北大燕园

2016年 李正元·范培华

考研数学②

数学复习全书

数学二

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业

本书后附习题全解

中国政法大学出版社

2016年李正元·范培华考研数

数学

数学二

复习全书

主编　北京大学　李正元
　　　北京大学　尤承业

中国政法大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

李正元·范培华考研数学:数学复习全书．数学二/李正元,尤承业主编．-北京:中国政法大学出版社,2015.1
ISBN 978-7-5620-5809-0

Ⅰ．①李…　Ⅱ．①李…②尤…　Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 303277 号

出 版 者	中国政法大学出版社
地　　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　　址	http://www.cuplpress.com（网络实名:中国政法大学出版社）
电　　话	(010)58908285(总编室)　58908433(编辑部)　58908334(邮购部)
承　　印	北京旺都印务有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	32.25
字　　数	860 千字
版　　次	2015 年 1 月第 1 版
印　　次	2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价	51.80 元

前　言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学，达到硕士学习阶段应具备的数学能力，提高考研应试水平，以合格的数学成绩任国家挑选，作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神，深入研究了近年来考研命题的特点及动态，并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验，编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学历年试题解析》、《考研数学全真模拟经典400题》等。在编写时，作者特别注重与学生的实际相结合，注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下五个部分构成：

一、知识结构网络图——编写该部分的目的主要让考生弄清各知识点之间的相互联系，以便对各章内容有一个全局性的认识和把握。

二、内容概要与重难点提示——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点，以便在复习中有的放矢，提高效率。

三、考核知识要点讲解——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述，并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析，指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误，同时给出了相应的注意事项，以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

四、常考题型及其解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类，归纳总结了各种题型的解题方法，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能综合、灵活地解决问题。

五、题型训练——本部分精选了适量的自测题，并附有详细解答。只有适量的练习才能巩固所学知识，复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典400题》一书中，以供考生选用。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编　者

2015年1月

目　录

第二篇 线性代数

附：全书题型训练试题解答

第一篇　高等数学

第一章　极限、连续与求极限的方法

知识结构网络图

- 函数，极限，无穷小与连续性
  - 函数
    - 函数概念
    - 几类常见的函数（单调函数、奇偶函数、周期函数、有界函数）
    - 复合函数与反函数
    - 常见的函数形式（初等函数、分段函数、隐函数，由参数方程确定的函数、由变限积分确定的函数）
  - 极限
    - 定义与性质，判别极限存在与不存在的方法
    - 求极限的方法
      - 函数极限
        - 直接用运算法则（四则运算，幂指数运算，代入法）
        - 未定式
          - “$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型（恒等变形相消后代入，洛必达法则，变量替换与重要极限，泰勒公式，等价无穷小因子替换）
          - 其他未定式（转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型）
        - 分别求左、右极限
      - 数列极限
        - 递归数列（$x_{n+1}=f(x_n)$）
        - n 项和的数列（恒等变形，夹逼法，化为定积分，级数求和）
        - n 项积的数列（恒等变形，转化为n 项和）
        - 一般情形（转化为函数极限，恒等变形，夹逼法）
  - 无穷小
    - 概念与性质（高阶、低阶、同阶、等价、阶数）
    - 无穷小阶的比较与确定无穷小的阶的方法（洛必达法则，阶的运算性质，泰勒公式）
  - 连续性
    - 连续与间断的定义
    - 判断连续性与间断点类型的方法（初等函数连续性，连续函数运算性质，按定义）
    - 连续函数的性质

内容概要与重难点提示

（一）微积分中研究的对象是函数　函数概念的实质是变量之间确定的对应关系．变量之间是否

有函数关系,就看是否存在一种对应规则,使得其中一个量或几个量定了,另一个量也就被唯一确定,前者是一元函数,后者是多元函数.

函数这部分的重点是:复合函数、反函数和分段函数、函数记号的运算、基本初等函数与其图象、初等函数的概念等.

(二)极限是微积分的理论基础 研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限,如连续、导数、定积分等等.由此可见极限的重要性.本章的重点内容是极限.既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件,又要能准确地求出各种极限.求极限的方法很多,综合起来主要有:

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则; ② 利用函数的连续性;
③ 利用变量替换与两个重要极限; ④ 利用等价无穷小因子替换;
⑤ 利用洛必达法则; ⑥ 分别求左、右极限;
⑦ 数列极限转化为函数极限; ⑧ 利用适当放大缩小法;
⑨ 对递归数列先证明极限存在(常用到"单调有界数列有极限"的准则),再利用递归关系求出极限;
⑩ 利用导数的定义求极限; ⑪ 利用泰勒公式; ⑫ 利用定积分求 n 项和式的极限.

(三)无穷小就是极限为零的变量 极限问题可归结为无穷小问题.极限方法的重要部分是无穷小分析,或说无穷小阶的估计与分析.要理解无穷小及其阶的概念,学会比较无穷小的阶及确定无穷小阶的方法,会用等价无穷小因子替换求极限.

(四)我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数 由于函数的连续性是通过极限定义的,所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限.因此这部分也是本章的重点.要掌握判断函数连续性及间断点类型的方法,特别是分段函数在分界点处的连续性.

(五)有界闭区间上连续函数的基本性质 函数的其他许多性质都与函数的连续性有关,因此我们要了解有界闭区间上连续函数的重要性质,包括:有界性定理,最大值、最小值定理和中间值(介值)定理,并会应用这些性质.

考核知识要点讲解

一、极限的概念与性质

(一)极限的定义

【定义1.1】(数列的极限) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists$ 正整数 N,使得当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

若数列 $\{x_n\}$ 存在极限(有限数),又称数列 $\{x_n\}$ **收敛**,否则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

【定义1.2】(函数的极限) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists$ 正数 X,使得当 $|x|>X$ 时就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

类似可定义单侧极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

【注】 在函数极限情形下 $x\to\infty$ 与数列极限中 $n\to\infty$ 的意义不同,前者是指 $x\to\pm\infty$,而后者是指 $n\to+\infty$.

【定义1.3】(函数的极限) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists$ 正数 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

类似可定义 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时左极限 $f(x_0-0)$ 与右极限 $f(x_0+0)$:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A,\quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A.$$

（二）极限的基本性质

▶1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$， $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

（1）若 $a > b$，则 $\exists N$，当 $n > N$ 时有 $x_n > y_n$；（2）若 $n > N$ 时 $x_n \geqslant y_n$，则 $a \geqslant b$.

【定理 1.2】（收敛数列的有界性） 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 有界（即 $\exists$ 常数 $M > 0$，$|x_n| \leqslant M$，$n = 1,2,\cdots$）.

▶2. 函数极限的基本性质

【定理 1.3】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$.

（1）若 $A > B$，则 $\exists \delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$；

（2）若 $\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geqslant g(x)$，则 $A \geqslant B$.

【注】 若（2）中的条件"$f(x) \geqslant g(x)$"改为"$f(x) > g(x)$"，其他条件保持不变，则结论仍是"$A \geqslant B$".

【推论】（极限的保号性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

（1）若 $A > 0$，则 $\exists \delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$；

（2）若 $\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geqslant 0$，则 $A \geqslant 0$.

【定理 1.4】（存在极限的函数局部有界性） 设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界，即 $\exists \delta > 0$ 与 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

【注】 其他极限过程如 $x \to x_0 + 0$，$x \to x_0 - 0$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 等也有类似的结论.

（三）两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \text{ 或 } \lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \tag{1.1}$$

【例 1.1】 判断下列结论是否正确，并证明你的判断.

（Ⅰ）若 $x_n < y_n (n > N)$，且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$， $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则 $A < B$；

（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 (a,b) 有定义，又 $\exists c \in (a,b)$ 使得极限 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 有界；

（Ⅲ）若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，则 $\exists \delta > 0$ 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

【解】 （Ⅰ）不正确. 在题设下只能保证 $A \leqslant B$，不能保证 $A < B$. 例如，$x_n = \dfrac{1}{n}$，$y_n = \dfrac{2}{n}$，则 $x_n < y_n$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

评注 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在，则对不等式 $x_n < y_n (n > N)$ 两边当 $n \to \infty$ 时取极限，除保持不等号外还应加上等号，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

（Ⅱ）不正确. 这时只能保证：$\exists$ 点 c 的一个空心邻域 $U_0(c,\delta) = \{x \mid 0 < |x - c| < \delta\}$ 使 $f(x)$ 在 $U_0(c,\delta)$ 中有界，一般不能保证 $f(x)$ 在 (a,b) 有界. 例如：$f(x) = \dfrac{1}{x}$， $(a,b) = (0,1)$，取定 $c \in (0,$

1)，则 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \dfrac{1}{c}$，但 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界．

（Ⅲ）正确．因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$，由存在极限的函数的局部有界性 $\Rightarrow \exists\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界．

二、极限存在性的判别

（一）极限存在的两个准则

1. 夹逼定理

【定理 1.5】（数列情形）　若 $\exists N$，使得当 $n > N$ 时有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

【定理 1.6】（函数情形）　若 $\exists\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，又 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$．

【注】　其他极限过程也有类似的结论．

2. 单调有界数列必收敛定理

【定理 1.7】　若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界，即 $x_{n+1} \geqslant x_n \quad (n = 1,2,\cdots)$，并存在一个数 M 使得对一切的 n 有 $x_n \leqslant M$，则 $\{x_n\}$ 收敛．即存在一个数 a，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且有 $x_n \leqslant a \ (n = 1,2,\cdots)$．

若数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界，即 $x_{n+1} \leqslant x_n (n = 1,2,\cdots)$，并存在一个数 m 使得对一切的 n 有 $x_n \geqslant m$，则 $\{x_n\}$ 收敛．即存在一个数 a，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且有 $x_n \geqslant a \ (n = 1,2,\cdots)$．

（二）极限存在的一个充要条件

【定理 1.8】（函数极限存在的充要条件）　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$．

对于分段函数 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x < x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$ 考察 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在就需要分别求 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} h(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} g(x)$，并确定二者是否相等．

【定理 1.9】（数列极限存在的充要条件）　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = A$．

【例 1.2】　设 $f(x) = \begin{cases} 2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ \dfrac{\ln(1 + ax^2)}{x\sin x}, & x < 0, \end{cases}$ 又 $a \neq 0$，问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在．

【分析】　分别求右、左极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$，由 $f(0+0) = f(0-0)$ 定出 a 值．

【解】　$f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} 2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0+}\arctan\dfrac{1}{x} = \pi$，

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+ax^2)}{ax^2}\cdot\frac{ax^2}{x\sin x}\right] = 1\cdot a\cdot 1 = a(a \neq 0),$$

由 $f(0+0)=f(0-0)$，得 $a=\pi$．因此，当且仅当 $a=\pi$ 时，存在 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\pi$．

评注　注意在本题中当 $a=\pi$ 时极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\pi$，即当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限存在，但此极限值与函数值 $f(0)=1$ 并不相等，其原因在于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 描述的是当 $x\to 0$ 但 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势，它与函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的函数值 $f(0)$ 是多少没有关系．

【例 1.3】　$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}}=$

(A)　0．　　(B)　$-\infty$．　　(C)　$+\infty$．　　(D)　不存在但也不是 ∞．

【分析】　因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$，$\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$，故要分别考察左、右极限．由于

$$\lim_{x\to 1+0}(x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \xlongequal{t=\frac{1}{x-1}} \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1-0}(x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \xlongequal{t=\frac{1}{x-1}} \lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}=0,$$

因此应选(D)．

（三）证明函数 $f(x)$ 的极限不存在常用的方法

方法 1° 若 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在．当 $x\to\infty$ 时，对含有 $a^x(a>0,a\neq 1)$ 或 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$ 的函数极限，一定要对 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 分别求极限．若两者的极限值相等，则 $x\to\infty$ 时极限存在，否则不存在．

方法 2° 若 $\exists x_n\to x_0$，但 $x_n\neq x_0$ 的数列 $\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 不存在或有两个满足 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，$y_n\to x_0(y_n\neq x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在．

方法 3° 利用结论：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；若又有 $A\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 不存在．

【例 1.4】　证明：（Ⅰ）$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在；（Ⅱ）设 $f(x)=\dfrac{\int_0^x \sin\frac{1}{x}\cos t^2\,dt}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在．

【证明】　（Ⅰ）取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则均有 $x_n\to 0,y_n\to 0\ (n\to\infty)$，但

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=1,\text{因此}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{不存在}.$$

评注　类似可证：$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在．

（Ⅱ）已知 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$，其中 $g(x)=\int_0^x\cos t^2\,dt$，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\cos x^2=1\neq 0,$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在．

评注　这里用到了变限积分的求导公式：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则对任意 $x\in[a,b]$，有

$$\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]'=f(x).$$

三、求极限的方法

(一) 利用极限的四则运算法则与幂指数运算法则求极限

▶1. 极限的四则运算法则及其推广

【定理 1.10】(四则运算法则) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B,\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

四则运算法则的推广:

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,且当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界,则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=0$.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\ (+\infty,-\infty)$,且当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty\quad(+\infty,-\infty).$$

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\ (+\infty)$,且当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $|g(x)|\geqslant A>0\ (g(x)\geqslant A>0)$,或

$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq 0\ (A>0)$,或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty\ (+\infty)$,则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty\quad(+\infty)$.

(4) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$,又当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $f(x)g(x)>0$,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty.$$

【注】 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不存在也不为 ∞,则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$ 不存在也不为 ∞;若又有 $A\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 均不存在也不为 ∞. 但是,当 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 都不存在且不为 ∞ 时,求 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 的极限则必须作具体分析.

▶2. 幂指数函数的极限运算法则及其推广

【定理 1.11】(幂指数运算法则) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B\ (A>0)$.

幂指数运算法则的推广:

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$,且 $A\neq 1$(或 $+\infty$), $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$,则

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}0, & 0<A<1,\\ +\infty, & A>1(\text{或 }+\infty).\end{cases}$$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $f(x)>0\ (0<|x-a|<\delta)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B\neq 0$(或 $\pm\infty$),则

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}0, & B>0(\text{或 }+\infty),\\ +\infty, & B<0(\text{或 }-\infty).\end{cases}$$

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq 0$(或 $\pm\infty$),则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}+\infty, & A>0(\text{或 }+\infty),\\ 0, & A<0(\text{或 }-\infty).\end{cases}$

▶3. 对 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 等各类未定式不能直接用上述运算法则.

最基本的是 $\dfrac{0}{0}$ 与 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,其他类型应经恒等变形转化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

求$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型极限的方法有多种(参看题型一),其中一种重要技巧是设法消去分子、分母中的极限为零或∞因子,于是转化为可以直接用四则运算法则的情形(后面还要介绍其他方法,如洛必达法则).

【例 1.5】 求 $w=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x(2e^x+1)}{[1+(e^x+1)^2](1+e^x)}$.

【解】 这是求$\frac{\infty}{\infty}$型极限,用相消法,分子、分母同除以$(e^x)^2$得

$$w=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x+1}\cdot\frac{2+e^{-x}}{e^{-2x}+(1+e^{-x})^2}=0\times2=0,$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x+1}=0$(用洛必达法则).

(二)利用函数的连续性求极限

1. 设$f(x)$在$x=a$连续,按定义就有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.因此若能用除定义外某种方法判断$f(x)$在$x=a$连续,对连续函数求极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$就是用代入法求函数值$f(a)$.

2. 一切初等函数在其定义域区间上连续.因此,若$f(x)$是初等函数,且a属于其定义域,则

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

3. 设$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$,若补充定义$g(a)=A$,则$g(x)$在$x=a$连续.若又有$y=f(u)$在$u=A$处连续,则由复合函数的连续性得$\lim\limits_{x\to a}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to a}g(x)]=f(A)$.

(三)利用变量替换法与两个重要极限求极限

1. 通过变量替换,把求某个极限转化为求另一个极限,若后者能算得出来,问题就解决了.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ 且 $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f[\varphi(x)]\xlongequal{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$.

(若把$x\to+\infty$改为$x\to-\infty$或$x\to x_0$上述结论仍成立.)

(2) 设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$且$f(u)$在$u_0$连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]\xlongequal[x\to x_0\text{时}\ u\to u_0]{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$.

2. 重要极限与变量替换法相结合可求下列极限:

(1) 诸如:设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\ln[1+\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1,$$

$$\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}}=\lim_{x\to x_0}\left([1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)^{\psi(x)}=e^A,$$

(2) 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,则求$1^\infty$型极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{g(x)[f(x)-1]}=e^A,$$

转化为求$0\cdot\infty$型极限$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)[f(x)-1]=A$.

【注】 上述极限过程$x\to x_0$改为其他情形也有类似结论.

【例 1.6】 求极限 $w = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^x$.

【解】 属 1^∞ 型. **方法 1°** $w = \lim\limits_{x\to\infty}2\left[\left(1+\frac{1}{x}2^{-\frac{1}{x}}\right)^{x\cdot 2^{\frac{1}{x}}}\right]^{2^{-\frac{1}{x}}} = 2\cdot e^{2^0} = 2e$.

方法 2° $w = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)} = e^A$,而

$$A = \lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1\right)$$

$$\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to 0}\frac{t+2^t-1}{t}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{t\to 0}(1+2^t\ln 2) = 1+\ln 2,$$

其中 $\ln\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left[1+\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1\right)\right] \sim \frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1\,(x\to\infty)$,故 $w = e^{1+\ln 2} = 2e$.

(四) 利用等价无穷小因子替换求极限

若 $x\to a$ 时,无穷小 $\alpha(x)\sim\alpha^*(x)$,$\beta(x)\sim\beta^*(x)$$\left(\text{即}\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha^*(x)}=1,\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta^*(x)}=1\right)$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)u(x)}{\beta(x)v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha^*(x)u(x)}{\beta^*(x)v(x)}. \tag{1.2}$$

(等式两边其中之一极限存在或为 ∞,则另一也是且相等.)

该结论表明:在求极限过程中等价无穷小因子可以替换.

利用等价无穷小因子替换求极限可大大减少计算量.但在利用等价无穷小因子替换求极限时应注意下面两点:

(1) 只在求极限的乘除运算中使用等价无穷小因子替换,不要在求极限的加减运算中使用,在加减法中等价无穷小的替换是有条件的,这里我们不去讨论.(参见题型训练四、3 题.)

(2) 要熟练应用第四节中的(1.3)所列常见的等价无穷小.

【例 1.7】 求下列极限:

(Ⅰ)$w = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^4}-1}{1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})}$; (Ⅱ)$w = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}$.

【解】 (Ⅰ) 注意 $x\to 0$ 时,$1-\cos(x\sqrt{1-\cos x}) \sim \frac{1}{2}x^2(1-\cos x) \sim \frac{1}{4}x^4$,$e^{x^4}-1\sim x^4 \Rightarrow$

$$w = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\frac{1}{4}x^4} = 4.$$

评注 设当 $x\to a$ 时,$\alpha\sim\beta$,$\beta\sim\gamma$,则 $\alpha\sim\gamma\,(x\to a)$.

(Ⅱ) 因为 $\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1 \sim \ln\left[1+\left(\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1\right)\right] = 2x\ln\frac{1+\cos x}{2} = 2x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right) \sim$

$2x\cdot\frac{\cos x-1}{2} \sim x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{2}x^3\,(x\to 0)$,$\ln(1+2x^3)\sim 2x^3\,(x\to 0)$,所以

$$w = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{2x^3} = -\frac{1}{4}.$$

(五) 利用洛必达法则求未定式的极限

求$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式更常用的方法是用洛必达法则. 具体方法如下:

【定理 1.12】 设(i) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0\ (\infty)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0\ (\infty)$;(ii) $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=a$ 的空心邻域可导, $g'(x)\neq 0$;(iii) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, 则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$, 其中 A 可以是有限数也可以是 ∞ 或 $\pm\infty$.

【注】 ① 将 $x\to a$ 改为 $x\to a+$, $x\to a-$, 或 $x\to\infty$, $+\infty$, $-\infty$ 等也有相应的洛必达法则.

② $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的洛必达法则可推广成:(i) 设$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, 条件(ii)与(iii)不变, 则结论也不变, 即$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$(不必要求$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$).

③ 数列极限不能直接用洛必达法则. 如用, 得先转化成连续变量的极限即函数极限.

④ 应用上述法则时应注意:

1° 要验证应用法则的条件, 尤其是条件(i)是必须要验证的, 不是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型就不能用洛必达法则. 例如, 以下运算是错误的:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\cos x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{1}=1.$$

事实上 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)=\infty$. 错误的原因在于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\cos x}{x}$ 既不是$\frac{0}{0}$型也不是$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式.

2° 仅从 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在也不为 ∞ 不能断定 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在, 此时应改用其他方法求解.

例如, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$, 但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\cos x)$ 不存在.

3° 若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$还是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型, 则可继续用洛必达法则. 只要满足条件, 一直可用到求出极限为止.

4° 其他类型的未定式($0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 等)先化成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型, 再用洛必达法则.

5° 使用洛必达法则解题时, 为了避免复杂的计算, 提高效率, 应尽可能地综合运用变量替换、等价无穷小因子替换、恒等变形以及函数的连续性与极限的四则运算法则、换元法(即复合函数求极限法则)等方法.

【例 1.8】 求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}$.

【解】 属$\frac{0}{0}$型. 先作恒等变形

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\right)}{x\sin^3 x}.$$

然后用等价无穷小因子替换: $x\to 0$ 时

$$\sin^3 x\sim x^3,\quad \ln\left(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\right)\sim\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\sim x^2-\sin^2 x,$$

于是

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

最后用洛必达法则得

$$w = 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

【例 1.9】 求 $w = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

【解】 属 $\infty - \infty$ 型. 先通分化成 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式,则有 $w = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}$.

直接用洛必达法则比较麻烦,若注意到

$$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad 从而\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$$

这表明 $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x\ (x\to 0)$. 因此对分母先作等价无穷小因子替换后再用洛必达法则,并利用 $\ln(1+x) \sim x\ (x\to 0)$ 就有

$$w = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x} - 1\right) = -\frac{1}{2}.$$

评注 也可用如下方法求当 $x\to 0$ 时 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的等价无穷小:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \ln(1+x+\sqrt{1+x^2}-1) \sim x+\sqrt{1+x^2}-1 \sim x\quad (x\to 0),$$

在以上计算中利用了 $\sqrt{1+x^2}-1 \sim \dfrac{1}{2}x^2\quad (x\to 0)$.

【例 1.10】 求 $w = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2}$.

【分析】 属 1^∞ 型. 对于指数型未定式,总可先用公式 $u^v = e^{v\ln u}$,然后再用洛必达法则,并注意 $\arctan x \sim x(x\to 0)$.

【解】 由于 $\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right)}$,而

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\ln|\arctan x| - \ln|x|) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\arctan x}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x^2)}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\arctan x}{x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-2x\arctan x}{3x\cdot x} = -\frac{1}{3}.$$

或者 $\ln\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right) = \ln\left(\dfrac{\arctan x}{x} - 1 + 1\right) \sim \dfrac{\arctan x - x}{x}\quad (x\to 0)$,若用该等价无穷小因子替换(可简化计算),则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{3}.$$

因此 $w = e^{-\frac{1}{3}}$.