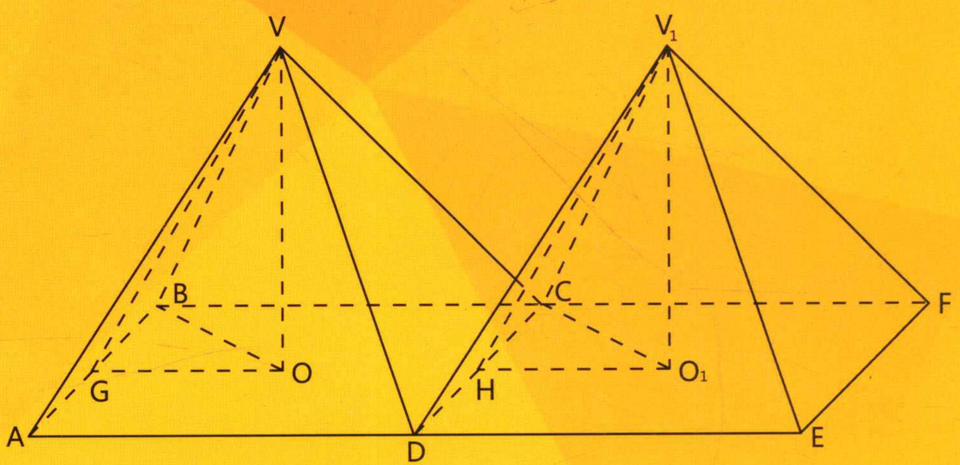
"十二五"普通高等教育规划教材

数学建模与数学实验

主　编　徐茂良
副主编　刘　睿



国防工业出版社
National Defense Industry Press

数学建模与数学实验

主　编　徐茂良
副主编　刘　睿

国防工業出版社
·北京·

内容简介

本书针对高职高专学生只学了“必需”“够用”的高等数学基础知识的基本情况，根据编者多年的教学经验，引导学生先从使用计算机开始，学习 MATLAB、LINGO 软件的基本用法。不讲数学理论，只讲建模方法，并会用软件求解。书中许多例题就是全国专科数学建模竞赛题简化而来，能激发学生学习的兴趣。

本书介绍了 MATLAB、LINGO 的用法，包括初等模型、微积分模型、微分方程模型、代数模型、数学规划模型、评价模型和回归模型，例题有详细的求解程序和计算结果。课后习题有比较详细的提示。

本书精选了大量难度适中的案例，叙述严谨，可读性强，可作为高等院校各专业本、专科、高职高专“数学建模”课程的教材，也可以作为数学建模竞赛培训以及数学建模课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模与数学实验 / 徐茂良主编. —北京：国防工业出版社，2015.1

ISBN 978-7-118-09915-7

Ⅰ. ①数... Ⅱ. ①徐... Ⅲ. ①数学模型②高等数学－实验 Ⅳ. ①O141.4②O13－33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 312315 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 8¾ **字数** 202 千字

2015 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—3000 册 **定价** 25.00 元

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前　言

数学建模是联系数学与实际问题的桥梁，是数学在各个领域广泛应用的媒介，是数学科学技术转化的主要途径，数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视，它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一。

目前，有关数学建模方面的教材已经有很多，但普遍是针对重点本科层次的，知识内容较深，不适合初学者使用。编者多年来一直在讲台第一线从事高职高专数学建模教学，深知教学难度。编者参阅了大量优秀模型和书籍，磨练出这本适合高职层次的教材。

本书的特点如下：

(1) 让学生从玩计算机做起。大学生对计算机的兴趣是广泛的，引导学生下载一个 MATLAB 简化版软件放在 U 盘里插上计算机就可以使用。学生可以先从数值计算、绘图、简单的微积分、线性代数运算练起，使他们感受到计算机的魅力，激发出学习数学建模的兴趣。

(2) 不讲数学理论，只讲解初等模型、微积分模型、微分方程模型、数学规划模型、代数模型、评价模型、回归模型中最常用的基本建模和求解方法，并能用 MATLAB、LINGO 编程求解。

(3) 为了使学生看到建模竞赛并不可怕，把大量全国竞赛题经过简化作为例题讲解。让学生觉得“我能行!”鼓励学生积极学习、勇于参赛。

(4) 作业题力图与例题配套。考虑学生学习数学的课时较少，书中大多数作业题给出了比较详细的提示或说明。

本书参考了国内外出版的一些教材，见本书所附参考文献，在此表示谢意。鉴于编者水平所限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编者
2014.12

目　　录

第一章　数学建模概述

数学与计算机的结合，形成了数学技术，这使得数学的应用越来越广泛。随着数学建模竞赛的开展和“数学建模”课程的普及，越来越多的人认识到数学建模教育对培养学生的重要性。

数学模型是指用数学的语言和工具对现实世界的部分信息进行翻译、归纳后形成的图表、公式等。对数学模型进行分析、求解后再回到现实世界，可使数学模型的结论经过现实的检验。若检验结果基本正确，模型可用；否则要重新修改模型。

所谓数学实验，就是选择适当的算法和数学软件，将数学问题在计算机上加以讨论、实验，得到各种结果，并使结果可视化。

数学建模的大体过程如下：

1. 模型准备

模型准备指查阅大量的资料，包括请教专家，了解问题的实际背景，搜集各种相关信息。对背景了解得越透彻，建模越贴近实际。

2. 模型假设

我们不可能也没有必要将实际对象的所有因素都考虑到模型中去。应对模型简化，尽量抓住问题的基本实质。模型假设极具挑战性，它要求既贴近现实，又贴近数学。通过假设，可以把主要影响因素的关系清晰地描述出来。

3. 模型建立

模型建立指将问题的主要变量用数学字母来表示，构成实际问题的数学描述，建立相关的数学模型。这要求学生有一定的数学基础知识，如初等数学、微积分、微分方程、线性代数、统计学、运筹学、图论、排队论等多方面的知识。

4. 模型求解

模型求解指利用数学方法、数学软件，求出数学模型的结果。

5. 模型分析

模型分析指对模型定性或定量的结果给出数学上的预测，并对结果进行误差分析、灵敏度分析等。

6. 模型检验

模型检验指把模型求解的结果放回到实际问题数据中，验证模型的可靠性和实用性，说明产生误差的原因，并确定是否对模型进行补充修正。

7. 模型的推广

如果模型是适用的，那么它除了解决题目中的现实问题还可以解决哪些相关的问题呢？下面以段明宏、杨建春、王艳同学做过的题目（全国 2 等奖）说明上述过程。

输油管道最优布置模型

摘要:本模型以输油管道铺设总费用最小为目标,解决了在此目标下的最佳中转运输站点的设置和管道布置方案问题;主要运用了多元函数无条件极值理论和三角形的费马点理论以及初等数学知识,借助 MATLAB 软件,根据炼油厂 A、B 之间的距离和它们与铁路干线的距离不同,将问题 1 分成 3 种情况建立了 3 个一般模型,然后在一般模型中进一步讨论了共用管道费用和非共用管道费用相同和不同的情况,将方案分成了 2 类,从而全面、准确地得出了解决该问题的 3 个一般模型。

针对具体的问题 2 和问题 3,利用问题 1 的重要结论和费马点的判断理论,分别建立了 2 个三元函数无条件极值模型。

对于问题 2,得出了最小总费用为 $Z_{\min}=283.2013$(万元),给出了最佳布线方案:管道节点 P 的坐标为 $P(5.45,1.85)$,站点 C 的坐标为 $C(5.45,0)$,最佳管道铺设路线为 AP,BB',BP,CP。对于问题 3,得出了最小总费用为 $Z_{\min}=252.4737$(万元),给出了最佳布线方案:AP、$B'P$、BB' 三段铺设非共用管道,CP 段铺设共用管道,车站点 C 的坐标确定为 $C(6.7321,0)$,管道节点 P 的坐标确定为 $P(6.7321,0.1401)$。

关键词:输油管道最优布置;多元函数无条件极值;三角形的费马点

1.1 问题重述

某油田计划在铁路线一侧建造两家炼油厂,同时在铁路线上增建一个车站,用来运送成品油。由于这种模式具有一定的普遍性,油田设计院希望建立管线建设费用最少的一般数学模型与方法。

(1) 针对两炼油厂到铁路线距离和两炼油厂间距离的各种不同情形,提出设计方案。在方案设计时,若有共用管线,应考虑共用管线费用与非共用管线费用相同或不同的情形。

(2) 设计院目前需对一更为复杂的情形进行具体的设计。两炼油厂的具体位置如图 1.1所示,其中 A 厂位于郊区(图中的Ⅰ区域),B 厂位于城区(图中的Ⅱ区域),两个区域的分界线用图中的虚线表示。图 1.1 中各字母表示的距离分别为 $a=5,b=8,c=15,l=20$(km)。

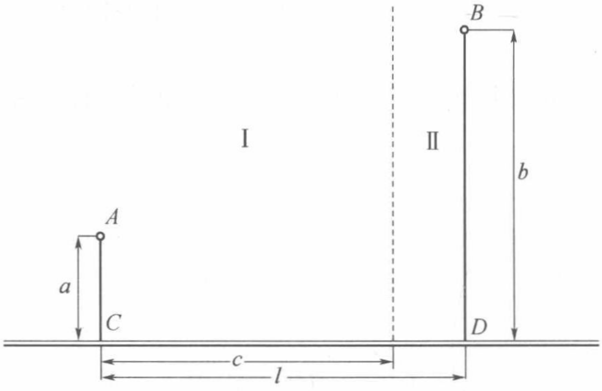


图 1.1

若所有管线的铺设费用均为7.2万元/km。铺设在城区的管线还需增加拆迁和工程补偿等附加费用,为对此项附加费用进行估计,聘请3家工程咨询公司(其中公司一具有甲级资质,公司二和公司三具有乙级资质)进行了估算。估算结果如表1.1所列。

表1.1

工程咨询公司	公司一	公司二	公司三
附加费用/(万元/km)	21	24	20

请为设计院给出管线布置方案及相应的费用。

(3) 在该实际问题中,为进一步节省费用,可以根据炼油厂的生产能力,选用相适应的油管。这时的管线铺设费用将分别降为输送 A 厂成品油的5.6万元/km,输送 B 厂成品油的6.0万元/km,共用管线费用为7.2万元/km,拆迁等附加费用同上。请给出管线最佳布置方案及相应的费用。

1.2 模型假设

(1) 炼油厂 B 到铁路干线的距离大于等于炼油厂 A 到干线的距离。

(2) 站点 C 在铁路干线上。

(3) 共用的单位长度的管道铺设费用 n 大于或等于非共用的单位长度的管道铺设费用 m。

(4) 炼油厂 B、站点 C、管道节点 P、管道线与城郊区竖直分界线的交点 B' 均在第一象限,炼油厂 A 点在 y 轴正半轴上。

(5) 铁路干线在 A、B 两厂附近为直线。

(6) 炼油厂 A、B,站点 C,管道节点 P,以及点 B' 之间的所有管道均是直线。

(7) 炼油厂 A、B,站点 C,管道节点 P,以及点 B' 共面。

1.3 符号说明

(1) 以下符号是全文公用符号,不同模型的中具体符号详见各个模型内。

m:非共用的单位长度的管道铺设费用。

n:共用的单位长度的管道铺设费用。

Z:管道铺设、拆迁费和工程补偿等附加费的总费用。

P:共用管道和非共用管道的节点。

C:铁路上待修建的车站站点。

B':管道线与城郊区竖直分界线的交点。

(2) 在原问题重述中,如果问题2中的坐标图中的字母与本论文中的其他字母有悖,以论文中的字母为准。

1.4 模型准备

1. 费马点定义

在一个三角形中,到3个顶点距离之和最小的点叫做这个三角形的费马点。

(1) 若$\triangle ABC$的3个内角均小于120°,那么3条距离连线正好平分费马点所在的周角。所以三角形的费马点也称为三角形的等角中心。

(2) 若三角形有一内角不小于120°,则此钝角的顶点就是距离和最小的点。

2. 费马点的判定

(1) 对于任意三角形$\triangle ABC$,设三角形内或三角形上有一点E,若$EA+EB+EC$有最小值,则E为费马点(见图1.2)。

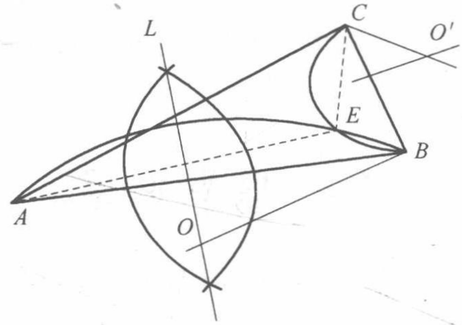


图1.2

(2) 如果三角形有一个内角大于或等于120°,这个内角的顶点就是费马点;如果3个内角均小于120°,则在三角形内部对3边张角均为120°的点,即为该三角形的费马点。

1.5 问题分析

1. 问题1的分析

针对炼油厂A和B与铁路干线的垂直距离以及A和B之间的距离不同,在铁路干线附近建立一个站点C,使得站点C能方便运输A、B两处的成品油,以总管线建设费用最小为目标函数,建立相应的数学模型。

(1) 就一般情形来看,A、B、C三点构成一个三角形,当$90°\leqslant\angle ACB<120°$或$\triangle ABC$为锐角三角形时,问题就转化为在$\triangle ABC$内部找到一点$P$,使得$P$点到$A$、$B$、$C$连线距离之和最小。根据费马点定律知识可知,该数学问题可以充分利用该理论知识的性质和结论,建立最一般的模型1.1。

(2) 在$\triangle ABC$中,当$\angle ACB\geqslant120°$时,在$\triangle ABC$内部不存在费马点,根据费马点理论,此时费马点即为顶点C,而C点在铁路干线上,此问题就进一步转化为在铁路干线上寻找一点C',使得$|AC'|+|BC'|$最小,利用平面镜成像原理建立模型1.2,这是在模型1.1基础上的进一步完善。

(3) 在$\triangle ABC$中,当$\angle ACB<90°$且$\angle OAB>120°$时,在$\triangle ABC$内部也不存在费马点,根据费马点理论,此时费马点即为顶点A,而C点在铁路干线上,此问题又进一步转化为

在铁路干线上寻找一点 C'，使得 $|AC'|+|AB|$ 最小，利用点到直线的距离最短知识建立模型 1.3，这也是在模型 1.1 基础上的进一步完善。

根据题意，由管道铺设方案中是否含有共用管道，将各类模型对应的方案分成两类：第一类方案，不含共用管道；第二类方案，含有共用管道。

2. 问题 2 的分析

首先，针对给定的两炼油厂 A、B 的具体坐标位置，首先根据问题 1 的分析可知，在问题 2 中，郊区和城区的分界点 B' 与炼油厂 A 连线的最大仰角小于 30°，推导过程详见问题 2 的模型求解部分。由此判断问题 2 中在郊区部分的管线布置满足模型 1.1 的先决条件，从而主要用模型 1.1 求解问题 2。

其次，在城区内的管道铺设的单位长度的费用需要考虑拆迁和工程补偿等费用，三家公司的级别有异，所以需要用加权平均法处理，这里给定了公司一、二、三的权重系数分别为 0.4、0.3、0.3，使得城区管道单位长度的铺设费用为 21.6 + 7.2 = 28.8（万元），而郊区的所有管道的单位长度铺设费用均为 7.2（万元）。

最后，结合模型 1.1 和三元函数的无条件极值的必要条件建立问题 2 的数学模型。

3. 问题 3 的分析

为了进一步解决更加实际的问题，问题 3 给出在各个炼油厂的生产能力不同导致油管的输送的单位长度铺设费用不同，A 为 5.6，B 为 6.0，共用管道的单位长度铺设费用更大，为 7.2，同样以总的费用最小为目标，建立三元函数的无条件极值模型。

其次，问题 3 和问题 2 的其他条件完全相同，所以问题 3 即为问题 2 的模型的推广和应用。

1.6 模型建立与模型求解

1. 对问题 1 的模型建立和模型求解

1）模型 1.1

设定点 $A(0,y_A)$，$B(x_B,y_B)$ 为炼油厂建造点，车站点 $C(x_C,0)$ 共用管道节点 $P(x_P,y_P)$，其中点 C、P 为动点，铺设所有管道的总费用为 Z（千元）。如图 1.3 所示，$|PC|$ 为共用管道的长度，$|AP|$，$|BP|$ 为非共用管道的长度，假设 $|AP|$，$|BP|$ 两段每千米的铺设费用为 m（千元），$|PC|$ 段每千米的铺设费用为 n（千元）。

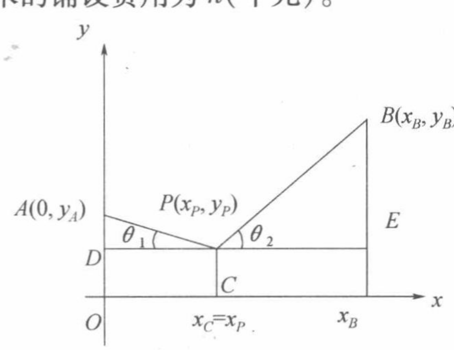


图 1.3

当$\triangle ABC$任一内角小于120°时，设$\triangle ABC$的费马点为$P(x_P,y_P)$，由三角形费马点理论可知，$P(x_P,y_P)$一定在$\triangle ABC$内部。再由初等数学知识易知，炼油厂A、B两点的坐标只需满足

$$\sqrt{3}(y_B-y_A)<x_B<\sqrt{3}(y_A+y_B) \tag{1.1}$$

下面建立满足式(1.1)的一般模型1.1。

(1) 模型1.1的建立。

$$Z_{\min}=m(|AP|+|BP|)+n|CP| \tag{1.2}$$

式中

$$|AP|=\sqrt{x_P^{\ 2}+(y_P-y_A)^2}$$
$$|BP|=\sqrt{(x_P-x_B)^2+(y_P-y_B)^2}$$
$$|CP|=\sqrt{(x_P-x_C)^2+y_P^{\ 2}}$$

不妨假设点$A(0,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$C(x_C,0)$，$P(x_P,y_P)$均在第一象限内，m为常数，且$m>0$，$n>0$。

(2) 模型1.1的总费用函数。

$$\begin{aligned}Z_{\min}&=f(x_P,y_P,x_C)_{\min}\\&=m\left(\sqrt{x_P^{\ 2}+(y_P-y_A)^2}+\sqrt{(x_P-x_B)^2+(y_P-y_B)^2}\right)+n\sqrt{(x_P-x_C)^2+y_P^{\ 2}}\end{aligned} \tag{1.3}$$

(3) 模型1.1求解。根据多元函数无条件极值的必要条件(即所有自变量的偏导数为零)，得

$$\begin{cases}Z'_{x_P}=m\left(\dfrac{x_P}{\sqrt{x_P^2+(y_P-y_A)^2}}+\dfrac{x_P-x_B}{\sqrt{(x_P-x_B)^2+(y_P-y_B)^2}}\right)+n\dfrac{x_P-x_C}{\sqrt{(x_P-x_C)^2+y_P^{\ 2}}} & (1.4)\\ Z'_{y_P}=m\left(\dfrac{y_P-y_A}{\sqrt{x_P^2+(y_P-y_A)^2}}+\dfrac{y_P-y_B}{\sqrt{(x_P-x_B)^2+(y_P-y_B)^2}}\right)+n\dfrac{y_P}{\sqrt{(x_P-x_C)^2+y_P^{\ 2}}} & (1.5)\\ Z'_{x_P}=n\dfrac{x_C-x_P}{\sqrt{(x_P-x_C)^2+y_P^{\ 2}}} & (1.6)\end{cases}$$

令$Z'_{x_P}=0$，$Z'_{y_P}=0$，$Z'_{x_C}=0$，则

$$\begin{cases}x_P=x_C\\ m(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=0\\ m(-\sin\theta_1-\sin\theta_2)+n=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_P=x_C & (1.7)\\ \cos\theta_1=\cos\theta_2 & (1.8)\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2=\dfrac{n}{m} & (1.9)\end{cases}$$

由$\cos\theta_1=\cos\theta_2$，得

当$\theta_1=\theta_2$时，有

$$\theta_1=\theta_2=\arcsin\left(\frac{n}{2m}\right)$$

当$\theta_1=-\theta_2$时，有

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = 0$$

与 $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = \frac{n}{m} > 0$ 矛盾,因此舍去 $\theta_1 = -\theta_2$。

所以得到唯一解为

$$\theta_1 = \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n}{2m}\right) \tag{1.10}$$

即

$$\begin{cases} x_P = x_C \\ \theta_1 = \theta_2 = \arcsin\frac{n}{2m} \end{cases}$$

是 $Z = f(x_P, y_P, x_C)$ 取得极值的必要条件。

由以上结论,此时的共用管道应该垂直于 x 轴,非共用管道 AP、BP 和水平线成的夹角是相等的,即有如下重要结论:

$$\begin{cases} x_P = x_C \\ \theta_1 = \theta_2 = \arcsin\frac{n}{2m} \end{cases}$$

下面根据此结论,求出管道节点 P 的坐标 $P(x_P, y_P)$,即求 x_P 和 y_P。

如图 1.3 所示,建立直角坐标系。

如图 1.3 所示,由 $\theta_1 = \theta_2 = \arcsin\frac{n}{2m}$ 以及反三角函数性质、直角三角形的相关性质,有:

在直角△ADP 中,满足

$$\frac{y_A - y_P}{|AP|} = \sin(\theta_1) = \sin\left(\arcsin\left(\frac{n}{2m}\right)\right) = \frac{n}{2m}$$

在直角△BEP 中,满足

$$\frac{y_B - y_P}{|BP|} = \sin(\theta_2) = \sin\left(\arcsin\left(\frac{n}{2m}\right)\right) = \frac{n}{2m}$$

不妨设 $\frac{n}{2m} = k$,解得

$$\begin{cases} x_P = \frac{\sqrt{1-k^2}}{2k}\left(y_A - y_B + \frac{kx_B}{\sqrt{1-k^2}}\right) \\ y_P = \frac{1}{2}\left(y_A + y_B - \frac{kx_B}{\sqrt{1-k^2}}\right) \end{cases}$$

(4) 求解结果讨论。根据非共用管道铺设的单位长度费用 m 与共用管道单位长度铺设费用 n 相同和不同两种情况,讨论如下:

① 当 $m = n$,即 $k = 1/2$ 时,管道节点的坐标为 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(y_A - y_B + \frac{\sqrt{3}x_B}{3}\right), \frac{1}{2}\left(y_A + y_B - \frac{\sqrt{3}x_B}{3}\right)\right)$。

② 当 $m<n$，即 $k=m/2n$ 时，管道节点的坐标为 $P\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{2k}\left(y_A-y_B+\frac{kx_B}{\sqrt{1-k^2}}\right),\frac{1}{2}\left(y_A+y_B-\frac{kx_B}{\sqrt{1-k^2}}\right)\right)$。

③ 不存在 $m>n$，因为假设部分已经假设 $m\leqslant n$。

方案1（属于第二类方案）：站点 C 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{2k}\left(y_A-y_B+\frac{kx_B}{\sqrt{1-k^2}}\right),0\right)$，管道节点 P 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{2k}\left(y_A-y_B+\frac{kx_B}{\sqrt{1-k^2}}\right),\frac{1}{2}\left(y_A+y_B-\frac{kx_B}{\sqrt{1-k^2}}\right)\right)$，管道铺设路线为 BP,AP,PC 三段，只有 PC 段为两个炼油厂的共用管道。其中，$\frac{n}{2m}=k$，如图 1.3 所示。

2. 模型 1.2

在 $\triangle ABC$ 中，当 $\angle ACB\geqslant120°$ 时，根据费马点理论，在 $\triangle ABC$ 内部不存在费马点，此时 $\triangle ABC$ 的费马点即为钝角顶点 C，利用初等数学知识可得，满足 $\angle ACB\geqslant120°$ 的条件等价于

$$x_B\geqslant\sqrt{3}(y_A+y_B) \tag{1.11}$$

设 $A(0,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，车站点 $C(x_C,0)$，如图 1.4 所示，管道铺设总费用为 Z，炼油厂 A,B 到车站 C 的管道的单位长度的费用为 m（千元/km），m 为常数，则

$$Z=[|AC|+|BC|]*m \tag{1.12}$$

欲求 $Z_{\min}$，只需要求 $[|AC|+|BC|]_{\min}$。

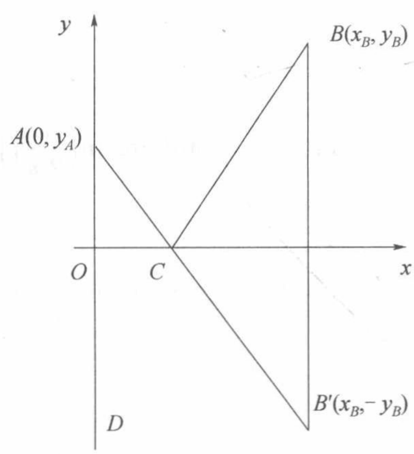


图 1.4

根据平面镜成像原理，易知 $[|AC|+|BC|]_{\min}=|AC|+|B'C|$ 且在直角 $\triangle ADB'$ 中，$OC/\!/B'D$，由平行线截得比例线段定理，解得

$$\frac{x_C}{x_B}=\frac{y_A}{y_A+y_B}\Rightarrow x_C=\frac{y_Ax_B}{y_A+y_B} \tag{1.13}$$

结论：(1) 车站点 $C\left(\frac{y_Ax_B}{y_A+y_B},0\right)$ 可由 y_A,y_B,x_B 确定。

(2) 两段非共用管道之和的最小值为

$$(|AC|+|BC|)_{\min}=|AB'|=\sqrt{x_B{}^2+(y_A+y_B)^2}$$

（3）总费用的最小值为

$$Z_{\min}=m(|AC|+|BC|)_{\min}=m\sqrt{x_B{}^2+(y_A+y_B)^2}$$

注意：当 $AB//x$ 轴，即 $y_A=y_B$，也即炼油厂 A 和 B 距离铁路干线同样远时，站点 C 的坐标显然为$\left(\frac{x_B}{2},0\right)$，结论(1)、(2)、(3)依然成立。

方案2(属于第一类方案)：根据 A、B 的坐标位置确定最佳的站点 C 的坐标为 $C\left(\frac{y_Ax_B}{y_A+y_B},0\right)$，管道建设路线为 AC、BC，无共用管道，如图 1.4 所示。

3. 模型 1.3

在△ABC 中，当∠$ACB<90°$且∠$OAB>120°$时，根据费马点理论，在△ABC 内部也不存在费马点，此时费马点即为钝角顶点 A。如图 1.5 所示，建立直角坐标系。

$$\tan\theta=\frac{y_B-y_A}{x_B}(y_B>y_A),d_{AB}=\sqrt{x_B^2+(y_B-y_A)^2}$$

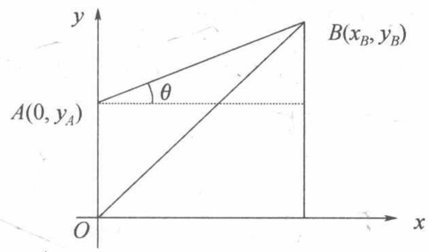


图 1.5

当 $\theta>30°$时，$\tan\theta=\frac{y_B-y_A}{x_B}>\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即满足 $y_B-y_A>\frac{\sqrt{3}}{3}x_B$；

当 $\theta>30°$时，∠$BAO>120°$且∠$ACB<90°$，必有 $d_{AB}>\frac{\sqrt{3}}{3}x_B{}'$。

据费马定律，此时费马点即为钝角顶点 A，AB 为定值，A 与动点 C 的最短距离即为 AO，所以最终建管道的总费用达到最小。

当满足条件$|AB|>\frac{\sqrt{3}}{3}x_B$ 时，总的建管费最小，即

$$Z_{\min}=m|AB|+n|AO|=md_{AB}+ny_A=m\sqrt{x_B^2+(y_B-y_A)^2}+ny_A$$

式中：m、n 分别为非共用管道与共用管道的单位长度费用(千元/km)，$m>0$，$n>0$。

此时，$Z_{\min}$完全由 x_B、y_A、y_B、m、n 决定。

特别地，当 $AB\perp x$ 轴时，上述模型依然成立。最小总费用为

$$\begin{aligned}Z_{\min}&=m|AB|+n|AO|=md_{AB}+ny_A=m\sqrt{(y_B-y_A)^2+ny_A}\\&=m(y_B-y_A)+ny_A=my_B+(n-m)y_A\end{aligned}\tag{1.14}$$

方案3(属于第二类方案)：站点 C 的坐标为(0,0)，管道铺设路线为 BA,AO 两段，其

中 AO 段为 A、B 炼油厂的共用管道，BA 段为 B 炼油厂的非共用管道。

1）问题 2 的模型建立

利用问题 1 中模型 1.1 的理论知识和结论，建立如图 1.6 所示的坐标系以及各个坐标点。

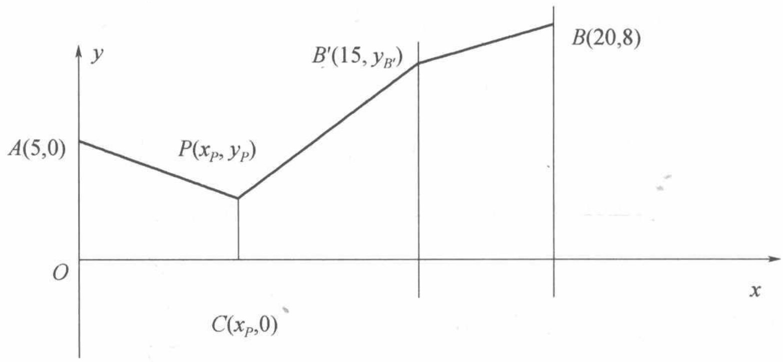


图 1.6

各点坐标为 $A(0,5)$，$B(20,8)$，$C(x_P,0)$，$B'(15,y_B{}')$。由题意可知，目标函数即为总的费用（包含管道铺设费用和拆迁、工程补偿费用等），即

$$Z_{\min} = 7.2(|AP| + |B'P| + CP) + 28.8|BB'| \tag{1.15}$$

代入各点坐标并化简，得总费用目标函数为

$$\begin{aligned} Z_{\min} &= f(x_P, y_P, y_B{}')_{\min} \\ &= 7.2\left(\sqrt{x_P{}^2 + (y_P - 5)^2} + \sqrt{(x_P - 15)^2 + (y_P - y_B{}')^2} + y_P\right) \\ &\quad + 28.8\sqrt{25 + (8 - y_B{}')^2} \end{aligned} \tag{1.16}$$

式中

$$0 < x_P < 15, \quad 0 < y_P, \quad 4 < y_B \leqslant 8$$

这是一个非线性的三元函数的无条件极值问题。

2）问题 2 的模型求解

利用 MATLAB 首先计算并判断出该三元函数黑塞矩阵判断极值点的充要条件，最后利用 MATLAB 解多元函数的无约束优化问题的命令[x,fval] = fminunc（'filename'，x0）求得

$$\begin{aligned} y_B{}' &= 7.3701 \\ x_P &= 5.4475 \\ y_P &= 1.8549 \\ Z_{\min} &= 283.2013 \end{aligned}$$

3）问题 2 的方案

管道节点 P 的坐标为 $P(5.45,1.85)$；站点 C 的坐标为 $C(5.45,0)$；管道铺设路线为 AP，BB'，$B'P$，CP；总费用 $Z=283.2013$（万元）。

4. 问题 3 的模型建立

基于问题 2 和问题 3 的条件基本相同，建立问题 2 的直角坐标系，可以得到如下三元

函数的无条件极值模型，即

$$
\begin{aligned}
Z_{\min} &= f(x_P, y_P, y_B')_{\min} \\
&= 5.6\sqrt{x_P^2+(y_P-5)^2}+6.0\sqrt{(x_P-15)^2+(y_P-y_B)^2} \\
&\quad +7.2y_P+27.6\sqrt{25+(8-y_B)^2}
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

式中

$$0 < x_P < 15, 0 < y_P, 4 < y_B \leqslant 8$$

1）问题 3 的模型求解

该模型的求解与问题 2 模型的求解类似。同样利用 MATLAB 解多元函数的无条件极值命令[x,fval] = fminunc(‘filename’,x0)解出，模型求解 Matlab 程序和运算结果略。

$$
\begin{aligned}
x_P &= 6.7321 \\
y_P &= 0.1401 \\
y_B' &= 7.2822 \\
Z_{\min} &= 252.4737
\end{aligned}
$$

即得到管道节点 P 的坐标为 $P(6.7321, 0.1401)$；城郊区分界线上的点 B' 的坐标为 $B'(7.2822, 0)$；车站点 C 的坐标为 $C(6.7321, 0)$；总费用最小值为 $Z_{\min} = 252.4737$（万元）。

2）问题 3 的管道布线方案

AP、$B'P$、BB' 三段铺设非共用管道，CP 段铺设共用管道，车站点 C 的坐标确定为 $C(6.7321, 0)$，管道节点 P 的坐标确定为 $P(6.7321, 0.1401)$。

1.7　模型检验与误差分析

1. 模型检验

对于问题 1 得出的三个一般模型，检验主要是从各个模型适用的先决条件和参数满足的取值范围来讨论。

1）对于模型 1.1 的检验

满足的先决条件是 $\sqrt{3}(y_B - y_A) < x_B < \sqrt{3}(y_A + y_B)$，参数 y_B, y_A, x_B, n, m 满足的条件是 $y_B > y_A > 0, x_B > 0, n \geqslant m > 0$，从参数的取值范围可以看出，它们都满足先决条件。

2）对于模型 1.2 的检验

满足的先决条件是 $\sqrt{3}(y_B + y_A) < x_B$，，参数 y_B, y_A, x_B, n, m 满足的条件是 $y_B > y_A > 0$，$x_B > 0, n \geqslant m > 0$，从参数的取值范围可以看出，它们都满足先决条件。

3）对于模型 1.3 的检验

满足的先决条件是 $\sqrt{3}(y_B - y_A) \leqslant x_B$，参数 y_B, y_A, x_B, n, m 满足的条件是 $y_B > y_A > 0$，$x_B > 0, n \geqslant m > 0$，从参数的取值范围可以看出，它们都满足先决条件。

2. 误差分析

对于问题 2 和问题 3 优化模型，主要使用了不同的软件，即 MATLAB 和 LINGO，对求解结果进行误差分析，从求解结果可以看出，误差非常小。

对于问题2的误差计算:用 MATLAB 采用多元函数无条件极小值命令 fminunc 计算用 LINGO 软件采用非线性规划求解得到的计算对于问题3的误差计算与问题2类似。

1.8 模型评价和推广

1. 模型评价

该模型首先是根据费马点理论和多元函数无条件极值理论,从一般情况建立了模型1.1~1.3,并给出了3个一般模型满足的3个前提条件,根据炼油厂 A、B 的具体坐标位置,先判断满足哪个条件,然后直接利用对应的一般模型的重要结论和性质,建立问题2和问题3的最优管道布线方案模型,并层层递进,建立优化模型,逐步接近解决实际问题。

2. 模型推广

该模型具有很好的实用性,可以用于城市地下水管铺设、农场灌溉管道的铺设、交通流量路线布置等研究和参考。