



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 振动结构模态分析

——理论、实验与应用

(第2版)

曹树谦 张文德 萧龙翔 编著



天津大学出版社  
TIANJIN UNIVERSITY PRESS



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 振动结构模态分析

——理论、实验与应用

(第2版)

曹树谦 张文德 萧龙翔 编著



天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要

本书是在总结国内外有关结构振动模态分析成果基础上编写的,既包括了20世纪七八十年代形成的主要经典方法,又纳入了21世纪初的最新成果。全书共分6章,即模态分析理论基础、时间历程的测量、动态测试后处理、模态参数识别的频域方法、模态参数识别的时域方法、模态分析在工程中的应用。每章后附有一定数量的思考题,书末附有两个模态分析实验指导书。

本书可作为高等工科院校力学、机械、土木、水工、海船、汽车、核能等专业高年级本科生、研究生教材,也可供从事相关专业教学、研究与设计工作的大学教师、科研工作者和工程技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

振动结构模态分析:理论、实验与应用/曹树谦,张文德,  
萧龙翔编著.—2版.—天津:天津大学出版社,2014.8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-5618-5153-1

I. 振… II. ①曹… ②张… ③萧… III. ①结构振  
动—模态—振动分析—高等学校—教材 IV. ①TH113.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第185104号

出版发行 天津大学出版社  
出 版 人 杨欢  
地 址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)  
电 话 发行部:022-27403647  
网 址 publish.tju.edu.cn  
印 刷 廊坊市长虹印刷有限公司  
经 销 全国各地新华书店  
开 本 185mm×260mm  
印 张 16.25  
字 数 406千  
版 次 2001年3月第1版 2014年9月第2版  
印 次 2014年9月第1次  
定 价 36.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

## 第2版前言

本书自2001年出版以来,在全国范围得到广泛应用。相关领域的科技工作者、工程技术人员、教师和研究生等,在自己的工作或学习中以本书作为主要参考书或教材使用。根据检索结果,全国有140多所高校和科研院所的博士或硕士生撰写学位论文时以本书作为主要参考书,涉及全国26个省市和自治区。令作者意想不到的是,这些研究生所学专业不限于力学或振动类专业,共有超过80个专业的研究生在学位论文中参考了本书,这远远超过了力学类专业的范围。由此作者更加意识到,模态分析已经成为一门重要的工程技术课程,其应用范围已远远超过力学范畴。

考虑本书第1版已经基本形成了一个较完整的体系,因此在第2版中,对书中基本框架未作变动。在认真阅读、反复推敲并对主要方法重新推导的基础上,对书中存在的错误进行了修正。为了使文字更加通顺、用词更加规范,对多处文字和用词进行了更换和调整。同时,考虑前后内容衔接更为密切,重点补充完善了第1章的内容。考虑书中以方法论述为主,虽然有些实例略显陈旧,但用于对方法的理解和应用并无大碍,因此未作变动。另外,作者还补充调整了部分参考文献。

许多读者、同行当面或来信与作者就本书内容进行交流并给予热情鼓励,使作者受益匪浅和备受鼓舞,作者在此一并致以真挚的谢意。

虽然作者追求完美、力求无误,但仍疏漏有之、错误难免,恳请读者不吝赐教,以期不懈完善。

作者

2014年7月

于北洋园

联系方式:sqcao@tju.edu.cn

## 前 言

天津大学力学系开展振动结构模态分析(以下简称模态分析)的研究和教学工作已有 20 余年。其间,为一般力学、结构工程、机械电子工程、水利工程、船舶工程、内燃机、汽车、核物理等专业的高年级本科生和研究生开设了模态分析课程,特别是自 20 世纪 80 年代初,天津大学力学系对模态分析的研究和应用有了很大发展,完成了多项科研项目,提出了适用于大型结构的、简单而实用的分区模态综合法和随机冲击激励技术。

早在 1987 年,萧龙翔教授就已编写了《振动结构模态分析基础》一书。此书在历届学生的使用中收到了良好效果。在该书的基础上,我们总结了近二十年来的工作经验,纳入了最近的研究内容,并吸收了国内外同行的大量研究成果,重新编写了这部著作。

20 世纪 70 年代到 80 年代中期,是模态分析理论及技术实现的成熟阶段,并逐步在各个工程领域内应用。此时航空、航天、机械、化工、交通、结构、水工、船舶、核能、内燃机等涉及振动工程的领域都有模态分析的应用,模态分析已从研究机构走向各个工程设计单位。作为一种有效、可靠的测试手段,模态分析已成为结构设计中一项常规的辅助方法。在各高等工科院校,也相继开设了模态分析课程,且该课程逐步由一门力学专业基础课转变成一门相关学科的专业基础课。它不仅作为研究生的专业技术课,也成为高年级本科生的专业选修课。

20 世纪 80 年代中期到 90 年代,是模态分析应用的黄金时期。在结构动力修改、结构优化设计、故障诊断、状态监测、声学分析等诸多领域内,模态分析由单一、直接应用发展到与多种方法的综合应用,特别是围绕实验模态分析(EMA)和有限元法(FEM)两种基本方法,在众多领域开展了大量的工程应用研究工作,提出了繁多的综合研究方法,使结构动态设计日趋成熟。

有关模态分析的著作并不多见,作为高等院校相关专业的教材更是凤毛麟角。鉴于此,本书并不完全以专著形式编写,而是兼顾教材的特点,以模态分析的基本理论、基本方法为主线,兼论模态分析的最新动态。在编写中力求做到前后统一,包括符号的使用和内容的联系等方面。所有方法的推导力求严谨、准确、完整,并尽量用矩阵运算,以期简明。在每章后面都附有思考题,以帮助学生巩固所学内容。本书最后附有实验指导书,便于实验教学。

本书只限于论述线性模态分析。近几年来,以现代非线性动力学理论为基础的非线性模态分析悄然兴起,并成为非线性振动研究中的热点之一。其原因是工程研究中存在着大量的非线性问题,以传统的线性模态分析无法得到准确结果,

迫切需要提出新的理论和方法加以解决。由于非线性模态分析理论尚不成熟,应用更有困难,故未列入本书。

本书共分6章。第1章为模态分析理论基础,论述线性模态分析的基础理论;第2章为时间历程的测量,论述有关实验模态分析的时域振动信号测试技术;第3章为动态测试后处理,论述非参数模型识别的基本处理方法;第4章为模态参数识别的频域方法,介绍常用的单模态识别法、多模态识别法及分区模态综合法和频域整体识别法;第5章为模态参数识别的时域方法,介绍常用的局部识别法和整体识别法,包括单入单出(SISO)、单入多出(SIMO)和多入多出(MIMO)识别法;第6章为模态分析在工程中的应用,介绍模态分析在结构性能评价、结构动态设计、故障诊断、状态监测及声控分析等方面的应用方法及工程实例,特别是将结构动态设计中的众多方法进行了系统整理,归纳为六大类问题,即载荷识别、灵敏度分析、物理参数修改、物理参数识别、再分析和结构优化设计,这种归类使模态分析在结构动态设计中的应用一目了然。

本书第1、3、4、5章及第6章大部分内容由曹树谦编写,第2章及第6章第2节和实验指导书由张文德编写。整体思路由萧龙翔主持共同讨论拟定。郎作贵高级工程师对全书提出了许多宝贵意见,陈璐女士对全书的数次易稿进行了文字处理并制作了多幅插图,孙洪军也提供了许多帮助,在此一并致谢。

天津大学霍拳忠、徐燕申两位教授对本书进行了全面、细致的审阅,作者特别在此致谢。本书还得到国家工科力学教学基地、天津市教委资助项目、天津市21世纪青年基金项目的支持。由于编者水平所限,书中错误在所难免,恳请同行不吝赐教。

编者

2000年8月

## 缩 写 表

AR	自回归 (Autoregressive)
ARMA	自回归滑动平均 (Autoregressive Moving-average)
DFT	离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)
DSP	数字信号处理 (Digital Signal Process)
EMA	实验模态分析 (Experimental Modal Analysis)
ERA	特征系统实现法 (Eigensystem Realization Algorithm)
FEM	有限元法 (Finite Element Method)
FFT	快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform)
FRF	频率响应函数 (Frequency Response Function)
FT	傅里叶变换 (Fourier Transform)
IDFT	离散傅里叶逆变换 (Inverse Discrete Fourier Transform)
IFT	傅里叶逆变换 (Inverse Fourier Transform)
IRF	脉冲响应函数 (Impulse Response Function)
IRS	改进系统缩聚法 (Improved Reduced System)
ITD	ITD 法 (Ibrahim Time Domain Technique)
LPF	低通滤波器 (Low-Pass Filter)
LSE	最小二乘估计 (Least Squares Estimate)
LSCE	最小二乘复指数法 (Least Squares Complex Exponential Method)
MA	滑动平均 (Moving-average)
MAC	模态幅值相干系数 (Modal Amplitude Coherence)
MCF	模态置信因子 (Modal Confidence Factor)
MIMO	多输入多输出 (Multi-input Multi-output)
MPC	模态相位共线性 (Modal Phase Collinearity)
MSCC	模态形状相关系数 (Modal Shape Correlation Coefficient)
OAMCF	总体模态置信因子 (Overall Modal Confidence Factor)
PRCE	多参考点复指数法 (Polyreference Complex Exponential Method)
SIMO	单输入多输出 (Single-input Multi-output)
SISO	单输入单输出 (Single-input Single-output)
STD	STD 法 (Spare Time Domain Technique)
WLSE	加权最小二乘估计 (Weighted Least Squares Estimate)

## 主要符号表

$a_i, b_i$	粘性阻尼系统广义模态参数
$a_p$	Prony 多项式系数
$A, B, A_1, B_1$	ERA 法中的系统矩阵
$c, C$	粘性阻尼系数, 粘性阻尼矩阵
$c_{mi}$	复模态粘性阻尼系数
$D_i$	位移自由响应幅值列阵
$\text{diag}[\ ]$	对角矩阵
$D'$	时移算子
$E$	误差总方差
$e, f$	作右下角标, 代表矩阵中行、列号或响应、激励点号

$E[\cdot]$	数学期望
$E_w$	加权误差总方差
$F, F(\omega)$	简谐激振力幅值, 激振力傅氏谱
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$	傅氏变换, 傅氏逆变换
$\mathbf{F}, \mathbf{F}(\omega)$	简谐激振力幅值列阵, 激振力傅氏谱列阵
$F(s), \mathbf{F}(s)$	激振力拉氏变换, 激振力拉氏变换列阵
$f(t), \mathbf{f}(t)$	激振力, 激振力列阵
$\mathbf{f}'(t)$	状态空间中激振力列阵
$\mathbf{G}$	结构阻尼矩阵、ERA 法中的观测矩阵
$g, g_i$	结构阻尼系数
$g_{Di}$	结构阻尼系统复特征阻尼
$G_{ff}(\omega)$	$f(t)$ 的(单边)自功率谱密度函数
$G_{fx}(\omega)$	$f(t), x(t)$ 的(单边)互功率谱密度函数
$g_{mi}$	复模态结构阻尼
$\mathbf{H}$	作右上角标, 代表共轭转置
$H(s), \mathbf{H}(s)$	传递函数, 传递函数矩阵
$h(t), \mathbf{h}(t)$	脉冲响应函数, 脉冲响应函数矩阵
$H(z), \mathbf{H}(z)$	Z 变换形式的频响函数, Z 变换形式的频响函数矩阵
$H(\omega), \mathbf{H}(\omega)$	(位移)频响函数, (位移)频响函数矩阵
$H_1(\omega), H_2(\omega),  H_a(\omega) $	频响函数的三种估算形式
$H_A(\omega)$	加速度频响函数
$H_{ee}(\omega), H_{ee}(s)$	原点频响函数和传递函数( $e$ 点)
$H_{ef}(\omega), H_{ef}(s)$	跨点频响函数和传递函数( $ef$ 点)
$H_v(\omega)$	速度频响函数
$H_z(\omega)$	频响函数的一种无偏估计
$ H(\omega) , H^R(\omega), H^I(\omega)$	幅频特性, 实频特性, 虚频特性
$\mathbf{H}_0(\omega), \mathbf{Z}_0(\omega)$	结构修改前频响函数矩阵和阻抗矩阵
$i$	作右下角标, 代表自由度标号、模态标号
$\mathbf{I}$	单位矩阵
$j$	虚数单位
$J, \mathbf{J}$	目标函数, Jacobi 矩阵
$k, \mathbf{K}$	$k$ 作标号, 代表采样点号; 刚度, 刚度矩阵
$k_{Di}$	结构阻尼系统复特征刚度
$k_{mi}$	复模态刚度
$\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$	拉氏变换, 拉氏逆变换
$\mathbf{L}$	Lagrange 乘子矩阵
$m, \mathbf{M}$	质量, 质量矩阵
$\mathbf{M}_0, \mathbf{K}_0, \mathbf{C}_0$	FEM 中物理参数矩阵或结构修改前物理参数矩阵
$m_{Di}$	结构阻尼系统复特征质量
$m_{mi}$	复模态质量
$n$	系统自由度数、模态数或频域谱线标号
$N$	一次采样数、谱线数
$N_d$	显示有效谱线数
$\mathbf{N}(s)$	$\mathbf{Z}(s)$ 的伴随矩阵



$P, Q$	粘性阻尼系统状态方程系数矩阵
$p(j\omega), q(j\omega)$	频响函数(传递函数)有理分式中的多项式或正交多项式列阵
$p_m$	参数
$P(z)$	Prony 多项式
$R, I$	作角标,代表实、虚部
$\text{rank}()$	秩
$r_{efi}$	结构阻尼系统中相当于留数的模态参数
$R_{ff}(\tau)$	$f(t)$ 的自相关函数
$R_{fx}(\tau)$	$f(t), x(t)$ 的互相关函数
$R_i$	第 $i$ 阶留数矩阵
$s = \sigma + j\omega$	拉氏变换域
$S_{ff}(\omega)$	$f(t)$ 的(双边)自功率谱密度函数(自功率谱或自谱)
$S_{fx}(\omega)$	$f(t), x(t)$ 的(双边)互功率谱密度函数(互功率谱或互谱)
$s_i$	特征值、极点、复频率
$S(F p_m)$	$F$ 对 $p_m$ 的一阶灵敏度
$S_l(F p_m)$	$F$ 对 $p_m$ 的 $l$ 阶灵敏度
$t$	时间
$T$	时间周期、样本长度
$T$	作右上角标,代表转置
$u_i$	模态比例换算因子
$U, V$	模态坐标系中稳态位移(速度)响应幅值列阵
$U_i, V_i$	留数 $R_{efi} = \psi_{ei}\psi_{fi}/a_i$ 的实部和虚部
$W$	权矩阵
$w(t)$	窗函数
$W(\omega), W(f)$	窗函数的傅氏谱
$x, \mathbf{x}$	位移,位移列阵
$X, X(\omega)$	稳态位移响应幅值,稳态位移响应傅氏谱
$\mathbf{X}, \mathbf{X}(\omega)$	稳态位移响应幅值列阵,稳态位移响应傅氏谱列阵
$X(s), \mathbf{X}(s)$	位移拉氏变换,位移拉氏变换列阵
$\mathbf{x}'$	状态空间向量
$\mathbf{y}, \mathbf{y}'$	模态坐标位移向量,状态空间模态坐标向量
$-Y_{ef}/\omega^2, Z_{ef}$	频响函数 $H_{ef}(\omega)$ 的修正质量项和修正刚度项
$Y_R, Y_I$	$Y_{ef}$ 的实部和虚部
$\mathcal{Z}$	$Z$ 变换
$Z_A(\omega)$	加速度阻抗
$Z_R, Z_I$	$Z_{ef}$ 的实部和虚部
$Z(s), \mathbf{Z}(s)$	阻抗,阻抗矩阵
$Z_V(\omega)$	速度阻抗
$Z(\omega), \mathbf{Z}(\omega)$	(位移)阻抗,(位移)阻抗矩阵
$\alpha, \beta$	频响函数(传递函数)有理分式中由 $\alpha_i, \beta_i$ 组成的列阵
$\alpha_i, \beta_i$	频响函数(传递函数)有理分式中的特征参数
$\alpha_i, \alpha_k$	特征向量灵敏度中的系数
$\Gamma, \Gamma_i^T$	模态参与因子矩阵,模态参与因子行阵
$\gamma^2(\omega)$	相干函数

$\delta(t)$	$\delta$ 函数
$\delta(\tau)$	随机减量特征信号
$\Delta f, \Delta\omega$	频率分辨率或频率间隔
$\Delta M, \Delta K, \Delta C$	修正质量矩阵, 修正刚度矩阵, 修正阻尼矩阵
$\Delta t$	采样时间间隔、时间间隔
$\Delta(s) =  Z(s) $	特征多项式
$\Delta\omega, \Delta\Omega$	半功率带宽, 相对半功率带宽
$\varepsilon$	误差列阵
$\zeta, \zeta_i$	粘性阻尼比
$\eta, \eta_i$	损耗因子、结构阻尼比
$\eta_{mi}$	复模态结构阻尼比
$\theta, \theta_i$	初相角
$\lambda, \lambda_i$	特征值或复频率
$\Lambda$	谱矩阵
$\sigma, \sigma_i$	衰减系数(衰减指数)
$\sigma^2$	协方差
$\sigma_{mi}$	复模态粘性阻尼衰减系数
$\Sigma$	奇异值分解中以奇异值为(部分)对角元的矩阵
$\tau$	时间延迟、时间
$\varphi, \varphi_i, \varphi$	相角, 实模态向量(实特征向量), 实模态系统自由响应位移幅值列阵
$\Phi$	实模态矩阵
$\psi_i, \psi$	复模态向量, 复模态系统自由响应位移幅值列阵
$\Psi$	复模态矩阵
$\psi_i', \psi'$	状态空间复特征向量, 响应幅值列阵
$\Psi'$	状态空间复特征向量矩阵
$\omega, f$	圆频率, 频率
$\Omega$	无量纲频率(频率比)
$\omega_0, \omega_{0i}$	无阻尼固有频率(固有频率)
$\omega_d, \omega_{di}$	阻尼固有频率
$\omega_D$	位移谐振频率
$\omega_m, f_m, f_{max}$	分析信号中最高频率
$\omega_{mdi}$	复模态阻尼固有频率(特征频率)
$\omega_{mi}$	复模态频率
$\omega_N$	Nyquist 频率(混叠频率)
$\omega_s, f_s$	采样圆频率, 采样频率
+	作右上角标, 代表 Moore-Penrose 广义逆
-	作上角标, 代表取平均(统计平均); 作右上角标, 代表广义逆
-T	作右上角标, 代表求转置(或逆)后再求逆(或转置)
*	卷积; 作右上角标, 代表共轭
~	作上标, 代表序列信号或实测信号
·, ..	作上标, 代表对时间求一次或二次导数
⊙	直积(Hadamard 积)
$\  \cdot \ $	范数
$\  \cdot \ _2$	2 范数
$\  \cdot \ _F$	F 范数

## 目 录

缩 写 表 .....	( I )
主要符号表 .....	( I )
绪 论 .....	( 1 )
0.1 振动问题的三种基本类型 .....	( 1 )
0.2 模态分析及相关概念 .....	( 2 )
0.3 模态分析发展过程 .....	( 4 )
思考题 .....	( 4 )
第 1 章 模态分析理论基础 .....	( 5 )
1.1 引 言 .....	( 5 )
1.2 单自由度系统的振动 .....	( 5 )
1.3 单自由度系统频响函数的各种表达形式及其特征 .....	( 11 )
1.4 多自由度系统的实模态分析 .....	( 18 )
1.5 多自由度系统的复模态分析 .....	( 27 )
1.6 拉氏变换的方法及模态参数的标度 .....	( 36 )
1.7 常用激励下的频响函数及频响函数与脉冲响应函数的物理意义 .....	( 44 )
思考题 .....	( 51 )
第 2 章 时间历程的测量 .....	( 53 )
2.1 引 言 .....	( 53 )
2.2 实验结构的支撑方式 .....	( 54 )
2.3 激励方式 .....	( 56 )
2.4 激励装置 .....	( 59 )
2.5 激励信号 .....	( 62 )
2.6 测量系统 .....	( 67 )
2.7 激振器实验 .....	( 76 )
2.8 冲击实验 .....	( 80 )
思考题 .....	( 84 )
第 3 章 动态测试后处理 .....	( 85 )
3.1 引 言 .....	( 85 )
3.2 从无限长连续信号到有限长离散信号的实现过程 .....	( 86 )
3.3 采样、采样定理和混频现象 .....	( 88 )
3.4 泄漏和窗函数 .....	( 91 )
3.5 离散傅里叶变换 .....	( 96 )
3.6 选带分析技术 .....	( 99 )
3.7 平均技术 .....	( 101 )
3.8 噪声对频响函数估算形式的影响 .....	( 104 )
3.9 动态测试及后处理中应注意的一些问题 .....	( 109 )

<b>思考题</b> .....	(110)
<b>第4章 模态参数识别的频域方法</b> .....	(111)
4.1 引言 .....	(111)
4.2 最小二乘法 .....	(112)
4.3 单模态识别之一:最小二乘圆拟合法 .....	(116)
4.4 单模态识别之二:差分法 .....	(122)
4.5 多模态识别之一:非线性加权最小二乘法 .....	(124)
4.6 多模态识别之二:直接偏导数法 .....	(129)
4.7 多模态识别之三:Levy法(多项式拟合法) .....	(133)
4.8 多模态识别之四:正交多项式拟合法 .....	(137)
4.9 分区模态综合法 .....	(138)
4.10 频域总体识别法 .....	(141)
4.11 模态振型的动画显示 .....	(145)
<b>思考题</b> .....	(146)
<b>第5章 模态参数识别的时域方法</b> .....	(147)
5.1 引言 .....	(147)
5.2 随机减量技术 .....	(148)
5.3 ITD方法 .....	(151)
5.4 最小二乘复指数法(LSCE) .....	(159)
5.5 ARMA时序分析法 .....	(163)
5.6 多参考点复指数法(PRCE) .....	(168)
5.7 特征系统实现法(ERA) .....	(172)
<b>思考题</b> .....	(180)
<b>第6章 模态分析在工程中的应用</b> .....	(181)
6.1 引言 .....	(181)
6.2 模态分析在结构性能评价中的直接应用 .....	(182)
6.3 模态分析在结构动态设计中的应用综述 .....	(187)
6.4 载荷识别 .....	(189)
6.5 灵敏度分析 .....	(194)
6.6 物理参数修改 .....	(200)
6.7 物理参数识别 .....	(213)
6.8 再分析 .....	(218)
6.9 结构优化设计 .....	(228)
6.10 模态分析在故障诊断和状态监测中的应用 .....	(233)
6.11 模态分析在声控方面的应用 .....	(236)
<b>思考题</b> .....	(238)
<b>附录 模态分析实验指导书</b> .....	(240)
实验1 传递函数的测量 .....	(240)
实验2 振动结构的实验模态分析 .....	(242)
<b>参考文献</b> .....	(244)

# 绪论

## 0.1 振动问题的三种基本类型

一般的振动问题由激励(输入)、振动结构(系统)和响应(输出)三部分组成,如图1所示。根据研究目的不同,可将一般振动问题分为以下基本类型。

### 1. 已知激励和振动结构,求系统响应

这是振动的正问题,称为系统动力响应分析,是研究得最早、最多的一类振动问题。当人们发现仅由静力分析不能满足产品设计要求时,便开始详细

研究基于动力学理论的系统动力响应问题。根据已知的载荷条件,对振动结构进行简化而得到可求解的数学模型,通过一定的数学方法求解出振动结构上关心点的位移、应力、应变等结果,以此为依据对已设计好的振动结构进行考核。不满足动态设计要求时,需修改结构。这一基本分析过程至今仍广泛用于工程问题中,特别是基于线性模型假设的振动理论,已发展至十分成熟的阶段,而许多工程问题应用这一理论能得到相当满意的结果。

工程中求解系统动力响应最成功、最实用的方法莫过于有限元法(FEM)。通过对振动结构离散化并考虑适当的边界条件和连接条件,可以容易求解各种复杂结构在复杂激励作用下的响应。如果模型合理,能得到比较满意的结果。这为振动理论的实用化提供了有利条件,特别是仅根据图纸便可以方便地得到振动结构修改后的动态效果。

### 2. 已知激励和响应,求系统参数

这是振动问题的一类反问题,称为系统识别(辨识)。这一类问题的提出实际是源于第一类基本问题,尽管已知激励和振动结构可求得响应,但许多情况下响应结果并不满足要求,需要修改结构。这时结构修改往往只凭经验,带有很大的盲目性,不仅效果常常不满意,效率也很低,经常反复多次才能达到基本满意的结果。有限元法是进行结构修改的有力工具,然而有限元初始建模往往存在较大误差。鉴于此,人们开始探索根据激励和响应反推振动结构参数的规律和方法。对大多数问题,输入、系统和输出三者有着确定性的关系,只有少数非线性问题,这种确定性关系并不存在。因此,人们以一定假设(如线性、定常、稳定假设)为前提,以一定理论(如线性振动理论)为基础研究得到了系统重构(识别)的多种方法。当然,这些方法的实施有赖于其他若干种理论和方法。

经常把一个系统(振动结构)模型分成三种:①物理参数模型,即以质量、刚度、阻尼为特征参数的数学模型,这三种参数可完全确定一个振动系统;②模态参数模型,即以模态频率、模态向量(振型)和衰减系数为特征参数的数学模型和以模态质量、模态刚度、模态阻尼、模态向量(留数)为特征参数组成的另一类模态参数模型,这两类模态参数都可完整描述一个振动系统;③非参数模型,即频响函数或传递函数、脉冲响应函数、功率谱或相关函数等,它们是反映

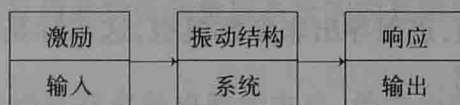


图1 一般振动问题的组成

振动系统特性的非参数模型。

根据上述分类方法,系统识别也分为三种:①物理参数识别,是以物理参数为目标的系统识别方法,是进行结构动力修改的基础;②模态参数识别,是以模态参数模型为基础,以模态参数为目标的系统识别方法,因为模态参数较物理参数更能从整体上反映系统的动态固有特性,而且参数少得多,所以进行模态参数识别是进行系统识别的基本要求,也是进行物理参数识别的基础,许多问题实际只做到模态参数识别即可达到目的,模态参数识别是模态分析的主要任务;③非参数识别,即根据激励和响应确定系统的频响函数(或传递函数)和脉冲响应函数等非参数模型。一般来讲,非参数模型的辨识不是进行系统识别的最终目的,但可通过非参数模型进一步确定模态参数或物理参数。

以上三种系统识别的关系是从已知激励和响应求系统的角度论述的,事实上,三种模型等价。广义地讲,从一种模型可以确定另外两种模型,如从系统的物理参数模型可得到模态参数模型,进而导出非参数模型,这实际是振动理论的基本内容之一,也是进行系统识别的理论基础。

### 3. 已知系统和响应,求激励

这是另外一类振动反问题。如车、船、飞机的运行,地震、风、波浪引起的建筑物振动等,在这些问题中,已知振动结构并较容易测得振动引起的动力响应,但激励却不易确定。为了进一步研究在这些特定激励下原结构或修改后结构的动力响应,需要确定这些激励。当然,大多数情况下需用统计特性描述,这样的问题通常称为环境预测或环境模拟。另外一些问题,如旋转机械的振动、爆炸冲击引起的振动等,也难以知道激励情况,需通过结构和响应反推激励。故这类问题也称载荷识别。

## 0.2 模态分析及相关概念

至此,尚未对模态分析给出定义。一般地,以振动理论为基础、以模态参数为目标的分析方法,称为模态分析。更确切地说,模态分析是研究系统物理参数模型、模态参数模型和非参数模型的关系,并通过一定手段确定这些系统模型的理论及其应用的一门学科。

按照振动结构非线性程度大小,可将系统简化为线性系统和非线性系统。因而,所进行的系统识别也有线性系统识别和非线性系统识别之分。经典的模态分析均限于线性系统即线性模态分析。近年来,不断有人提出并研究非线性模态分析的问题,但远远未达到线性模态分析那样的成熟地步。由于线性模态分析在处理非线性系统时存在较大误差,相信基于非线性振动理论的非线性模态分析将会越来越受到重视。本书仅限于讨论线性模态分析。

根据研究模态分析的手段和方法不同,模态分析可分为理论模态分析和实验模态分析。理论模态分析又称模态分析的理论过程,是指以线性振动理论为基础,研究激励、振动结构与响应三者的关系,即已知物理参数模型,通过一定理论和方法求模态参数模型和非参数模型,如图2所示。

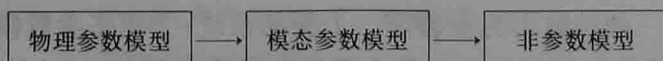


图2 理论模态分析

实验模态分析(EMA)又称模态分析的实验过程,是理论模态分析的逆过程,如图3所示。首先,实验测得激励和响应的的时间历程(或仅响应),运用数字信号处理技术获得频响函数(传递函数)、脉冲响应函数、响应功率谱或相关函数,从而得到系统的非参数模型;其次,运用参数识别方法,求得系统模态参数;最后,如果有必要,进一步确定系统的物理参数。因此,实验模态分析是综合运用线性振动理论、动态测试技术、数字信号处理和参数识别等手段,进行系统识别的过程。本书主要讨论实验模态分析。

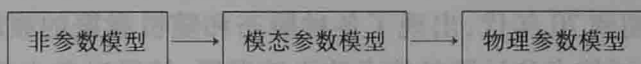


图3 实验模态分析

计算模态分析实际上是一种理论建模过程,主要是运用有限元法对振动结构进行离散,建立系统特征值问题的数学模型,用各种近似方法求解系统特征值和特征向量。由于阻尼难以准确处理,因此通常不考虑小阻尼系统的阻尼,解得的特征值和特征向量即系统的固有频率和固有振型向量。

模态参数识别是实验模态分析的核心。模态参数识别已有多种成熟的方法,最常用的方法是基于最小二乘法的曲线拟合法。其含义是,根据理论模态分析选择适当的数学模型,使测得的实验模型与数学模型之差最小。

经典的模态参数识别分为频域模态参数识别和时域模态参数识别。以频响函数(传递函数)为基础的参数识别称为频域参数识别;以时域信号(脉冲响应函数或自由振动响应)为基础的参数识别称为时域参数识别。频域法已发展得相当成熟、实用。由于时域法所用设备简单,尤其是只根据自由响应而无须激励就可进行参数识别而受到普遍重视。

在识别除振型外的其他模态参数时,按照使用响应信号的数目可分为局部识别和整体识别两种。如果一次使用一个响应信号,则对应的参数识别称为局部识别;如果同时测量多个响应信号并进行参数识别,则称为整体识别。按照使用激励和响应的数目可分为单入单出(SISO)识别、单入多出(SIMO)识别和多人多出(MIMO)识别。SISO属于局部识别,SIMO和MIMO属于整体识别。在SISO频域模态参数识别中,按照模态密集程度不同,可分为单模态识别和多模态识别。前者将待识别的各阶模态看作与其他模态独立的单自由度系统,适于阻尼较小、模态较分散的情形;后者将待识别的几阶模态看作耦合的,并考虑拟合频段以外的模态影响。对于阻尼较大、模态较密集的情况,必须用多模态参数识别。

近年来,仅基于环境激励或自然激励(NeXT)响应的模态参数识别方法得到迅速发展,对应的模态分析又称为工作模态分析(OMA)。在这些方法中,通过同时测量结构在环境激励下的响应,基于响应的功率谱或相关函数进行模态参数识别。因此,工作模态分析实际是整体识别,且包含频域识别和时域识别两种情况。

在模态分析中,阻尼是一个较难处理的问题。根据结构性质的不同,常将系统阻尼简化为无阻尼、比例阻尼(粘性比例阻尼、结构比例阻尼)、一般粘性阻尼与结构阻尼等四种情形。在不同阻尼模型下,振动系统模态参数的性质不同。根据模态向量是实向量还是复向量,振动系统可分为实模态系统和复模态系统。无阻尼和比例阻尼系统属于实模态系统,而一般粘性阻尼和结构阻尼系统属于复模态系统。因此,对应的模态分析有实模态分析和复模态分析两种。

### 0.3 模态分析发展过程

经过半个多世纪的发展,模态分析已经成为振动工程中一个重要的分支。早在 20 世纪四五十年代,在航空工业中就采用共振实验确定系统的固有频率。20 世纪 60 年代,发展了多点单相正弦激振、正弦多频单点激励,通过调力调频分离模态,制造出商用模拟式频响函数分析仪。20 世纪 60 年代后期到 70 年代,出现了各种瞬态和随机激振的频域模态参数识别技术。随着 FFT 数字式动态测试技术和计算机技术的飞速发展,使得以单入单出及单入多出为基础识别方式的模态分析技术普及到各个工业领域,模态分析得到快速发展并日趋成熟,商用数字分析仪和软件大量出现。20 世纪 80 年代后期,主要是多人多出随机激振技术和识别技术得到发展。20 世纪 80 年代中期至 90 年代,模态分析在各个工程领域得到普及和深层次应用,在结构性能评价、结构动态修改和动态设计、故障诊断和状态监测以及声控分析等方面的应用研究异常活跃,尤其是基于 FEM、EMA 和最优控制理论的结构动态修改和动态设计取得了丰硕的研究成果。进入 21 世纪以后,基于环境激励或自然激励的工作模态分析得到快速发展和应用,并为解决一些特殊工程问题的模态分析提供了条件。同时,基于新型测量技术(如激光测量)的模态分析走向实用。目前,模态分析技术已经成为一门重要的工程技术,而不仅仅是研究单位从事研究的理论课题。

#### 思 考 题

1. 振动的三类基本问题是什么?
2. 描述振动系统有哪几种模型? 这几种模型有何关系?
3. 对于振动结构,系统识别有哪几种情形? 其关系如何?
4. 什么是模态分析?
5. 模态分析有哪两种分析过程? 分别画简图说明。
6. 什么叫模态参数识别? 模态分析有哪几种参数识别方法?(分别按不同方法分类)
7. 模态分析中常用的阻尼模型有哪几种? 分别属于何种模态分析系统?



# 第1章 模态分析理论基础

## 1.1 引言

本书讨论的是线性系统,并且假设系统是定常与稳定的,即线性时不变系统。所谓线性,是指描述系统振动的微分方程为线性方程,其响应对激励具有叠加性。设系统在激励 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 单独作用下的响应是 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ ,则系统在 $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$ 作用下的响应是 $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ ,其中 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 为常数。所谓定常,是指振动系统的动态特性(如质量、阻尼、刚度等)不随时间变化。线性定常系统具有频率保持性,即如系统受到简谐激励 $f(t) = Fe^{j\omega t}$ 作用,则系统的稳态响应 $x(t) = Xe^{j\omega t}$ 的频率亦为 $\omega$ 。所谓稳定,是指系统对有限激励将产生有限响应,即系统满足傅氏变换和拉氏变换的条件。此外,还常假设系统遵从 Maxwell 互易性原理,即线性系统的物理参数矩阵具有对称性。

一个振动系统可以有多种分类方法。从空间角度来分,有离散(有限自由度)系统和连续(无限自由度)系统两种;从时间角度来分,有连续时间系统和离散时间系统两种。所谓连续时间系统,是指激励和响应是连续时间 $t$ 的函数。所谓离散时间系统,是指激励和响应是离散时间点的函数,即对连续(模拟信号)采样后得到的离散信号(数字信号)。本章只讨论空间离散的连续时间系统,后续章节中会涉及空间和时间都离散的系统。

本章研究振动系统的物理参数模型、模态参数模型和非参数模型的关系,即三种模型的理论建模问题。研究方法有坐标变换法与拉氏变换法。坐标变换法适用于简谐激励的情形,它能给出各种模型及参数的明确物理意义,所以用较多篇幅进行讨论。拉氏变换法简明,且适用于一般激励情形,并能给出对传递函数或频响函数更多的理解。

不管何种方法,总是先建立结构的物理参数模型,即以质量、阻尼、刚度为参数的关于位移的振动微分方程;其次是研究其特征值问题,求得特征对(特征值和特征向量),进而得到模态参数模型,即系统的模态频率、模态向量、模态阻尼或模态质量、模态刚度、模态阻尼等参数,为了研究模态参数模型的物理意义,有时也讨论自由响应;最后在讨论以上两种模型的基础上,通过研究强迫动力响应问题,可以得到系统的非参数模型,如频响函数(或传递函数)和脉冲响应函数。非参数模型是进行实验模态分析的基础,故对非参数模型的研究显得尤其重要。

根据阻尼模型的不同,可分为无阻尼、比例阻尼、一般粘性阻尼和结构阻尼四种情形进行讨论。

## 1.2 单自由度系统的振动

单自由度系统是最简单的离散振动系统。研究单自由度系统振动的意义是:①由此给出有关基本概念;②单自由度系统的理论在单模态系统识别中可直接应用。