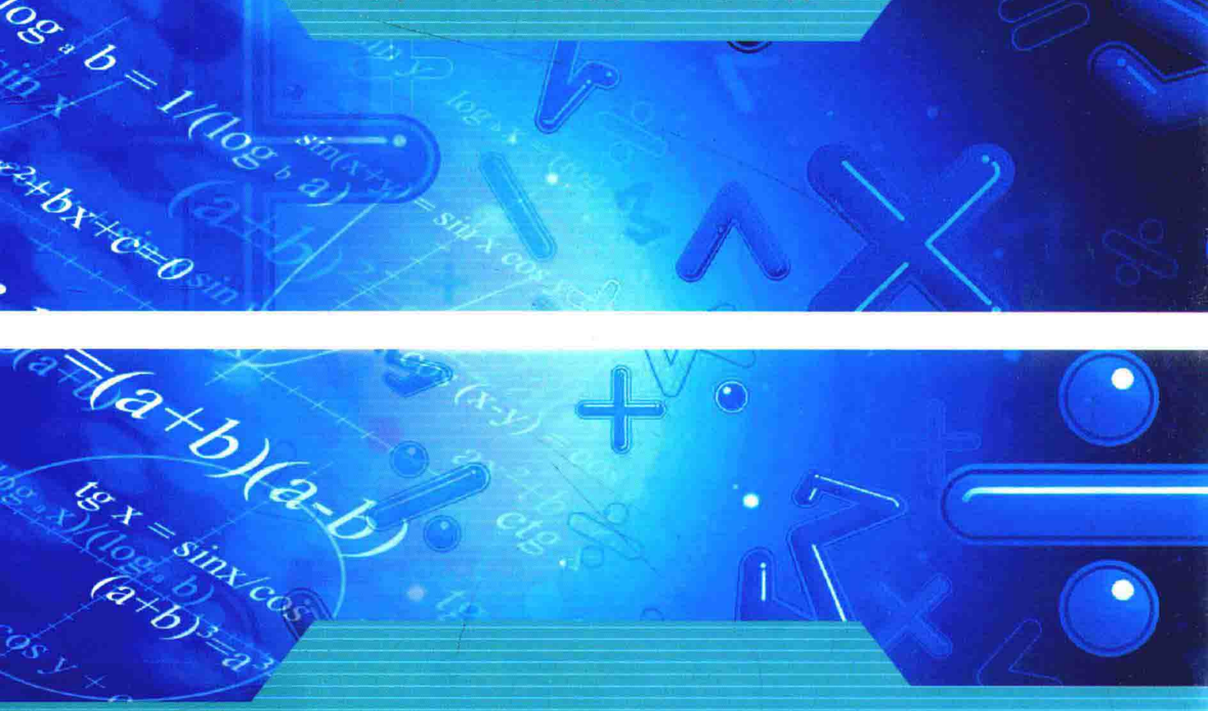
高等学校网络教育规划教材

线性代数

吕全义 安晓虹◎主编



西北工業大學出版社

高等学校网络教育规划教材

线性代数

吕全义　安晓虹　主编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书分为6章，内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、线性方程组、矩阵的相似变换和二次型等. 各章前配有知识要点，节后配有适量的习题，同时各章配有典型习题，以便对整章内容的综合理解. 书后配有习题答案，另外还专门编写有与本书配套的练习册等.

本书可用于教学与自学，也可供科研工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/吕全义，安晓虹主编. —西安：西北工业大学出版社，2015.1

ISBN 978-7-5612-4233-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①吕…②安… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第004050号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 邮编 710072
电　　话：(029)88493844 88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：兴平市博闻印务有限公司
开　　本：727 mm×960 mm 1/16
印　　张：10.875
字　　数：194千字
版　　次：2015年1月第1版 2015年1月第1次印刷
定　　价：28.00元

前　言

线性代数是高等院校理工科和经济学科等有关专业的一门数学基础课，它不仅是其他数学课程的基础，也是物理、力学、控制学等课程的基础. 实际上，任何与数学有关的课程都涉及线性代数的知识.

本书内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、线性方程组、矩阵的相似变换和二次型等. 编写本书的目的，就是希望将抽象的代数理论用简单、具体、形象的方式展现出来，使其如同科普知识一样容易接受与掌握，便于自学. 本书主要有下述特点：

(1)每章前都有学习基本要求与内容要点，明确需要掌握的知识，学生很容易抓住每章的主题，在短时间内形成初略的知识框架. 当然，线性代数所使用的各种推证方法、公理化定义、抽象化思维、计算与运算技巧及应用能力等都很有特色，是其他课程无法替代的，是提高学生数学素质不可缺少的一环. 为了既能有适当的理论深度，又能便于理解，我们对线性代数中教学难度较大的内容作了适当处理，尽量减少抽象的理论叙述.

(2)突出矩阵以及它的应用. 矩阵已成为应用广泛的高级工具，主要依赖于它的运算和变换. 本书除了介绍矩阵的各种运算外，还突出了矩阵的三大变换，即初等变换、相似变换和合同变换.

(3) 强化线性方程组，弱化向量的相关性理论. 线性方程组是线性代数研究的基本内容，本书单独列为一章，完整地描述了解的存在性与解的结构的推理过程，阐述了一个整体的理论构架. 有益于学生整体把握解决此问题的思路，潜移默化地培养学生分析问题与解决问题的能力，提高学生的数学素质. 同时，将向量线性相关性的内容采用直观、具体与形象的描述方式，淡化理论，便于学生理解掌握.

(4) 题目典型，教辅配套. 每个概念都配有相应的例题，以配合对概念的理解；每节配有一定数量的习题，这些题目均经过精选，配合加深对知识的掌握，书末附有习题答案与提示. 另外，还有《线性代数课程练习册》相配合，构成

了比较完整的线性代数学习体系.

在编写本书过程中,参阅了相关文献资料,在此谨向文献的作者深表谢忱。

由于水平所限,书中疏漏和不妥之处,恳请同行、读者指正.

编　者

2014 年 9 月

目　　录

第1章 行 列 式

※学习基本要求

1. 理解行列式的定义与性质，熟练计算2,3阶行列式，上三角或下三角行列式.

2. 掌握计算一些特殊的行列式：行(列)和相等的行列式、箭形行列式、块三角行列式、Vandermonde行列式的算法.

3. 理解Cramer法则，能用此判断特殊线性方程组解是否唯一，且能以此求唯一解.

※内容要点

1. 行列式的概念

(1)2阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

(2)n阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$，其中 A_{ik} 是 a_{ik} 的代数余子式.

2. 行列式性质

(1)$D=D^{\mathrm{T}}$.

(2)$D\xlongequal{r_i\leftrightarrow r_j}\overline{D}$.

(3)$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \end{vmatrix}=kD$ 或 $\begin{vmatrix} \vdots & ka_{1j} & \vdots \\ \vdots & ka_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & ka_{nj} & \vdots \end{vmatrix}=kD$，且有

1) 当 $a_{is}=ka_{js}$，或 $a_{sj}=ka_{sj}$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 时，$D=0$.

2) 当 $a_{ik}=0$，或 $a_{kj}=0(k=1,2,\cdots,n)$ 时，$D=0$.

(4) $\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$

或 $\begin{vmatrix} \vdots & b_{1j}+c_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j}+c_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nj}+c_{nj} & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nj} & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & c_{1j} & \vdots \\ \vdots & c_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & c_{nj} & \vdots \end{vmatrix}$.

(5) $D \xlongequal{r_i + kr_j} D_1$.

3. Cramer（克莱姆）法则

(1) 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D^{(1)}}{D},\quad x_2=\frac{D^{(2)}}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D^{(n)}}{D}$$

其中，$D^{(i)}=\begin{vmatrix} \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots \\ \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots \end{vmatrix}$.

(2) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

① 当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组只有零解；② 如果有非零解，则 $D=0$.

※ 知识结构图

$\boxed{\text{行列式定义}} \longrightarrow \boxed{\text{行列式性质}} \longrightarrow \boxed{\text{行列式的计算}} \longrightarrow \boxed{\text{Cramer法则}}$

1.1 行列式的定义

行列式是线性代数中一个基本概念，其理论起源于求解线性方程组的问题，它在自然科学的许多领域里都有广泛的应用. 曾为此做出重大贡献的科学家有 Gauss，Cramer，Vandermon，Cauchy，Laplace 等.

在这节，通过归纳推理的方式，由 2 阶行列式定义 n 阶行列式.

1.1.1 2 阶行列式

考虑二元一次方程组

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right\} \tag{1-1}$$

求解问题. 采用消元法得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1-1) 有唯一解

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{array}\right\} \tag{1-2}$$

为了便于记忆，此求解公式引入 2 阶行列式的概念.

定义 1.1 由 2^2 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为 2 阶行列式，其表示的数值为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

式中，$a_{ij}\,(i,j=1,2)$ 称为行列式第 i 行第 j 列的元素，横排称行，竖排称列.

在这个 2 阶行列式中有两条对角线，从左上角到右下角的对角线称为主对角线，即连接图 1-1 中 a_{11} 与 a_{22} 的连线；从右上角到左下角的对角线称为次对角线，即连接图 1-1 中 a_{12} 与 a_{21} 的连线. 2 阶行列式的数值就是主对角线上的元素乘积减次对角线元素的乘积，这种计算方法称为对角线法，可根据图 1-1 记忆.

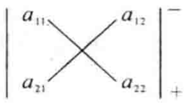


图 1-1

由定义 1.1,方程组(1-1) 的解可简记为

$$x_1 = \frac{D^{(1)}}{D}, \quad x_2 = \frac{D^{(2)}}{D}$$

式中,$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,$D^{(1)} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,$D^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,行列式 D 称为方程组的系数行列式.

例 1.1 计算下列 2 阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-6 = -7$.

(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

例 1.2 求解二元一次方程组:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

解 因为 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$,$D^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10$,$D^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$,所以

$$x_1 = \frac{D^{(1)}}{D} = \frac{5}{4}, \quad x_2 = \frac{D^{(2)}}{D} = \frac{1}{8}$$

1.1.2 *n* 阶行列式

下面以 2 阶行列式为基础定义 n 阶行列式.

1.3 阶行列式

定义 1.2 由 3^2 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为 3 阶行列式,其表示的数值为

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\text{,即}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

它的规律是:将行列式的第一行各元素乘以划掉该元素所在的行和列之后剩下的 2 阶行列式,前面加上正负相间的符号,然后再求它们的代数和. 如果把从行列式中划去第 i 行第 j 列($i,j=1,2,3$)后剩下的 2 阶行列式记为 M_{ij},那么有

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

若令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

这里 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式,A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

类似地,定义 4 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

如果同样用 M_{ij} 表示划去第 i 行第 j 列($i,j=1,2,3,4$)后剩下的 3 阶行列式,仍令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,那么 4 阶行列式的定义可简写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

这个定义是以 3 阶行列式的定义为基础的. 显然，有了 4 阶行列式的定义，就可以类似地定义 5 阶行列式，6 阶行列式等. 一般 n 阶行列式可用数学归纳法定义如下.

2. n 阶行列式

定义 1.3　2 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则 n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

式中，$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，$M_{ij}$ 表示划去第 i 行第 j 列 $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 后剩下的 $n-1$ 阶行列式. M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，n 阶行列式常用 D 或 D_n 表示. 在不混淆的情况下，也可以将 n 阶行列式简记为 $D=|a_{ij}|$ 或 $D=|a_{ij}|_n$，规定 1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

例 1.3　计算下列 3 阶行列式：

(1) $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$　　　(2) $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解　(1) $D = 2\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2.$

(2) $D = 2\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times(-1) - 7 + 5 = -4.$

注　上面是利用行列式的第 1 行元素定义行列式的，这个式子通常称为行列式按第 1 行元素的展开式. 可以证明，行列式按第 1 列元素展开也有同样的结果，即

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

还可以证明，行列式按任意一行(列)元素展开都有同样的结果，其展开式为

$$D=|a_{ij}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=|a_{ij}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

综合上述，有以下结论：

定理 1.1 设 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$，则有

$$D=|a_{ij}|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=|a_{ij}|=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

例 1.4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&4\\2&0&1\\3&0&4\end{vmatrix}$.

解 按第 2 列元素展开，则有

$$D=2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=-10$$

例 1.5 计算下列行列式：

$$(1)D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\qquad(2)D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

解 (1) 按第 1 行展开后，再按同一方法继续下去，有

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这个行列式称为下三角行列式，由上面结果可知下三角行列式等于主对角线上元素的乘积.

(2) 按第 1 列展开后，再按同一方法继续下去，有

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots\cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这个行列式称为上三角行列式,上三角行列式也等于主对角线上元素的乘积.

可见,下(上)三角行列式的值就是主对角线上元素的乘积,计算非常简单.而一般情况下,行列式的计算将非常繁琐.为了化简行列式的计算,需要研究行列式的性质.

习　题　1.1

1.计算以下行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 2\sin\theta & 2\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{vmatrix}$　　(6) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

2.求解下列方程:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$　　(2) $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

3.求解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$

1.2　行列式的性质

若一个行列式中没有零元素(或零元素很少),那么按定义计算行列式时,运算量很大,因而需要研究计算行列式的方法.为此,本节讨论行列式的性质,

这些性质对行列式的计算及理论研究都有重要的作用.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

定义 1.4 将行列式 D 的行变成同序号的列后,得到的行列式称为 D 的转置行列式,记为 D^{T},即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由上面定理 1.1 可知,行列式的行与列具有相同的地位,所以应该有下面的性质.

性质 1 行列式与其转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 设 $D^{\mathrm{T}}=|b_{ij}|$,则有 $b_{ij}=a_{ji}$. 下面采用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时,显然成立;假设 $n-1$ 阶时成立,下面证明 n 阶时成立.

因为 D^{T} 的 b_{ij} 的余子式为 M_{ji}^{T},其中,M_{ji} 是行列式 D 的元素 a_{ji} 的余子式. 由假设可知:$M_{ji}^{\mathrm{T}}=M_{ji}$,所以 b_{ij} 的代数余子式 $B_{ij}=(-1)^{j+i}M_{ji}^{\mathrm{T}}=(-1)^{i+j}M_{ji}=A_{ji}$,所以

$$D^{\mathrm{T}}=|b_{ij}|=b_{i1}B_{i1}+b_{i2}B_{i2}+\cdots+b_{in}B_{in}=a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni}=D$$

证毕

既然行列式的行与列具有相同的特性,即对行成立的结论对列也一定成立,所以下面所有的性质只需要证明对行或列成立即可.

性质 2 互换行列式的任意两行(列),行列式的值改变符号,即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j} -\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

式中,$r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行与第 j 行交换位置(若第 i 列与第 j 例交换位置,则记 $c_i \leftrightarrow c_j$).

证 只对行证明,采用数学归纳法. 当 $n=2$ 时,显然成立;假设当 $n-1$ 阶

时结论成立，下面证明 n 阶时，结论成立. 设

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

由归纳假设可知，$\overline{D}$ 的第 $s(s\neq i,j)$ 行的 a_{sj} 余子式 $\overline{M}_{sj}=-M_{sj}$（$D$ 的 a_{sj} 的余子式），将 $\overline{D}$ 按第 $s(s\neq i,j)$ 行展开，则有

$$\overline{D}=a_{s1}(-1)^{s+1}\overline{M}_{s1}+a_{s2}(-1)^{s+2}\overline{M}_{s2}+\cdots+a_{sn}(-1)^{s+n}\overline{M}_{sn}=$$

$$-a_{s1}(-1)^{s+1}M_{s1}-a_{s2}(-1)^{s+2}M_{s2}-\cdots-a_{sn}(-1)^{s+n}M_{sn}=-D$$

故 $$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \xlongequal{r_i\leftrightarrow r_j} -\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

证毕

如果行列式 D 某两行元素相等，不妨设是第 i 行与第 j 行，由性质 2，便有 $D\xlongequal{r_i\leftrightarrow r_j}-D$，即 $D=0$；所以得出下述结论.

推论 如果行列式的某两行(列)元素对应相等，则该行列式的值为零.

例 1.6 如果行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & a \\ 3 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}=3$，求下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ b & 1 & 3 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & c \\ 2 & 4 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ b & 1 & 3 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix} 2 & 4 & a \\ 3 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}=-3.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & c \\ 2 & 4 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix} 3 & 1 & b \\ 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & a \\ 3 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}=3.$