普通高校“十二五”实用规划教材——公共基础系列

概率论与数理统计

（理科类）

马　毅　王竞波　岳晓宁　主　编
黄　光　牟桂彦　副主编

赠送
电子课件

清华大学出版社

普通高校“十二五”实用规划教材——公共基础系列

概率论与数理统计(理科类)

马　毅　王竞波　岳晓宁　主　编

黄　光　牟桂彦　副主编

清华大学出版社

北　京

内容简介

本书是一本高等学校非数学专业的概率论与数理统计课程的教材。全书共9章，分为两个部分。第一部分由第1～5章组成，讲授概率论的基础知识，包括随机事件、随机变量、随机向量及其分布、随机变量的数字特征和极限定理。第二部分是第6～9章，讲授样本与统计量、参数估计、假设检验、方差分析与线性回归分析。本书各章配有适量习题，书后附习题提示和解答。书末给出5个附表。本书力求使用较少的数学知识，强调数理统计概念的阐释，并注意举例的多样性。

本书可作为高等学校工科、农医、经济管理等专业的有关概率论与数理统计课程的教材，也可作为实际工作者的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(理科类)/马毅，王竞波，岳晓宁主编. --北京：清华大学出版社，2015
(普通高校“十二五”实用规划教材——公共基础系列)
ISBN 978-7-302-39092-3

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①马…　②王…　③岳…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第017126号

责任编辑：秦　甲　郑期彤
封面设计：刘孝琼
责任校对：周剑云
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62791865
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：12　　**字　　数**：282千字
版　　次：2015年4月第1版　　**印　　次**：2015年4月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：32.00元

产品编号：061875-01

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律性的一门科学。它作为现代数学的重要分支，已广泛应用于自然科学与社会科学的各个领域中，它是大学理、工、农、医、经济、管理等学科所有专业必修的一门重要基础课。通过本课程的学习，希望使学生掌握概率论与数理统计的基本思想与方法，并且具备一定的分析与解决实际问题的能力。

本书是根据教育部《高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求，总结作者多年讲授概率论与数理统计课程的实践经验编写而成的。编写本书的指导思想为重视概念、强调应用、侧重计算。本书具有如下几个特点。

(1) 重视基本概念。

概率论与数理统计内容虽然抽象，但其中每个基本概念都有自己的实际应用背景，力求从身边的实际问题出发，自然地引出基本概念，以激发学生的学习兴趣和求知欲。

(2) 强调实际应用。

本着学习数学是为了使用数学这一宗旨，并考虑到本课程的实际应用，书中较多选择了工程和信息方面的例题和习题，以提高运用概率论与数理统计的知识解决实际问题的意识和能力。

(3) 侧重计算、解题能力。

本书内容深入浅出、论证简明易懂，侧重于运算、解题能力的训练，让学生在弄清基本概念的基础上熟悉运算过程、掌握解题方法，提高解题能力。

本书共 9 章，可分为两个部分。第一部分由第 1～5 章组成，讲授概率论的基础知识，包括随机事件、随机变量、随机向量及其分布、随机变量的数字特征和极限定理。第二部分是第 6～9 章，讲授样本与统计量、参数估计、假设检验、方差分析与线性回归分析。本书各章配有适量习题，书后附习题提示和解答。本书可作为不同专业有关概率论与数理统计课程的教材。

本书由马毅、王竞波、岳晓宁担任主编，黄光、牟桂彦担任副主编。具体分工如下：第 1、2 章由岳晓宁编写，第 3、4 章由王竞波编写，第 5 章由马毅编写，第 6、7 章由牟桂彦编写，第 8、9 章由黄光编写。全书由王竞波修改统稿。本书在编写过程中，得到了纪德云老师的大力帮助，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第 1 章　随机事件 1

1.1　基本概念 1

1.1.1　随机试验与随机事件 1

1.1.2　事件的关系与运算 2

1.2　事件的概率 5

1.2.1　事件的频率 5

1.2.2　概率的统计定义 6

1.2.3　概率的公理化定义 6

1.3　古典概率模型 8

1.4　条件概率 11

1.4.1　条件概率 11

1.4.2　乘法公式 13

1.4.3　全概率公式 15

1.4.4　贝叶斯公式 16

1.5　事件的独立性 17

1.5.1　两个事件的独立性 17

1.5.2　多个事件的独立性 18

习题 1 20

第 2 章　随机变量 24

2.1　随机变量的定义 24

2.2　离散型随机变量 25

2.2.1　离散型随机变量的概率分布 25

2.2.2　常见的离散型随机变量的概率分布 26

2.3 连续型随机变量与随机变量的分布函数......30
2.3.1 概率密度函数......30
2.3.2 随机变量的分布函数......32
2.3.3 常见的连续型随机变量的概率分布......35
2.4 随机变量函数的分布......40
2.4.1 离散型随机变量函数的分布......40
2.4.2 连续型随机变量函数的分布......41
习题 2......43

第 3 章 随机向量......46

3.1 二维随机向量及其分布函数......46
3.2 二维离散型随机向量......47
3.3 二维连续型随机向量及其分布函数......50
3.3.1 二维连续型随机向量......50
3.3.2 均匀分布......51
3.3.3 二维正态分布......52
3.4 边缘分布......52
3.4.1 边缘分布密度......52
3.4.2 二维离散型随机向量 (X,Y) 边缘分布......53
3.4.3 二维连续型随机向量的边缘概率密度......54
3.5 条件分布......56
3.5.1 条件分布的概念......56
3.5.2 离散型随机变量的条件分布......56
3.5.3 连续型随机变量的条件概率密度......58
3.6 随机变量的独立性......62
3.7 随机变量的函数的分布......63
3.7.1 $Z=X+Y$ 的分布......64
3.7.2 $Z=\max\{X,Y\}$ 和 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布......66
3.8 n 维随机变量......68
3.8.1 定义和分布函数......68
3.8.2 n 维连续型随机向量......69
3.8.3 n 个随机变量的函数的分布......70
习题 3......71

第 4 章 随机变量的数字特征......74

4.1 数学期望......74
4.1.1 离散型随机变量的数学期望......74
4.1.2 连续型随机变量的数学期望......77
4.1.3 随机变量函数的数学期望......78

4.1.4 数学期望的性质 80
4.2 方差 82
4.2.1 方差的定义 82
4.2.2 方差的性质 84
4.2.3 几种常用随机变量分布的方差 85
4.3 协方差与相关系数 87
4.3.1 协方差 87
4.3.2 相关系数 88
4.4 矩与协方差矩阵 90
4.4.1 矩 90
4.4.2 协方差矩阵 91
习题 4 92
第 5 章 极限定理 96
5.1 大数定律 96
5.1.1 切比雪夫不等式 96
5.1.2 大数定律 97
5.2 中心极限定理 98
习题 5 101
第 6 章 样本与统计量 102
6.1 总体与样本 102
6.1.1 总体与个体 102
6.1.2 样本 103
6.2 统计量及其分布 104
6.2.1 统计量与抽样分布 104
6.2.2 样本均值及其抽样分布 105
6.2.3 样本方差与样本标准差 106
6.2.4 样本矩及其函数 107
6.2.5 正态总体的抽样分布 107
习题 6 111
第 7 章 参数估计 112
7.1 参数的点估计 112
7.1.1 矩法估计 113
7.1.2 极大似然估计 115
7.2 点估计的评价标准 117
7.2.1 无偏性 117
7.2.2 有效性 117
7.2.3 一致性 118

7.3 参数的区间估计 119
7.3.1 置信区间的概念 119
7.3.2 单个正态总体参数的置信区间 121
习题 7 124

第 8 章 假设检验 126

8.1 假设检验的基本概念 126
8.2 正态总体均值的假设检验 130
8.2.1 单个正态总体均值 μ 的假设检验 130
8.2.2 两个正态总体均值的比较 131
8.2.3 成对数据的假设检验 133
8.3 正态总体方差的假设检验 134
8.3.1 单个正态总体方差 σ^2 的假设检验 134
8.3.2 两个正态总体方差的检验 136
8.4 分布的拟合检验 137
习题 8 140

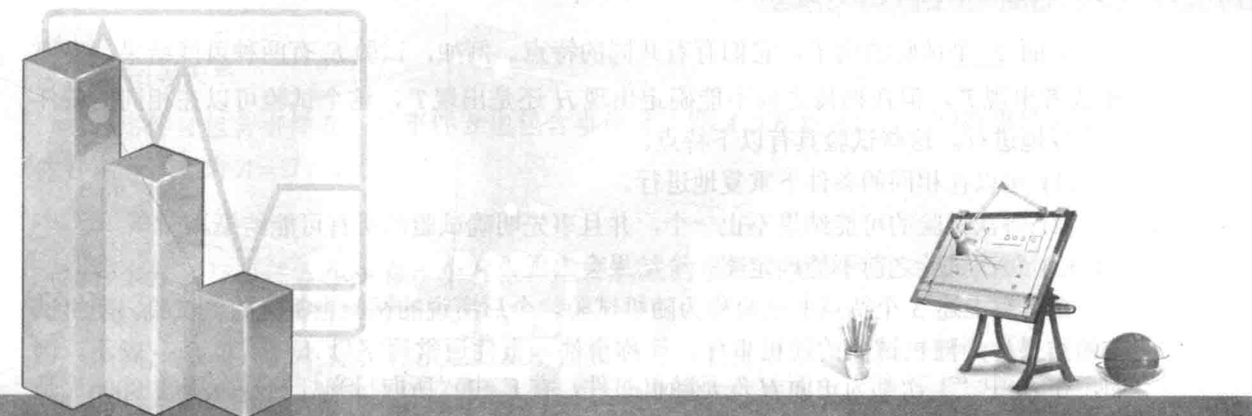
第 9 章 方差分析与回归分析 142

9.1 单因子试验的方差分析 142
9.2 一元线性回归分析 145
9.2.1 一元线性回归模型 145
9.2.2 β_0、β_1 最小二乘估计 146
9.2.3 回归方程的显著性检验 149
9.2.4 预测问题 149
习题 9 150

附录一 重要分布表 152

附录二 各章习题参考答案 171

参考文献 182



第1章 随机事件

自然界和社会上发生的现象是多种多样的。有一类现象在一定的条件下必然发生或必然不发生，称为确定性现象。例如，在标准大气压下，纯水加热到 100℃，必然会沸腾；沿水平方向抛出的物体，一定不作直线运动。另一类现象却呈现出非确定性，例如，向桌面抛掷一枚硬币，其结果可能是“正面朝上”也可能是“正面朝下”，这里的正面是指有国徽的一面；在有少量次品的一批产品中任意地抽取一件产品，其结果可能抽得一件正品，也可能抽取一件次品；用同一门炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同。这类现象可以看作是在一定条件下的试验或者观察，每次试验或者观察的可能结果不止一个，而且在每次试验或者观察前无法事先知道确切的结果。人们发现，这类现象虽然在每次试验或者观察中具有不确定性，但在大量重复试验或者观察中，其结果却呈现某种固定的规律性。例如，多次重复抛一枚硬币得到正面朝上的次数大致有一半，在同一批数量较大的产品中多次重复地任意抽取一件产品，则抽得的产品是次品的次数与试验次数的比与产品的次品率相近，同一门炮向同一目标射击的弹着点按照一定规律分布等。

这种在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律的现象，称为随机现象。概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

1.1 基本概念

1.1.1 随机试验与随机事件

研究随机现象，必须进行各种观察和试验。下面举一些试验的例子。

例 1.1 E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况。

E_2：将一枚硬币抛掷 3 次，观察正面 H、反面 T 出现的情况。

E_3：抛一颗骰子观察出现的点数。

E_4：在次品率为 p 的一批产品中，抽取 n 件产品观察其次品个数。

E_5：在一批日光灯中任取一只，测试它的寿命。

上面 5 个试验的例子，它们有着共同的特点。例如，试验 E_1 有两种可能结果，出现 H 或者出现 T，但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T，这个试验可以在相同的条件下重复地进行。这些试验具有以下特点。

(1) 可以在相同的条件下重复地进行。

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且事先明确试验的所有可能结果。

(3) 每次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

把具有上述 3 个特点的试验称为随机试验。今后所说的试验也都是随机试验。随机试验的结果称为随机试验的随机事件，简称事件。事件通常用字母 A、B、C 、… 表示。例如，在 E_2 中“3 次都为正面 H ”是随机事件，在 E_5 中“所取日光灯的寿命超过 800h”是随机事件等。

在概率论中是通过随机试验中的随机事件来研究随机现象的。

1.1.2 事件的关系与运算

随机试验的每一个可能的基本结果称为这个试验的一个基本事件(样本点)，全体基本事件的集合称为这个试验的样本空间，记为 Ω 。

下面写出试验 $E_k\ (k=1,2,\cdots,5)$的样本空间 Ω_k 。

Ω_1： $\{H,T\}$。

Ω_2： $\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$。

Ω_3： $\{1,2,3,4,5,6\}$。

Ω_4： $\{1,2,\cdots,n\}$。

Ω_5： $\{t|t\geqslant 0\}$。

可见，随机事件由基本事件所组成，因此随机事件是样本空间的子集。例如，在 E_2 中，事件 $A=\{2，4，6\}$是 Ω_2 的一个子集，它表示“出现偶数点”，由 3 个基本事件所组成。

随机事件中有两个极端的情况：一是由样本空间 Ω 中的所有元素组成的集合，称为必然事件，它在每一次试验中都发生。例如，在 E_2 中，事件 $B=$“出现点数都不大于 6”就是必然事件。二是不含任何样本点的集合，称为不可能事件，用 $\varnothing$ 来表示。例如，在 E_2 中，事件 $C=$“出现点数大于 6”就是不可能事件。它在每一次试验中都不会发生。严格来说，这两种事件不是随机事件，但为了今后讨论方便，还是把必然事件与不可能事件作为随机事件的特殊情形来统一处理。

在同一随机试验中，事件不止一个，有些事件简单，有些事件复杂。通过研究它们之间的关系，可以更好地帮助我们理解事件的本质。

设试验 E 的样本空间为 Ω， A、B、C、$A_k\ (k=1,2,3,\cdots)$ 是 Ω 的子集。

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B 。记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$ 。

例如，在 E_3 中，若记： $A=\{2,4,6\},B=\{2,3,4,5,6\}$，有 $A\subset B$ 。

显然，必然事件 Ω 包含任何事件 A，事件 A 包含不可能事件 $\varnothing$，如图 1.1 所示。

2. 相等关系

若事件 A 包含事件 B，且事件 B 也包含事件 A，即 $A \supset B$ 且 $A \subset B$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A = B$。

3. 事件的并

若事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这样构成的事件称为事件 A 与事件 B 的并事件(或称为 A 与 B 的和事件)，记为 $A \cup B$。

例如，10 件产品中有 3 件次品，从中任取 2 件，若 A 表示“取到 1 件次品”，B 表示“取到 2 件次品”，则和事件 $A \cup B$ 表示“至少取到 1 件次品”。

事件 $A \cup B$ 通常包含 3 个部分：A 发生而 B 不发生；A 不发生而 B 发生；A、B 都发生，如图 1.2 所示。

$A \subset B$

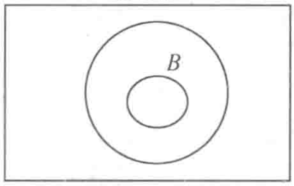


图 1.1　包含关系

$A \cup B$

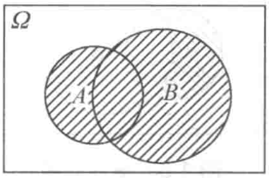


图 1.2　事件的并

类似地，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并事件 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”。

4. 事件的交

由事件 A 与事件 B 同时发生而构成的事件称为事件 A 与事件 B 的交事件(或称为 A 与 B 的积事件)，记为 $A \cap B$ 或 AB，如图 1.3 所示。

例如，在 E_3 中，若记 $A = \{2,4,6\}$、$B = \{3,4,5,6\}$，则 $A \cap B = \{4,6\}$。

类似地，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交事件 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 表示“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”。

5. 互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 为互不相容事件(或称为互斥事件)，如图 1.4 所示。

$A \cap B$

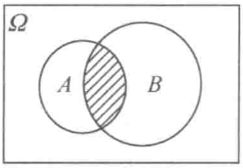


图 1.3　事件的交

$A \cap B = \varnothing$

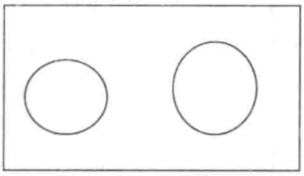


图 1.4　互不相容事件

例如，在 E_3 中，若记：$A = \{2,4,6\}$、$B = \{3,5\}$，则 $A \cap B = \varnothing$，即 A、B 是互不相容事件。

一般地，对于n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$，若它们之间两两互不相容，则称这n个事件是互不相容的。

6. 事件的差

事件A发生事件B不发生，这样构成的事件称为事件A与事件B的差事件，记为$A-B$，如图1.5所示。

例如，在E_3中，若记$A=\{1,2,4,6\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则$A-B=\{1,6\}$。

7. 逆事件

若事件A与事件B中必有一个发生，且仅有一个发生，即$A\cup B=\Omega$和$A\cap B=\varnothing$，则称为事件A与事件B互为逆事件(对立事件)，记为$B=\overline{A}$或$A=\overline{B}$，如图1.6所示。

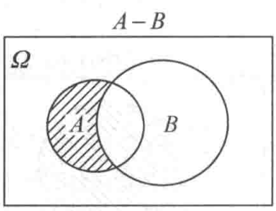


图 1.5　事件的差

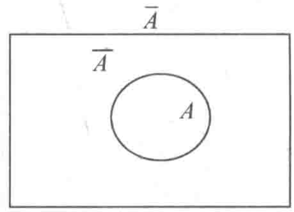


图 1.6　逆事件

例如，在E_3中，若记$A=\{2,4,6\}$、$B=\{1,3,5\}$，则A、B为互为逆事件。容易验证：

① $\overline{\overline{A}}=A$；② $A-B=A\overline{B}$；③ $\overline{A}=\Omega-A$。

概率论中事件间的关系和运算与集合论中集合间的关系形式上是类似的，利用在中学里学到的几何知识，可以更好地理解它们之间的关系(见表1.1)。

表 1.1　集合论与概率论之间的关系

符　号	概 率 论	集 合 论
Ω	样本空间　必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点(基本事件)	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	事件A的逆事件	A的余集
$A\subset B$	事件A发生必有事件B发生	A是B的子集
$A=B$	事件A与事件B相等	A与B相等
$A\cup B$	事件A与事件B至少有一个发生	A与B并集
$A\cap B$	事件A与事件B同时发生	A与B交集
$A-B$	事件A发生而事件B不发生	A与B差集
$AB=\varnothing$	事件A与事件B互不相容	A与B没有公共元素

从集合的运算规则可以得到以下事件的运算规则。

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(4) 对偶公式　$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$,　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n$$

$$\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_n$$

例 1.2　设 A、B、C 表示任意 3 个随机事件，用 A、B、C 及其运算符号表示下列事件。

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生。

(2) A 发生且 B 与 C 至少有一个发生。

(3) A 与 B 发生而 C 不发生。

(4) A、B、C 3 个事件中只有一个发生。

(5) A、B、C 中至少有两个发生。

(6) A、B、C 中至多有一个发生。

解：

(1) 该事件可表示为 $A\overline{BC}$ 或 $A-B-C$。

(2) 因为 $B\cup C$ 表示 B 与 C 至少有一个发生，所以该事件可表示为 $A\cap(B\cap C)$。

(3) 该事件可表示为 $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $AB-C$。

(4) 该事件可表示为 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$。

(5) 该事件可表示为 $AB\cup BC\cup CA$。

(6) 该事件可表示为 $\bar{A}\bar{B}\cup\bar{B}\bar{C}\cup\bar{C}\bar{A}$。

1.2　事件的概率

1.2.1　事件的频率

定义 1.1　在相同的条件下进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 m，则称

$$f_n(A)=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

为随机事件 A 在 n 次试验中出现的频率，m 称为频数。

频率具有下列基本性质。

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$。

(2) $f_n(\Omega)=1,\ f_n(\varnothing)=0$。

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k) \tag{1.2}$$

经验表明，事件 A 的频率并不是一个固定不变的常数，不但对于不同的试验次数，事

件 A 的频率可能取不同的值，即或是保持试验次数相同，重复进行该试验时，它也会取不同的数值，然而当试验次数充分大时，它又会稳定于一个确定的数值附近，极少出现显著的差异。

历史上曾有人做过大量投掷硬币的试验，得到如表 1.2 所列的试验结果。

表 1.2　投掷硬币试验

试 验 者	投币次数 n	出现正面的次数 m	频率 m/n
Boffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Peorson	24000	12012	0.5005

由表 1.2 可以看出，当投掷硬币的次数很大时，“出现正面”事件的频率稳定于 0.5 附近，而且随着实验次数的增大，这样的趋势明显增强。

事件的频率反映了它在一定条件下出现的频繁程度，可以设想，一个事件在每次随机试验中出现的可能性越大，那么它在 n 次试验中出现的频率也越大；反之，由频率的大小，也应该能判断事件出现的可能性大小。总之，频率在一定程度上反映事件发生可能性的大小，尽管它具有随机波动性，然而在大量的重复试验中，它又具有一定的趋于稳定的性质。频率的这种稳定性，正是概率定义的基础。

1.2.2　概率的统计定义

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，往往需要知道某些事件在一次试验中发生的可能性有多大，要将随机事件发生的可能性大小用一个数来表示，就联系到频率和概率的概念。

定义 1.2　在相同的条件下进行大量的重复试验，当试验次数充分大时，事件 A 的频率总围绕着某一个数值 p 做微小摆动，则称 p 为事件 A 的概率统计，记为 $P(A)$，即

$$P(A)=p$$

由概率的统计定义和频率的有关性质可知，$P(A)$ 具有下列性质。

(1) 对于任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

(2) $P(\Omega)=1$。

应该指出，事件的频率是各实验值，它具有随机性，只能近似地反映事件发生可能性的大小；事件的概率则是个理论值，它是由事件的本质属性所确定的，因而只能取唯一值，它能精确地反映事件发生可能性的大小。不过当试验次数很大时，事件的频率与其概率一般相差都很小，所以在实际应用中当试验次数很大时，常用事件的频率来近似估计事件的概率，而且试验次数越大，这种估计越精确。

1.2.3　概率的公理化定义

为了理论研究的需要，从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出概率的公理化定义。

定义 1.3　设 Ω 为样本空间，A 为事件，对于每一个事件 A 赋予一个实数，记为

$P(A)$，如果 $P(A)$ 满足以下条件。

(1) 非负性。对任意事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$。

(2) 规范性。$P(\Omega)=1$。

(3) 可列可加性。设事件 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j, A_iA_j=\varnothing$，$i, j,=1,2,\cdots$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.3}$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

在第 5 章中将证明，当 $n \to \infty$ 时，频数 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$。基于这一事实，就有理由将概率 $P(A)$ 用来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性大小。

由概率的定义，可以推得概率的重要性质。

(1) $P(\varnothing)=0$。

证明　令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing$（$i \neq j$，$i, j,=1,2,\cdots$），由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing)=0$$

(2) (有限可加性)　若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.4}$$

该公式称为概率的有限可加性。

证明　令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，由概率的可列可加性得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)+0=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) 事件 A、B，若 $A \subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

证明　由 $A \subset B$ 可得 $B=A \cup (B-A)$，且 $A \cap (B-A)=\varnothing$，由概率的有限可加性得

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

所以得

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1.5}$$

(4) 对于事件 A，$P(A) \leqslant 1$。

证明　由于 $A \subset \Omega$，所以 $P(\Omega-A)=P(\Omega)-P(A)=1-P(A) \geqslant 0$，所以 $P(A) \leqslant 1$。

(5) (逆事件的概率) $P(A)=1-P(\bar{A})$。

证明　因为事件 A、$\bar{A}$ 为对立事件，所以，$A\bar{A}=\varnothing$，$A \cup \bar{A}=\Omega$，于是有

$$P(A \cup \bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$$

得 $P(A)+P(\bar{A})=1$，即

$$P(A)=1-P(\bar{A}) \tag{1.6}$$

(6) (概率的加法公式)若事件 A、B 为任意事件，则有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证明　因为 $A \cup B=A\bar{B} \cup B$，且 $A\bar{B}$ 与 B 是互不相容的，所以

$$P(A\cup B)=P(A\overline{B})+P(B)$$

又因为 $A=AB\cup A\overline{B}$，且 AB 与 $A\overline{B}$ 是互不相容的，所以

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$$

整理即得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.7}$$

还可以推广到多个事件的情况。例如，事件 A、B、C 为任意事件，则有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1.8}$$

例 1.3 甲、乙二人射击同一目标，已知甲击中目标的概率是 0.8，乙击中目标的概率是 0.5，目标被击中的概率是 0.9，求两人都击中目标的概率是多少？

解 设 $A=$“甲击中目标”，$B=$“乙击中目标”，则 $A\cup B=$“目标被击中”，$AB=$“二人都击中目标”，由已知得 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.5$，$P(A\cup B)=0.9$，由加法公式得所求概率为

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=0.8+0.5-0.9=0.4\end{aligned}$$

1.3 古典概率模型

根据概率的统计定义确定事件的概率，需要进行大量的重复试验或观测。然而，在某些特殊的情况下，存在着一类简单的随机试验，只要依据人们长期积累的经验，直接应用理论分析的方法，就能确定事件的概率。

例如，在投掷一次硬币的试验中，由于硬币正面及反面所具有的某种对称性，可以断言，事件“正面朝上”与“反面朝上”的可能性是相同的，都等于 1/2。又如，在投掷一颗骰子的试验中，由于其对称性，各面朝上的可能性相等，并且都为 1/6。

这一类随机试验，具有下述两个特点。

(1) 试验的样本空间只包含有限个样本点(基本事件)。

(2) 试验中每个样本点(基本事件)出现的可能性相同。

具有这两个特点的概率数学模型称为等可能概型，它在概率论的发展初期曾经是主要的研究对象，因此又称为古典概型。引出概率的古典定义。

定义 1.4 对于古典概型，假定样本空间所包含的基本事件总数为 n，事件 A 所包含的基本事件数为 m，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

根据概率的古典定义，要计算古典概型事件 A 的概率，必须搞清楚样本空间所包含的基本事件总数以及事件 A 所包含的基本事件数。

例 1.4 从 $1,2,\cdots,10$ 十个数中任取一数，求取得的数能被 3 整除的概率？

解 显然，样本空间所包含的基本事件总数为 $n=10$，若设事件 A 表示“所取的数能被 3 整除”，则事件 $A=\{3,6,9\}$，即事件 A 所包含的基本事件数 $m=3$。因此，所求概率为

$$P(A)=\frac{3}{10}=0.3$$

例 1.5 10件产品中有3件次品，从中随机抽取3件，求下列事件的概率。

(1) $A=$“3件全为正品”。

(2) $B=$“3件中恰有两件次品”。

解 样本空间所包含的基本事件总数n为从10件产品中取3件的组合种数，即$n=C_{10}^3$。

(1) 事件A所包含的基本事件数m_1为从7件正品中取3件的组合种数，即$m_1=C_7^3$。故得

$$P(A)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}=0.292$$

(2) 事件B所包含的基本事件数m_2为从7件正品中取1件的组合种数与从3件次品中取2件的组合种数的乘积，即$m_2=C_7^1C_3^2$。故得

$$P(B)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}=0.175$$

例 1.6 小强的生日恰好是星期日的概率是多少？如果他出生年的2月份仅28天，问他的生日在6月份的概率是多少？

解 人的生日的星期数只能有7种，以这7种星期数为生日可以看成7个基本事件，“小强的生日是星期日”是其中的一个基本事件，所以，“小强的生日是星期日”这一事件的概率是$\frac{1}{7}$。

一年有12个月，但各月份的天数不尽相同，因此，以各个不同月份为生日并非等可能，所以不能认为“生日在6月份”的概率为$\frac{1}{12}$。他的出生年共365天，这365天构成所有的基本事件，故$n=365$。6月份有30天，故$m=30$。

设 $A=$“他的生日在6月份”，则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{30}{365}=\frac{6}{73}$$

可见，按古典定义计算随机事件的概率时首先要注意基本事件应具备等可能性。另外，在分析计算构成样本空间的基本事件总数及事件A所包含的基本事件数时，既不要遗漏也不要重复。

例 1.7 已知20件产品中有5件次品。

(1) 作放回抽样，每次随机地取出1件，共取3次。

(2) 作不放回抽样，每次随机地取出1件，共取3次。

求取出的3件都是正品的概率。

解 (1) 因为每次抽取后放回，故每次随机地取1件，有$C_{20}^1=20$种取法，接连取3次，共有20^3种取法，因而样本空间所包含的基本事件总数为$n=20^3$。

设事件$A=$“取出的3件都是正品”。事件A发生，相当于从15件正品中有放回地接连取3次，每次取1件，共有15^3种取法，即事件A包含的基本事件种数为15^3，因此