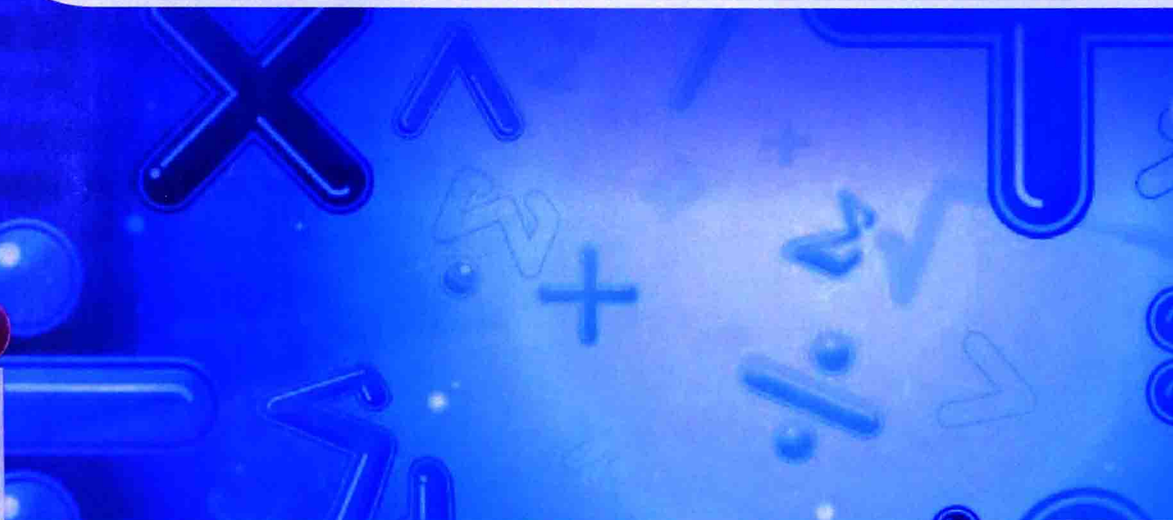
高等学校“十二五”规划教材

高等数学

（下册）

主编◎王树勋　田　壤



GAO DENG SHU XUE

西北工业大学出版社

高等学校"十二五"规划教材

高 等 数 学

（下 册）

主 编 王树勋 田 壤

副主编 李 哲 高 云 苏晓海 刘莉君

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书是根据编者多年来从事高等数学课程的教学实践经验及“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写的.全书分为上、下两册,共十一章.上册内容包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程.下册内容包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数等.全书每节都配有适量的习题,书末附有一些常用的数学公式、常用的曲线,以及习题参考答案或提示.

本书可作为高等院校工科类各专业的高等数学课程教材,也可供教师、工程技术人员以及报考工科各专业硕士研究生的考生选用或参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:全2册/王树勋,田壤主编.—西安:西北工业大学出版社,2014.8
ISBN 978-7-5612-4126-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②田… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第202853号

出版发行:西北工业大学出版社
通讯地址:西安市友谊西路127号　　**邮编**:710072
电　　话:(029)88493844　　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:兴平市博闻印务有限公司
开　　本:727 mm×960mm　　1/16
印　　张:44.25
字　　数:803千字
版　　次:2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷
定　　价:58.90元(上、下册)

前 言

数学是从量和形两个侧面对客观世界进行认识而产生的学科.大体上,从量的侧面研究问题的数学学科,属于代数学的范畴;从形的侧面研究问题的数学学科,属于几何学的范畴.17 世纪以前的数学,主要研究的是不变的量和比较规则的形,称之为初等数学.1637 年法国数学家笛卡儿引入了坐标系,从而诞生了一个全新的学科——解析几何.解析几何使得数和形有机地联系在一起,也使得数学进入了一个快速发展的阶段.这一阶段,人们开始大量地研究变化的量和不规则的几何图形,而且数和形的联系也越来越紧密.由于工业革命的推动,英国科学家牛顿、德国数学家莱布尼茨,以及那些让牛顿和莱布尼茨站在其肩上的巨人们创立了微积分.从此,数学飞速发展,形成了高等代数、高等几何、微积分等许多数学学科.相对于 17 世纪以前的初等数学,人们把 1637 年到 19 世纪末的数学称为高等数学.

作为工具,数学如此强大,以致于被广泛地应用到了各个领域.但数学绝不单纯是工具,还是科学的语言、思维的体操、是一种文化、是一种素养,能使人逻辑严谨、思维周密.当然,对日常生活而言,数学总是“知趣”地隐藏在幕后,但是对于要掌握现代科学知识的大学生而言,数学会时刻与你相伴,深厚的数学功底能够使你腾飞的翅膀更加强健.

根据教育部最新颁布的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,笔者结合长期从事高等数学教学实践和教学体会,在对教学内容和教学体系进行了充分研讨和优化的基础上,编写了本书.本书主要有下述特点.

(1)涵盖了高等院校《工科高等数学课程教学大纲》要求的基本内容.

(2)定理和概念的叙述力求严谨精练,同时尽可能深入浅出,使读者易于理解和掌握.

(3)突出概念和定理的几何解释,但不完全依赖几何解释.注重概念的实际背景,更强调数学概念与实际问题的结合.

(4)在符合教学大纲的基础上,对传统内容作了适当的取舍,淡化运算技巧,突出基本概念基本方法的介绍;突出了积分学中元素法的思想;在三重积分的计算中,采用了换元法来推导柱面坐标和球面坐标形式的体积元素;第二类曲面积分的概念和计算法采用了向量形式.

(5)尽量兼顾各专业的特点,部分章节加有“ * ”号,教师可根据实际教学时数

选讲或供学生自学.

本书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数等内容，每节都配有适当的习题，并附有一些常用的数学公式、常用的曲线，以及习题参考答案或提示.

全书由王树勋、田壤拟订编写大纲及编写规划并担任主编. 王树勋编写了第三、八章及附录并绘制了全书插图，田壤编写了第五、十章，李哲编写了第六、十一章，高云、刘莉君编写了第一、二、七章，苏晓海编写了第四、九章. 全书由王树勋、田壤负责统稿.

本书在总结多年教学经验的基础上参阅了国内外一些改革教材及编者教改成果，在西北工业大学出版社的大力支持下编写而成. 在编写的过程中得到陕西理工学院领导和同行的大力支持. 西北工业大学叶正麟教授给本书提出了宝贵的意见. 在此对各位领导、专家及同行表示衷心的感谢.

本书虽经多年使用和修改，但由于水平有限，书中不足和考虑不周之处，诚恳地希望专家、同行和读者批评指正.

编 者

2014 年 6 月

目　录

（下　册）

第七章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过平面直角坐标系把平面上的点与一对有序实数相对应，将平面上的图形和方程相对应，从而用代数方法研究几何问题. 空间解析几何也是如此.

空间解析几何(space analytic geometry)是建立在空间直角坐标系的基础上，用**向量代数**(vector algebra)方法研究空间的几何图形. 本章首先建立空间直角坐标系，其次引进向量并介绍向量的运算，然后以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在空间中取定一点 O，过点 O 作 3 条两两垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，取定正方向，且一般取相同的长度单位，这就构成了一个**空间直角坐标系**(spatial rectangular coordinates system)，亦称为 $Oxyz$ 坐标系，并称 O 为**坐标原点**(coordinate origin)，称数轴 Ox，Oy，Oz 为**坐标轴**(coordinate axis)，分别记为 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)，z 轴(竖轴). 通常将 x 轴和 y 轴放置在水平面上，而 z 轴为铅垂线，符合**右手系规则**(right - handed rule)(当右手的 4 个手指由 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向)(见图 7 - 1).

3 条坐标轴中的任意两条都可以确定一个平面，这样就定出了 3 个**坐标面**(coordinate surface)，分别称为 xOy 面、yOz 面、zOx 面. 3 个坐标面把空间分成 8 部分，每部分叫做一个**卦限**(octant). xOy 面的第 1,2,3,4 象限上方的 4 个卦限依次称为第 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 卦限，下方的 4 个卦限依次称为第 Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 卦限(见图 7 - 2).

常采用的坐标系表示法有斜二侧(见图 7 - 1)及正等侧(见图 7 - 3).

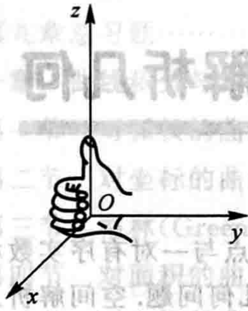


图 7-1

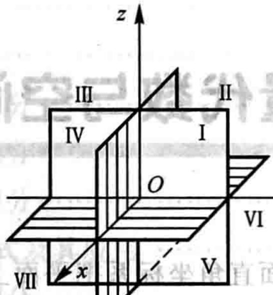


图 7-2

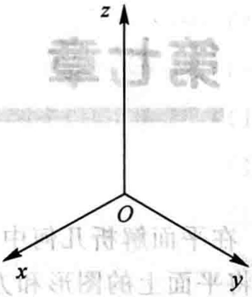


图 7-3

设 M 为空间的一点(见图 7-4),过点 M 分别作与 3 个坐标轴垂直的平面,它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R ,其在 3 个坐标轴上的坐标依次为 x,y,z ,从而得到一个有序数组(x,y,z);反之,给定一有序数组(x,y,z),在 x 轴、y 轴、z 轴上分别作 $\overline{OP}=x,\overline{OQ}=y,\overline{OR}=z$, 然后过 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面,这 3 个平面确定了唯一的交点 M. 这样,空间点 M 就与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系. 称 x,y,z 为点 M 的直角坐标,记为 $M(x,y,z)$, 并依次称 x,y,z 为点 M 的**横坐标**(abscissa)、**纵坐标**(ordinate)、**竖坐标**(vertical).

思考题:坐标面上和坐标轴上的点的坐标有何特征?

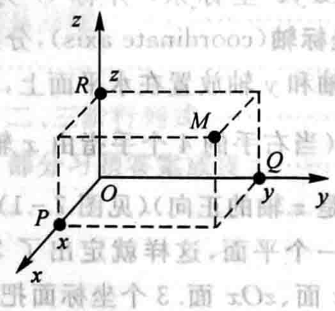


图 7-4

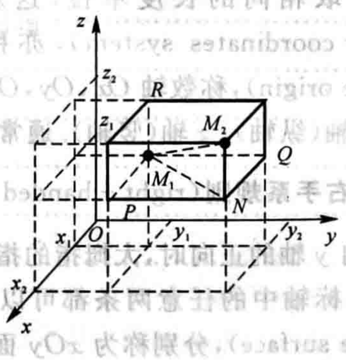


图 7-5

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,过 M_1,M_2 各作 3 个分别垂直于 3 条坐标轴的平面,这 6 个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见

图 7-5). 因为

$$
\begin{aligned}
|\overline{M_1M_2}|^2 &= |\overline{M_1N}|^2 + |\overline{NM_2}|^2 \\
&= |\overline{M_1P}|^2 + |\overline{M_1Q}|^2 + |\overline{NM_2}|^2 \\
&= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2
\end{aligned}
$$

所以

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是**两点间的距离公式**.

例 1　设 P 是空间内一点,其坐标为 (x,y,z),即 $P(x,y,z)$,求:

(1) 点 P 引至各坐标轴的垂足坐标;

(2) 点 P 引至各坐标面的垂足坐标;

(3) 点 P 到坐标原点、各坐标面及各坐标轴的距离.

解　根据点与坐标的关系,由图 7-6 可得:

(1) 点 $P(x,y,z)$ 引至 Ox 轴的垂足坐标为 $(x,0,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oy 轴的垂足坐标为 $(0,y,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oz 轴的垂足坐标为 $(0,0,z)$.

(2) 点 $P(x,y,z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足坐标为 $(x,y,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足坐标为 $(0,y,z)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 zOx 坐标面的垂足坐标为 $(x,0,z)$.

(3)点 P 到坐标原点的距离为 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

点 P 到 xOy 坐标面的距离为 $|z|$;

点 P 到 yOz 坐标面的距离为 $|x|$;

点 P 到 zOx 坐标面的距离为 $|y|$;

点 P 到 Ox 轴的距离为 $\sqrt{y^2+z^2}$;

点 P 到 Oy 轴的距离为 $\sqrt{z^2+x^2}$;

点 P 到 Oz 轴的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$.

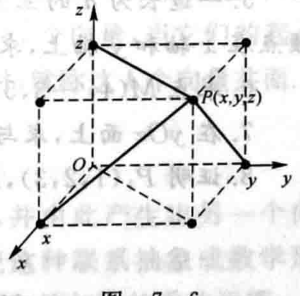


图 7-6

例 2　写出点 $P(1,2,3)$ 关于各坐标轴、坐标面及坐标原点的对称点的坐标.

解　根据点与坐标及对称性的关系得:

点 $P(1,2,3)$ 关于 Ox 轴的对称点的坐标为 $(1,-2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oy 轴的对称点的坐标为 $(-1,2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oz 轴的对称点的坐标为 $(-1,-2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 xOy 面的对称点的坐标为 $(1,2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 yOz 面的对称点的坐标为 $(-1,2,3)$；
点 $P(1,2,3)$ 关于 zOx 面的对称点的坐标为 $(1,-2,3)$；
点 $P(1,2,3)$ 关于坐标原点 O 的对称点的坐标为 $(-1,-2,-3)$.

例 3 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解 所求的点 M 在 z 轴上,故可设该点坐标为 $M(0,0,z)$，根据题意有

$$|\overline{MA}|=|\overline{MB}|$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

解得 $z=\dfrac{14}{9}$，故所求的点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

习 题 7-1

1. 设空间直角坐标系中任意一点 P 的坐标为 (x,y,z)，从点 P 分别向各坐标轴和各坐标面引垂线,试求各个垂足的坐标.

2. 试求点 $P(a,b,c)$ 关于各坐标面、各坐标轴及坐标原点的对称点的坐标.

3. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点？指出下列各点的位置.

$$A(3,4,0),B(0,1,2),C(3,0,0),D(0,-1,0)$$

4. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

5. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.

6. 求点 $M(4,-3,5)$ 到原点及各坐标轴的距离.

7. 在 yOz 面上,求与 3 点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

8. 证明 $P_1(1,2,3)$,$P_2(2,3,1)$,$P_3(3,1,2)$ 三点构成一个正三角形.

第二节 向量及其线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用学科时,常会遇到这样的一类量,它们既有大小又有方向,如力、力矩、位移、速度、加速度等,将这种既有大小又有方向的量,称为**向量**(vector)(或矢量).

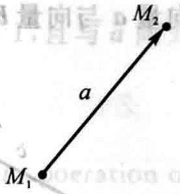


图　7-7

在数学上，往往用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（见图7-7）. 或用一个黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 表示. 书写时，用上面加箭头的字母来表示向量，如 $\vec{a}$.

向量的大小称为**向量的模**（modulus of vector），如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|$，也可记为 $\|\boldsymbol{a}\|$. 模为1的向量称为**单位向量**（unit vector），模为零的向量称为**零向量**（zero vector），记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，其方向可任意选取.

在这里只研究与起点无关的向量，即只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方，这种向量称为**自由向量**（free vector）. 因为只讨论自由向量，所以如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，就说向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ **相等**（equal），记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 从几何直观来看，就是经过平移后能完全重合的向量是相等的. 由于自由向量可在空间自由平移，因此可规定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角：将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合后，它们所在的射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**（angle between vector a and b），并记作 $(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$ 或 $(\boldsymbol{b},\hat{\ }\boldsymbol{a})$.

设有非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若它们的方向相同或相反，就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 因为零向量的方向是任意的，所以零向量与任何向量都平行.

当两个向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点在一条直线上时，这两个向量是平行的，也称两向量共线. 类似地，若有 $k(k\geqslant3)$ 个向量，当它们的起点放在同一点时，它们的 k 个终点和公共起点在一个平面上时，就称这 k 个向量共面.

二、向量的线性运算（加减法、数乘向量）

在实际问题中，向量与向量之间常存在一定的联系，并由此产生出另一个向量，如物理力学中，两个力的合力，两个速度的合成等，把这种联系抽象成数学形式，就是向量的运算. 下面先定义向量的加、减法运算以及向量与数的乘法运算.

1. 向量的加、减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 A,C（见图 7-8(a)），向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（向量加法的**三角形法则**（triangle rule））.

仿此，也有向量加法的**平行四边形法则**（parallelogram rule），即把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点都放在点 A，以向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，即得其对角线向量 $\overrightarrow{AC}$ 为

向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，即 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图 7－8(b)）.

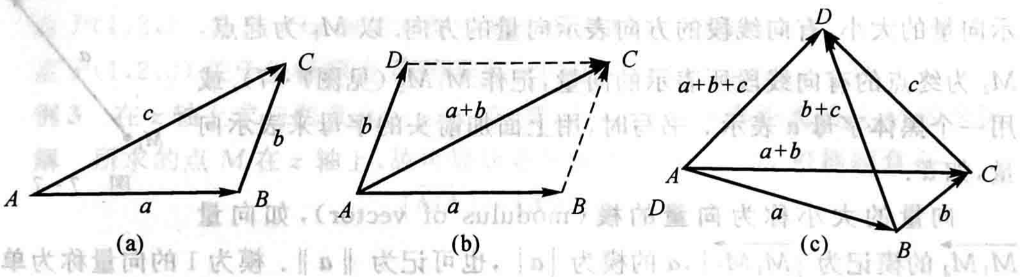


图 7－8

向量的加法符合以下运算规律：

(1)交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（见图 7－8(c)）.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$，由此，规定 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差**(difference)，记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$（见图 7－9）.

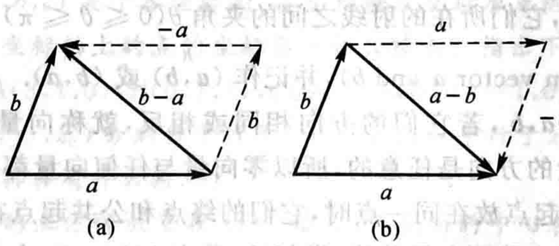


图 7－9

2. 向量与数的乘法

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，λ 是一个非零实数，则 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，且

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向为：当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

容易验证，向量与数的乘法满足以下运算规律：

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2)分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

其中 λ,μ 都是常数.

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，由数乘向量的规定可知，向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的模等于 1，且与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，记作 $\boldsymbol{e}_a$，即 $\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 显然 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

向量的加、减法及向量与数的乘法统称为**向量的线性运算**(linear poeration of vector).

三、向量的坐标表示

为了能将向量作为研究几何图形的工具，须将向量运算用代数表示. 因此，在空间直角坐标系中，若将向量的起点移到坐标原点 O，则这个向量完全由其终点确定；反过来，任给空间一点 M，总可以确定一个向量 $\overrightarrow{OM}$. 也就是说，空间的点与起点在原点的向量有一一对应的关系.

在空间直角坐标系中，与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量称为**基本单位向量**，分别记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点，终点坐标为 $M(x,y,z)$，过终点 M 作与坐标轴垂直的平面，其垂足依次为 P,Q,R (见图 7－10)，由向量的线性运算，有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

即

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的**分解式**. 有时为了使用的方便，记

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**.

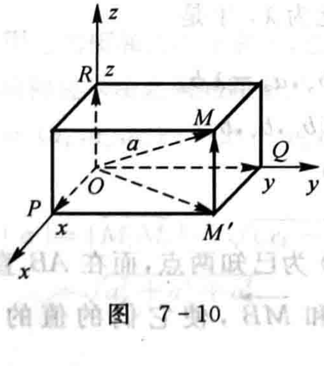


图　7－10

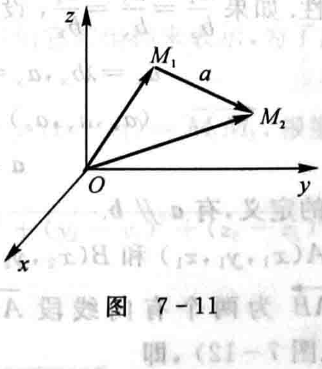


图　7－11

将向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 放入空间直角坐标系中，如果 M_1 和 M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，根据向量的线性运算，如图 7－11 所示，得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

$$=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$$
$$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

若记 $x_2-x_1=a_x$，$y_2-y_1=a_y$，$z_2-z_1=a_z$，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z)$$

利用向量的坐标，可以将向量的线性运算转化为代数运算.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$
$$=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}$$

即
$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}$$

得
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)\quad(\lambda\text{ 为常数})$$

例 1 设有两个非零向量：

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$$

证明：$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件为

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

证明 先证必要性. 如果 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，根据数乘向量的规定，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 且 $\lambda\neq0$，即有 $(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$，由于两个向量相等，有

$$a_x=\lambda b_x,\quad a_y=\lambda b_y,\quad a_z=\lambda b_z$$

从而
$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

再证充分性. 如果 $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$，设其比为 λ，于是

$$a_x=\lambda b_x,a_y=\lambda b_y,a_z=\lambda b_z$$

即
$$(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$$

得
$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$$

根据数乘向量的定义，有 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

例 2 设 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 为已知两点，而在 AB 直线上的点 M 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 为两个有向线段 $\overrightarrow{AM}$ 和 $\overrightarrow{MB}$，使它们的值的比等于某数 $\lambda(\lambda\neq-1)$(见图 7-12)，即

$$\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\lambda$$

求分点 M 的坐标 x，y 和 z.

解　因为 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 在一直线上，所以依题意有

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$$

而

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$$

有

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

从而　$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$

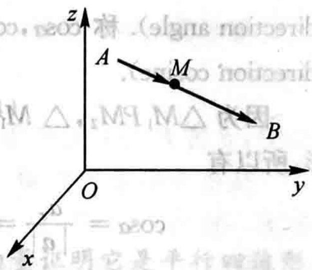


图　7－12

即

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2))$$
$$=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$

由此即得点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 当 $\lambda=1$ 时，点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

四、向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向来表示，也可以用它的坐标来表示，为了应用上的方便，有必要找出这两种表示法之间的联系.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=\overrightarrow{M_1M_2}$，根据两点间距离公式，有

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，可以用它与 3 条坐标轴的夹角 α,β,γ ($0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$) 来表示它的方向(见图 7－13). 称 α,β,γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角

(direction angle). 称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**(direction cosine).

因为 $\triangle M_1PM_2$, $\triangle M_1QM_2$, $\triangle M_1RM_2$ 都是直角三角形,所以有

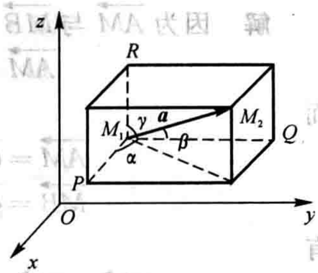


图 7-13

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\beta&=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\end{aligned}\right\}\qquad(7-1)$$

由上式易得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (7-2)$$

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则有

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x,a_y,a_z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

即与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量可由其方向余弦表示.

例 3 已知 $M_1(2,2,\sqrt{2})$, $M_2(1,3,0)$, 求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,-\sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3}{4}\pi$$

例 4 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, 又 $|\boldsymbol{a}|=6$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解 因为 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, 由式(7-2)得

$$\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\frac{2}{3}$$

根据式(7-1)得

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=6\times\frac{1}{3}=2$$

$$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=6\times\frac{2}{3}=4$$