然 $A \cup (B - AB) \subset A \cup B$.另一方面,$A \cup B$ 发生 $\Rightarrow A$ 发生或 B 发生 $\Rightarrow A$ 发生或 A 不发生 B 发生 $\Rightarrow A$ 发生或 B 发生 AB 不发生 $\Rightarrow A \cup (B - AB)$ 发生,即 $A \cup B \subset A \cup (B - AB)$.故 $A \cup B = A \cup (B - AB)$.

方法二 显然 $A \cup (B - AB) \subset A \cup B$.另一方面,$\forall x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ 或 $x \notin A, x \in B \Rightarrow x \in A$ 或 $x \in B, x \notin AB \Rightarrow x \in A$ 或 $x \in B - AB \Rightarrow x \in A \cup (B - AB)$,即 $A \cup B \subset A \cup (B - AB)$.故 $A \cup B = A \cup (B - AB)$.

方法三 由 $B = AB \cup \overline{A}B$ 知,$\overline{A}B = B - AB$,故

$$A \cup B = A \cup \overline{A}B = A \cup (B - AB).$$

点评 事件的关系有包含、相等、互斥、互逆 4 种.讨论或证明时,一般有三种方法:用事件关系与运算的定义;用集合关系与运算的定义;用事件或集合的运算性质.

1.2.2 古典概型与几何概型的计算

1. 古典概型的计算

例 1.4 在整数 0 至 9 中任取 4 个不同的数,能排成一个四位偶数的概率是多少?

解　记 $A=\{$能排成一个四位偶数$\}$，按个、千、百、十位的次序进行排列，个位为 0 的情况有 $1\cdot9\cdot8\cdot7$ 种排法，个位不为 0 的情况有 $4\cdot8\cdot8\cdot7$ 种排法，故

$$P(A)=\frac{1\cdot9\cdot8\cdot7+4\cdot8\cdot8\cdot7}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{41}{90}.$$

点评　四位偶数有两个要求，即个位必须为偶数，且千位不能为 0.

例 1.5　有 50 件同一种商品，其中有 5 件次品.从这 50 件商品中，任取 3 件，求：

(1) 取到 2 件次品的概率；

(2) 取到次品的概率；

(3) 若一件接一件地取，第二次取到次品的概率.

解　记 $A=\{$取到 2 件次品$\}$，$B=\{$取到次品$\}$，$C=\{$第二次取到次品$\}$，则

(1) $P(A)=\dfrac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}=0.023$；

(2) $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{C_{45}^3}{C_{50}^3}=0.276$；

(3) 为确保等可能性，不妨将 50 件产品全部取出并排成一列.C 发生等价于第二个位置排次品的排列出现，因此

$$P(C)=\frac{C_5^1 49!}{50!}=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}.$$

点评　在计算古典概率时，把所有元素的全排列看做样本点，每个样本点构成的基本事件发生的可能性相等.

例 1.6　自前 n 个正整数中任意取出两个数，求两个数之和是偶数的概率.

解　记 $A=\{$两个数之和是偶数$\}$，两个数之和是偶数当且仅当这两个数同为奇数或同为偶数.

当 n 为偶数时，前 n 个正整数中偶数的个数与奇数的个数都为 $n/2$，所以两个数之和是偶数的取法有 $2C_{n/2}^2$ 种，故

$$P(A)=\frac{2C_{n/2}^2}{C_n^2}=\frac{n-2}{2(n-1)}.$$

当 n 为奇数时，前 n 个正整数中偶数的个数为$\dfrac{n-1}{2}$，奇数的个数为$\dfrac{n-1}{2}+1$，所以两数之和是偶数的取法有 $C_{\frac{n-1}{2}}^2+C_{\frac{n+1}{2}}^2$ 种，故

$$P(A)=\frac{C_{(n-1)/2}^2+C_{(n+1)/2}^2}{C_n^2}=\frac{n-1}{2n}.$$

于是

$$P(A)=\begin{cases}\dfrac{2C_{n/2}^2}{C_n^2}=\dfrac{n-2}{2(n-1)}, & n\text{ 为偶数；}\\[2ex] \dfrac{C_{(n-1)/2}^2+C_{(n-1)/2+1}^2}{C_n^2}=\dfrac{n-1}{2n}, & n\text{ 为奇数.}\end{cases}$$