医用高等数学学习指导

（第2版）

主编　吴克坚　徐清华　刘　烁

YIYONGGAODENGSHUXUE XUEXIZHIDAO

第四军医大学出版社

医用高等数学学习指导

（第2版）

主　编　吴克坚　徐清华　刘　烁

副主编　梁锐华　赵清波

第四军医大学出版社·西安

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学学习指导/吴克坚，徐清华，刘烁主编．—2版．—西安：第四军医大学出版社，2014.9

ISBN 978-7-5662-0574-2

Ⅰ.①医… Ⅱ.①赵… ②徐… ③刘… Ⅲ.①医用数学-医学院校-教学参考资料 Ⅳ.①R311

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第186417号

yiyong gaodeng shuxue xuexi zhidao

医用高等数学学习指导

出版人：富　明　　责任编辑：杨耀锦

出版发行：第四军医大学出版社

地址：西安市长乐西路17号　邮编：710032

电话：029-84776765　　传真：029-84776764

网址：http：//press. fmmu. edu. cn

制版：新纪元文化传播

印刷：陕西奇彩印务有限责任公司

版次：2014年9月第2版　2014年9月第2次印刷

开本：787×1092　1/16　　印张：9　　字数：140千字

书号：ISBN 978-7-5662-0574-2/R·1407

定价：22.00元

内容简介

本书是配合赵清波等编写的《医用高等数学》而编写的辅导教材．全书共6章，内容包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、多元函数微积分学、概率论．每章由重点知识框架图、课程标准要求、本章重点难点、疑难解析、典型例题、配套教材习题全解六部分组成，并配有自测题两套，期末考试卷一套．该书完全与教材同步，书中精选了具有代表性、典型性的例题，配以解题知识点、要点和点评，其中部分例题还给出了多种解法，旨在帮助学生深入理解基本概念，巩固教材内容，同时提高学生分析问题和解决问题的能力．

本书可作为高等医科院校相关专业的本科生辅导教材，也可供广大医务工作者和自学者阅读参考．

前　言

第四军医大学数理教研室编写的《医用高等数学》是供医学院校医疗、口腔、预防、空医、药学等专业使用的高等数学教材．该教材适当压缩了一元函数、微积分的部分内容，扩充增加了多元函数微积分、概率论等内容，并大量增加了生物、医学实例及医学数学模型．教材在知识容量与难度上有一定的增加．为了指导学生更好地学习本教材，帮助学生学好高等数学这门课程，减轻学生负担，我们编写了与之配套的辅导教材《医用高等数学学习指导》．本辅导教材按照原教材的章节顺序，分为六章．每章由六部分组成：

1. 重点知识框架图：使学生对该章的知识结构有总体了解，在每章预习和总结时参考．

2. 课程标准要求：使学生明确课程内容要求，针对知识内容分为了解、理解、掌握三个层次程度．

3. 本章重点、难点：使学生明确每章需要重点学习的内容，且对难点有明确了解，并在学习中加以注意．

4. 疑难解析：针对教材中容易产生的疑问、较难理解的内容或易疏忽的问题，以问答的形式给出，帮助学生学习掌握教材内容，解惑答疑．

5. 典型例题：提供典型例题及解题思路，帮助学生掌握解题方法及解题技巧．

6. 配套教材习题全解：对教材中的习题，给出完整的解答，供学生参考．

书末还配有模拟试题，目的是让学生了解考试的形式及难易程度，并及时测试自己的学习效果．

本书在编写和出版过程中得到了第四军医大学教务处以及出版社的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

本书在编写过程中，参考了许多同类及相关的中外文书刊，在此深表感谢．

限于我们的水平，书中不免有疏误和不妥之处，恳请使用本教材的师生们不吝赐教，多提宝贵意见．

编　者

2014 年 7 月于西安

目　录

第1章　函数与极限 …… 1

一、重点知识框架图 …… 1

二、课程标准要求 …… 1

三、本章重点、难点 …… 2

四、疑难解析 …… 2

五、典型例题 …… 4

六、配套教材习题全解 …… 8

第2章　一元函数微分学 …… 20

一、重点知识框架图 …… 20

二、课程标准要求 …… 20

三、本章重点、难点 …… 21

四、疑难解析 …… 21

五、典型例题 …… 23

六、配套教材习题全解 …… 29

第3章　一元函数积分学 …… 48

一、重点知识框架图 …… 48

二、课程标准要求 …… 48

三、本章重点、难点 …… 49

四、疑难解析 …… 49

五、典型例题 …… 51

六、配套教材习题全解 …… 59

第4章　微分方程 …… 80

一、重点知识框架图 …… 80

二、课程标准要求 …… 80

三、本章重点、难点 …… 81

四、疑难解析 …… 81

五、典型例题 …… 82

六、配套教材习题全解 …… 86

第5章　多元函数微积分学 …… 96

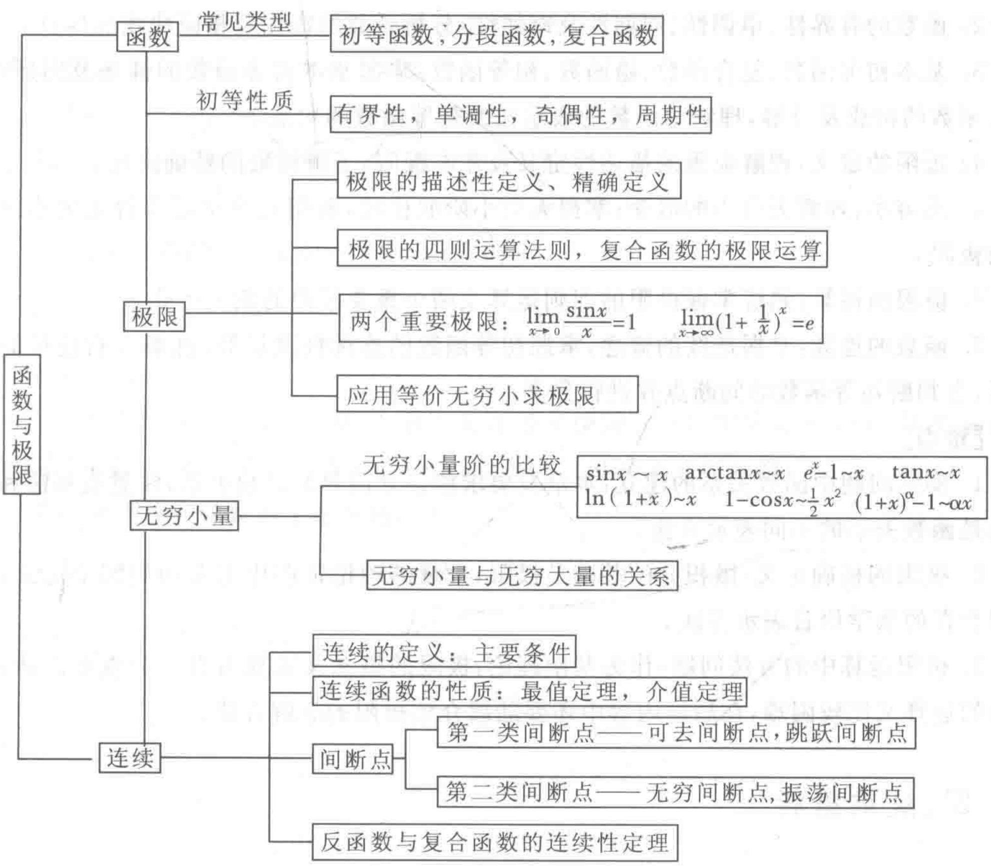
一、重点知识框架图 …… 96

二、课程标准要求 …… 96
三、本章重点、难点 …… 97
四、疑难解析 …… 97
五、典型例题 …… 98
六、配套教材习题全解 …… 102

第 6 章 概率论 …… 108
一、重点知识框架图 …… 108
二、课程标准要求 …… 108
三、本章重点、难点 …… 109
四、疑难解析 …… 109
五、典型例题 …… 110
六、配套教材习题全解 …… 113
自测题(Ⅰ) …… 120
自测题(Ⅱ) …… 122
医用高等数学模拟试卷 …… 124
参考答案 …… 126
自测题(Ⅰ) …… 126
自测题(Ⅱ) …… 129
医用高等数学模拟试卷 …… 130
参考文献 …… 133

第1章 函数与极限

一、重点知识框架图



二、课程标准要求

掌握　函数的概念及解析表达式；基本初等函数及其图形；初等函数；复合函数的构成及分解；极限的描述性定义；极限的四则运算；两个重要极限及其运算；函数连续的概念；函数的间断点；利用等价无穷小求极限．

理解　分段函数；无穷小的概念及其性质；简单实际问题函数关系的建立；左、右极限

及左、右连续；间断点的类型．

了解　极限的精确定义；无穷大量与无穷小量的关系；闭区间上连续函数的性质．

三、本章重点、难点

[重点]

1. 函数的概念及其表示法：简单实际问题中函数关系的建立，掌握函数定义域的求法，会用图像法、表格法、解析法表示变量的函数关系．

2. 函数的有界性、单调性、周期性及奇偶性：分析函数的特性及相应曲线的特点．

3. 基本初等函数、复合函数、隐函数、初等函数：掌握基本初等函数的性态及图形，掌握复合函数的构成及分解，理解隐函数的表示法及初等函数的构成．

4. 极限的定义：理解极限的描述性定义及左右极限，了解极限的精确定义．

5. 无穷小：理解无穷小的概念；掌握无穷小阶的比较，利用几个常用等价无穷小计算函数的极限．

6. 极限的运算：熟练掌握极限的四则运算及两个重要极限的相关运算．

7. 函数的连续：掌握连续的概念，掌握初等函数的连续性及运算，理解左右连续的相关性质，会判断初等函数的间断点并进行分类．

[难点]

1. 实际问题中函数关系的建立：本章只要求能建立简单的函数关系，注意表格法和图像法也是函数关系的不同表示方法．

2. 极限的精确定义：微积分的基础是极限，大量的理论证明中都要用到精确定义，理解极限存在的数学语言表示方法．

3. 极限运算中的方法问题：作为基础理论，极限的概念及运算占有十分重要的地位，而极限的运算又比较困难，在后续内容中还要陆续介绍极限的求解方法．

四、疑难解析

1. 实际问题中函数关系如何表示？

答　一般的变量之间的函数关系我们可以用解析的方法表示出来，如 $y=f(x)$. 但在实际问题中，我们观测到的或者实验得到的仅是一些离散的数据，这时我们往往需要用表格法、图像法将两个变量之间的函数关系表示出来，如体重与身高的关系．

为得到两个变量的解析表达式，需要根据实测数据的分布情况，采用最小二乘法（或其他参数估计方法）得到函数的解析表达式．在这一过程中，要将表格、图形结合起来使用，最后找到合适的解析表达式的类型，这一过程称为曲线拟合．

2. 如何理解极限的精确定义？

答　关于极限定义，教材的重点是极限的描述性定义，但在后续相关内容的学习过程

中，又要用到极限的精确定义即 $\varepsilon-\delta$ 定义，希望学有余力的学生能够尽量理解、应用极限的精确定义．

定义中的 ε 与 δ：

ε 具有任意性和固定性：任意性是衡量 $f(x)$ 与 A 的接近程度，ε 越小，接近的程度越好．其任意性保证了 $f(x)$ 与 A 能接近到任意程度．固定性是指 ε 一经给出就暂时看作是固定不变的，以便根据它来找 δ. 其固定性保证了 δ 的存在．由此可以看出，δ 是在 ε 预先给定的情况下随后找到的，但它们并不是函数关系，并且 δ 不是唯一的．

3. 无穷小量有什么重要性？

答　无穷小量在理论证明及极限过程中都有十分重要的作用．其实质是一个以零为极限的变量(函数)，这里要注意两个问题：

(1) $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 是无穷小．

此式往往用于某些理论证明，把极限问题转化为含有无穷小的等式，便于进行代数运算．

(2) 几个常用的等价无穷小，当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\qquad \tan x\sim x,\qquad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\qquad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\qquad e^x-1\sim x,\qquad \arctan x\sim x,\qquad \arcsin x\sim x.$$

利用等价无穷小的代换求极限，往往适用于求极限的函数中的乘积因子，如果函数中出现加减时，则设法把它们转化为乘除形式，有关问题可参考典型例题．

4. 如何理解和计算两个重要极限？

答　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 可以改写成 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

此时可以简化计算，如：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\cdot k}=e^k,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{6}{\alpha}}=e^{-6},$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}=e^2.$$

一般地，如果求极限 $\lim(1+u(x))^{v(x)}$，在同一极限过程下有：

$$\lim u(x)=0,\qquad \lim v(x)=\infty,\qquad \lim u(x)v(x)=a,$$

则

$$\lim(1+u(x))^{v(x)}=\lim e^{v(x)\ln[1+u(x)]}=e^{\lim v(x)\ln[1+u(x)]}=e^{\lim v(x)u(x)}=e^a.$$

5. 定义域与定义区间有什么区别？

答　在函数 $y=f(x)$ 中，定义域是指使得等式成立的所有 x 的全体．这里面包含一些孤立点．而定义区间则是去掉孤立点后的区间．

6. 为什么在讨论函数连续性时，更多的是在讨论间断点？

答　(1) 连续的概念是利用极限的方法定义的，有关连续的一些基本概念(如左、右连

续）及性质可由极限定义直接给出．

(2) 对初等函数而言，其在定义区间内都是连续的，这是它的一般性态，而间断点仅在特殊情况下发生，这是它的特殊性态．因此我们更关注其特性．

7. 函数在 $x=x_0$ 处有定义、存在极限、连续三个概念之间有什么关系？

答 (1) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，不一定在该点存在极限，更不一定连续．如：

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases},$$

在 $x=0$ 处，$f(x)$ 有定义，但在该点处极限不存在，也不连续．

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在极限，在 $x=x_0$ 处不一定有定义，也不一定连续．如：

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

在 $x=0$ 处，$f(x)$ 无定义，但该点处极限存在，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续吗？

(3) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续时，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 有定义且极限存在．

五、典型例题

例 1.1 将下列复合函数分解成基本初等函数或基本初等函数的和、差、积、商．

(1) $\sin\left(\dfrac{3x-2}{5x+2}\right)$； (2) $e^{\cos\sqrt{x}}$

解 (1) $y=\sin u, u=\dfrac{3x-2}{5x+2}$．

(2) $y=e^u, u=\cos v, v=\sqrt{x}$．

知识点：复合函数的构成．

要点：弄清复合的过程．

例 1.2 分析 $y=\arcsin[\ln(x+1)]$ 的复合结构并求其定义域．

解 $y=\arcsin[\ln(x+1)]$ 是由 $y=\arcsin u, u=\ln v, v=x+1$ 复合而成的．

$$\begin{cases}-1\leqslant\ln(x+1)\leqslant 1\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{e}-1\leqslant x\leqslant e-1\\ x>-1\end{cases},$$

则定义域为$[\dfrac{1}{e}-1,e-1]$．

知识点：复合函数的构成．

要点：使得等式成立的自变量的变化范围．

例 1.3 火车站行李收费规定如下：20 千克以下不计费，20 ～ 50 千克每千克收费 0.20 元，超出 50 千克部分的每千克 0.30 元，试建立行李收费 $f(x)$ 与行李重量 x 之间的函数关系．

解 根据题意有

知识点：简单实际问题函数关系的建立．

要点：分段函数．

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<20\\ 0.2x & 20\leqslant x\leqslant 50.\\ 10+0.3(x-50) & x>50\end{cases}$$

例 1.4　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

知识点：极限的四则运算.

要点：进行适当的化简，去掉分母的零因子.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{4+5}{2-3}=-9$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}$

$$=\frac{2}{3}.$$

例 1.5　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

知识点：极限的四则运算.

要点：化简，去掉分母的零因子，第(2)题通过分子有理化的方法去零因子.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)}=\frac{3}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+x}-1)[(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1]}{x[(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1]}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}=\frac{1}{3}.$$

例 1.6　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-1}{x^2+1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3}{2x^2+x+1}$.

知识点：极限的四则运算.

要点：分子分母同除以分母的最高次幂，使分子分母都不趋于无穷大.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3}{2x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{5}{2}$.

例 1.7　已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$，求 a,b.

知识点：无穷小的比较.

要点：分子与分母是同阶无穷小.

解　因为$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$，得到$1+a+b=0$，于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+a+1)=a+2=3,$$

所以 $$a=1,b=-2.$$

例 1.8 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

知识点：两个重要极限.
要点：极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 可以写成 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 的形式.

解 1 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}\right]^{\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}}$,

当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,

则 $$\lim_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^2.$$

解 2 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\tan^2 x\cdot\frac{1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$,

所以 $$\lim_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^2.$$

例 1.9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

知识点：两个重要极限.
要点：$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$
$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

例 1.10 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})$.

知识点：无穷小性质求极限.
要点：有界变量与无穷小的乘积仍是无穷小.

解 $$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$
$$=2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$，且 $\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$ 是有界变量，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})=0$.

例 1.11 已知 $f(x)\doteq\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & x>0\\ \ln(1+x) & -1<x\leqslant 0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型.

知识点：函数的连续性.
要点：考察无定义的点，函数的分段点，分别讨论函数极限和左右极限.
点评：$x\to 1^-$ 表示

解 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 无定义，故 $x=1$ 为间断点.

因为 $$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \infty,$$

所以 $x=1$ 为无穷间断点，属于第二类间断点．

又因为 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\ln(1+x) = 0,$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{e}.$$

所以 $x=0$ 为跳跃间断点，属于第一类间断点．

$x<1$ 且 $x\to1$，所以 $x-1<0$，从而

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty.$$

例 1.12　指出下列函数的间断点，并说明间断点属于哪一类．

知识点：函数的连续性．

要点：函数的可疑间断点：无定义的点；函数的分段点．

(1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$；

解　因为 $f(x)$ 是初等函数，其定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$，所以函数 $f(x)$ 在上述三个区间内连续．当 $x=-2$ 或 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 无定义，所以 $f(x)$ 的间断点为 $x=-2$ 和 $x=1$．

由 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{x+2} = \infty$ 得 $x=-2$ 是第二类间断点．

由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3}$ 得 $x=1$ 是第一类间断点（可去间断点）．

(2) $f(x) = \begin{cases} x-1, x\leqslant 1, \\ 3-x, x>1. \end{cases}$

解　显然，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]\cup(1,+\infty)$ 内连接，考察函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 点处的连续性．

因为 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(x-1) = 0$，$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(3-x) = 2$

所以，$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点．

例 1.13　试证方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根．

知识点：闭区间上连续函数的性质．

要点：找出函数及相应的区间，应用相关性质及定理．

证明　令 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又因为

$$f(0)=1>0, f(1)=-2<0,$$

根据零点定理，在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$．

即　$\xi^3-4\xi^2+1=0,\quad 0<\xi<1,$

这说明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根．

六、配套教材习题全解

习题 1－1

1. 用区间表示下列不等式.

(1)$2 \leqslant x < 6$；　(2)$x < -1$；　(3)$x \geqslant 0$；　(4) $|x-4| \leqslant 4$.

解　(1)$[2,6)$；

(2)$(-\infty,-1)$；

(3)$[0,+\infty)$；

(4) 由 $-4 \leqslant x-4 \leqslant 4$ 得 $-4+4 \leqslant x \leqslant 4+4$，即 $0 \leqslant x \leqslant 8$，用区间表示为$[0,8]$.

2. 求下列函数的定义域.

(1)$y = \dfrac{1}{x-1}$；　(2)$y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$；

(3)$y = \tan(x+1)$；　(4)$y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$；

(5)$y = \left(\arcsin \dfrac{x-1}{5}\right) + \sqrt{25-x^2}$；　(6)$y = \arcsin\left[\lg \dfrac{x-1}{x-10}\right]$.

解　函数的定义域就是使函数的解析表达式有意义的一切实数所构成的数集.

(1) 由 $x-1 \neq 0$，得 $x \neq 1$，用区间表示为$(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$.

(2) 由 $4-x^2 > 0$，得 $x^2 < 4$，即 $-2 < x < 2$，

又由 $\left|\dfrac{x}{2}-1\right| \leqslant 1$，得 $-1 \leqslant \dfrac{x}{2}-1 \leqslant 1$，即 $0 \leqslant x \leqslant 4$，

因此函数的定义域为 $0 \leqslant x < 2$，用区间表示为$[0,2)$.

(3) 由 $x+1 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，得 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} - 1(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(4) 由 $1-x^2 \neq 0$，得 $x \neq \pm 1$，又由 $x+2 \geqslant 0$，得 $x \geqslant -2$，

因此函数的定义域为$[-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

(5) 由 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right| \leqslant 1$，得 $-4 \leqslant x \leqslant 6$，又由 $25-x^2 \geqslant 0$，得 $-5 \leqslant x \leqslant 5$，

因此函数的定义域为$[-4,5]$.

(6) 这是个复合函数，先把函数分解为，

$$y = \arcsin u, u = \lg v, v = \frac{x-1}{x-10},$$

由函数 $y = \arcsin u$ 有意义得 $-1 \leqslant u \leqslant 1$，即 $-1 \leqslant \lg v \leqslant 1$，得 $0.1 \leqslant v \leqslant 10$，也就是 $0.1 \leqslant \dfrac{x-1}{x-10} \leqslant 10$，可得 $x \geqslant 11, x \leqslant 0$，用区间表示为$(-\infty,0] \cup [11,+\infty)$.

3. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \dfrac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geqslant \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$，**求** $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \varphi(-2)$，**并作出** $y = \varphi(x)$ **的图形.**

解 $\varphi(\frac{\pi}{6}) = \left|\sin\frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}, \varphi(-2) = 0$,函数 $y = \varphi(x)$ 的图形略.

4. 下列函数是不是复合函数?如果是,指出是由哪些简单的函数复合而成.

(1)$y = e^{x^2+1}$;　　(2)$y = \sqrt{\sin^3(x+2)}$;

(3)$y = \ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$;　　(4)$y = \cos\ln\sqrt[3]{3x^2+2}$;

(5)$y = e^{\arcsin 3x}$;　　(6)$y = \lg[\tan(x^2+\arcsin x)]$.

解 (1) 是复合函数,$y = e^u, u = x^2+1$.

(2) 是复合函数,$y = \sqrt{u}, u = v^3, v = \sin w, w = x+2$.

(3) 是复合函数,$y = \ln u, u = \sqrt{v}, v = \frac{x+1}{1-x}$.

(4) 是复合函数,$y = \cos u, u = \ln v, v = \sqrt[3]{w}, w = 3x^2+2$.

(5) 是复合函数,$y = e^u, u = \arcsin v, v = 3x$.

(6) 是复合函数,$y = \lg u, u = \tan v, v = x^2+\arcsin x$.

5. 已知 $f(e^x+1) = e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$ 的表达式.

解1 令 $e^x+1 = t$,则 $e^x = t-1$,代入原式得

$$f(t) = (t-1)^2+(t-1)+1 = t^2-t+1,$$

即 $f(x) = x^2-x+1$.

解2
$$\begin{aligned} f(e^x+1) &= (e^{2x}+2e^x+1)-e^x \\ &= (e^x+1)^2-(e^x+1)+1, \end{aligned}$$

因此 $f(x) = x^2-x+1$.

6. 已知 $f(\tan x+\frac{1}{\tan x}) = \tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}+3, x \neq \frac{k\pi}{2}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$,求 $f(x)$ 的表达式.

解
$$\begin{aligned} f(\tan x+\frac{1}{\tan x}) &= \tan^2 x+2\tan x \cdot \frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan^2 x}+1 \\ &= (\tan x+\frac{1}{\tan x})^2+1, \end{aligned}$$

即 $f(x) = x^2+1$.

7. 某药物的每天剂量 y(单位:克) 与使用者的年龄 x(岁数) 之间有关系:

$y = \begin{cases} 0.125x, & 0 < x < 16 \\ 2, & x \geqslant 16 \end{cases}$,**求3岁、10岁、19岁患者每天所用药量.**

解 $y(3) = 0.125 \times 3 = 0.375$ 克,

$y(10) = 0.125 \times 10 = 1.25$ 克,

$y(19) = 2$ 克.

习题 1－2

1. 填空题

(1) $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的________条件．

(2) 已知当 $x \to 0$ 时，方程 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________．

(3) 当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，则当 $x \to x_0$ 时，无穷小 $f(x)+g(x)$ 与无穷小 $g(x)$ 的关系是________．

解 (1) 充分必要条件．

(2) 由等价无穷小 $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，得：

$$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}ax^2,\cos x-1 \sim -\frac{1}{2}x^2,$$

则

$$\lim_{x \to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1} \xlongequal{\text{等价代换}} \lim_{x \to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a=1,$$

故 $a=-\frac{3}{2}$.

(3) 因为

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

所以

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)+g(x)}{g(x)}=\lim_{x \to x_0}\left[1+\frac{f(x)}{g(x)}\right]=1,$$

因此 $f(x)+g(x)$ 与 $g(x)$ 是等价关系．

2. 选择题

(1) 当 $x \to x_0$ 时，若函数 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，则当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)g(x)$(　　)．

A. 必有极限　　B. 可能有极限，也可能无极限

C. 必无极限　　D. 有极限则极限必为零

(2) 无穷小量就是(　　)．

A. 比任何数都小的量　　B. 零

C. 以零为极限的函数　　D. 以上三种情况都不是

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ x+1 & x \geqslant 1 \end{cases}$，则函数 $f(x)$ 当 $x \to 1$ 时的极限值是(　　)．

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. 不存在

(4) 设 $x \to 0$ 时，$e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　　)．

A. 5　　B. 4　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 2