科学版

大学数学习题精解系列

伯克利数学问题集

〔美〕P.德苏泽　J.席尔瓦　著

- 美国著名大学历届考研的试题汇编
- 课程学习与考研复习的理想读物
- 试题涵盖代数与分析的全部内容
- 绝大部分试题都有详尽的解答

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学习题精解系列

伯克利数学问题集

〔美〕 P. 德苏泽 J. 席尔瓦 著
包雪松 林应举 译

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书为美国加州大学伯克利分校数学系历届攻读数学博士学位者第一学年水平测试的试题汇编. 分问题和题解两部分，章节划分按分支学科进行，包括实分析，多元微积分，微分方程，度量空间，复分析，代数和线性代数等内容.

读者对象为高等院校数学系高年级学生、研究生和教师.

Translation from the English language edition:
Berkeley Problems in Mathematics by Paulo Ney de Souza and Jorge-Nuno Silva
Copyright © 1998 All text by Paulo Ney de Souza and Jorge-Nuno Silva
Copyright © 1998 All problems by California Regents
Published by Springer-Verlag New York, Inc. Springer-Verlag is a company in the Bertelsmann Springer publishing group
All Rights Reserved

图字：01-2001-0354 号

图书在版编目（CIP）数据

伯克利数学问题集/（美）P. 德苏泽，J. 席尔瓦著；包雪松，林应举译. —北京：科学出版社，2003
（大学数学习题精解系列）
ISBN 7-03-010402-1

Ⅰ. 伯… Ⅱ. ①德…②席…③包…④林… Ⅲ. 数学-研究生-入学考试，美国-试题 Ⅳ. O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 032824 号

责任编辑：刘嘉善 杨 波/责任校对：包志虹
责任印制：安春生/封面设计：黄华斌

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双 青 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003 年 3 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2003 年 3 月第一次印刷 印张:23 1/2
印数:1—3 000 字数:447 000

定价:42.00 元

（如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉）

译者的话

正如作者在前言中所介绍的，本书是美国著名学府加利福尼亚大学伯克利分校多年来对研究生进行数学基础知识测试的历届的试题汇编.大多数题目给出解答，有的题目的解法还不止一种.题目分科编章节，每节的题目由易到难.本书可作为高等院校数学系高年级学生和研究生对基础知识的自我检测和学习参考.

本书分为问题和题解两大部分，每部分对应地各分七章.各章中的节也是一一对应的.第一到五章(实分析、多元微积分、微分方程、度量空间、复分析)由包雪松翻译，六、七章(代数、线性代数)由林应举翻译.在翻译过程中我们发现原书中，尤其是题解部分在数学式子里有不少的遗漏和错误.究其原因也许大多是属于打字排版的疏忽造成的.但有一处我们认为其解法是不成立的.对于所发现的遗漏和差错已作更正，必要时还作了说明.由于译者水平有限，难免还有错误尚未发现，也许有的地方反而改错了，另外在翻译方面错误也在所难免，欢迎读者批评指正.

包雪松

林应举

2001年12月于南京

前　言

1977年加利福尼亚大学伯克利分校数学系开始了面向博士学位的数学笔试，作为对博士生最主要的要求之一.该考试取代了标准质量考核制度，其目的是考查博士生课程的一年级学生是否已掌握足够的数学基础知识，使得他们能继续其课程而有把握获得成功.

历史上每次参加考试的学生都大致有半数能够通过，并且允许学生们有三次尝试的机会.自从该考试实行以来，它已成为攻读学位过程需要越过的一道关口，同时也就成为能否在伯克利分校成功地完成学位课程之最低要求的一项标准.虽然学生们被允许有三次机会，但是大多数人都认为最好是在学位课程一开始时就能达到这一要求，而不要推迟到第一学年的中期或者后期.本书就是为此而编写的，希望通过出版这些资料有助于那些有志于攻读博士学位的学生在大学本科期间就能为该考试作好准备.

这一考试现在每年举行两次，时间定在每学期的第二周.在两天时间内要进行6个小时的笔试，每次是9道题(1988年前是10道).学生从9道中选答6道(1988年前是10选7).试题覆盖的内容主要是分析与代数，它们应该是一个有素养的数学系学生在大学期间所受训练的一部分.本书收集了近20年来在试题中出现过的大约1000个问题，同时还给出了大多数问题的解.相信本书将成为人们乐于耕耘的园地.

在伯克利按季来分学期的年代，这种考试每年举行三次，即春、夏、秋三季.自1986年以来考试一年举行两次，分别于当年的1月和9月.

自第一次考试到1981年秋，采用的方针是允许作二次尝试，每次考试为6个小时，在20道题中选14道.自1982年冬到1988年春，允许作二次尝试，每次考试为8个小时，20道题中选14题.自1988年秋开始，允许作三次尝试，每次考试为6个小时，总共18道题中选12道题.在所有情况下，都要在进入攻读学位课程的头13个月内通过该项考试.

在众多的试题中，它们将按科目分类，并且按先易后难的原则予以排序.在每一题上均标明该题出现在哪年哪季的考试中，例如缩写词Fa 87用来表示该试题是在1987年秋季的试卷中.凡是不止一次地出现过的试题将合并成一道，以多个标号来标明每一次考试.有时这一合并需要将试题的文字稍加修改(少数地方使题目更为确切!)，而原始的文字已被保存在试题的电子版中(参看附录A).附录中的其他项目包括有课程概要，考试的及格成绩，以及贯穿在题解中所用到的文献.

像本书这样把如此大量的问题汇集在一起按科目进行分类不是一件容易的

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

事.有些问题是跨学科的,而又有一些问题有分析的与数论的多种解法(如题1.1.15),因而选择起来免不了有一定的困难.在大多数的此种情况下,我们提供给读者可替代的分类或指出在其他地方有类似的问题.

在这里我们很愿意获悉有关问题的其他解法并对已有的解法进行评论.请给作者发电子邮件.(谢词从略)

P.德苏泽

J.席尔瓦

伯克利　1998年4月10日

目　录

第一部分　问　　题

第二部分 题解部分

第三部分 附 录

第一部分　问　　题

第一章　实　分　析

1.1　初等微积分

题 1.1.1(Fa87)　证明当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 及 $0<p<1$ 时 $(\cos\theta)^p\leqslant\cos(p\theta)$.

题 1.1.2(Fa77)　令 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为连续可微的,且满足 $f(0)=0$.证明

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|f(x)\right|\leqslant\left(\int_0^1(f'(x))^2dx\right)^{1/2}.$$

题 1.1.3(Sp81)　令 $f(x)$ 为一个对所有 $x\geqslant 1$ 都有定义的实值函数,满足 $f(1)=1$ 且

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f(x)^2}.$$

证明

$$\lim_{x\to\infty}f(x)$$

存在且小于 $1+\frac{\pi}{4}$.

题 1.1.4(Sp95)　令 $f,g:[0,1]\to[0,\infty)$ 为满足

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}g(x)$$

的连续函数.证明存在 $t\in[0,1]$ 满足 $f(t)^2+3f(t)=g(t)^2+3g(t)$.

题 1.1.5(Fa86)　对实线上的一个实值函数 f,通过 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ 定义函数 Δf.当 $n\geqslant 2$ 时以 $\Delta^n f=\Delta(\Delta^{n-1}f)$ 递推地定义 $\Delta^n f$.证明 $\Delta^n f\equiv 0$ 成立的充要条件是 f 具有形式 $f(x)=a_0(x)+a_1(x)x+\cdots+a_{n-1}(x)x^{n-1}$,其中 a_0, $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为具有周期为 1 的周期函数.

题 1.1.6(Fa81)　对下面的每一个论述或证明其成立,或(以反例)证明其不成立:

1. 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{t\to a}g(t)=b \text{ 和 } \lim_{t\to b}f(t)=c,$$

则

$$\lim_{t\to a}f(g(t))=c.$$

2. 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的且 U 为 $\mathbb{R}$ 中的一个开集,则 $f(U)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个开集.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

3. 令 f 为在区间 $-1<x<1$ 上 C^{∞} 类的. 假定对所有 $n\geqslant 1$ 和区间中所有的 x, $|f^{(n)}(x)|\leqslant 1$, 则 f 为实解析的, 也就是说, 在区间中每一点的一个邻域中它有一个收敛的幂级数展式.

题 1.1.7(Su81) 令

$$y(h)=1-2\sin^2(2\pi h),\quad f(y)=\frac{2}{1+\sqrt{1-y^2}}.$$

证明陈述

$$f(y(h))=2-4\sqrt{2}\pi+O(h^2)$$

是正确的, 其中

$$\lim_{h\to 0}\frac{O(h^2)}{h^2}<\infty.$$

题 1.1.8(Fa82) 1. 证明不存在从闭区间[0,1]到开区间(0,1)的连续映射.

2. 找出一个从开区间(0,1)到闭区间[0,1]的连续满映射.

3. 证明在本题第二部分中没有一个映射可以是双射的.

题 1.1.9(Fa94, Sp98) 找出在一个以 a,b 为半轴的椭圆中所有可以内接的三角形的最大面积, 并描述具有最大面积的三角形.

提示: 以参数方程 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 来描述椭圆.

题 1.1.10(Fa93) 令 f 为 $[0,\infty)$ 上的一个连续实值函数. 令 A 为可表示成 $a=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ 的实数 a 的集合, 其中 (x_n) 是 $[0,\infty)$ 中满足 $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$ 的某个序列. 证明, 若 A 含有数 a 和 b, 那么它就含有以 a 和 b 为端点的整个区间.

题 1.1.11(Su81) 阐明方程

$$x\left(1+\log\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{x}}\right)\right)=1,\quad x>0,\quad \varepsilon>0,$$

对每一个充分小的 $\varepsilon>0$ 恰有两个解. 令 $x(\varepsilon)$ 为较小的一个. 阐明

1. 当 $\varepsilon\to 0_+$, $x(\varepsilon)\to 0$;

2. 当 $\varepsilon\to 0_+$, 对任何 $s>0$, $\varepsilon^{-s}x(\varepsilon)\to 0$.

题 1.1.12(Sp82) 假设 $f(x)$ 为一个具有实系数的多项式而 a 为一个满足 $f(a)\neq 0$ 的实数. 阐明存在一个实多项式 $g(x)$, 使我们如以 $p(x)=f(x)g(x)$ 定义 p 时有 $p(a)=1$, $p'(a)=0$ 和 $p''(a)=0$.

题 1.1.13(Su84) 令 $p(z)$ 为一个具有实系数的非常数多项式使对某个实数 a 来说有 $p(a)\neq 0$ 而 $p'(a)=p''(a)=0$. 证明方程 $p(z)=0$ 有非实数根.

题 1.1.14(Fa84) 令 f 为在实线上的一个 C^2 函数. 假设 f 为有界的且具有有界的二阶导数, 令

$$A=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\quad B=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|.$$

证明

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}.$$

题 1.1.15(Fa90) 找出所有满足 $0<a<b$ 且 $a^b=b^a$ 的整数对 a 与 b.

题 1.1.16(Sp92) 对怎样的正数 a 及 b，具有 $a>1$，而使方程 $\log_a x=x^b$ 有一个关于 x 的正数解？

题 1.1.17(Sp84) 哪个数较大，π^3 还是 3^π？

题 1.1.18(Sp94) 对 $(1,\infty)$ 中的哪个 a 而言 $x^a\leqslant a^x$ 对 $(1,\infty)$ 中的所有 x 成立？

题 1.1.19(Sp96) 阐明一个能满足

$$\text{对所有 } x>0 \text{ 均有 } e^x>x^t$$

的 t，其充要条件是 $t<e$.

题 1.1.20(Su77) 假设 $f(x)$ 定义在 $[-1,1]$ 上，且 $f'''(x)$ 为连续的. 阐明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n(f(1/n)-f(-1/n))-2f'(0))$$

收敛.

题 1.1.21(Fa96) 若 f 为在一个开区间上的 C^2 函数，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x).$$

题 1.1.22(Fa97) 证明对所有的 $x>0$，有 $\sin x>x-x^3/6$.

题 1.1.23(Su85) 1. 对 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，证明

$$\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta.$$

2. 利用本题第一部分或通过其他方法，阐明若 $\lambda<1$，则

$$\lim_{R\to\infty}R^\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}d\theta=0.$$

题 1.1.24(Su78) 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续的，假设 $\mathbb{R}$ 含有一个可数无限子集 S 使当 p 和 q 不在 S 中时

$$\int_p^q f(x)dx=0.$$

证明 f 恒等于零.

题 1.1.25(Fa89) 令函数 f 从 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 有下面的性质：

- f 是 C^1 类的；
- $f(0)=f(1)=0$；
- f' 是不增的(即 f 是凹函数).

证明 f 图的弧长不超过 3.

题 1.1.26(Sp93) 令 f 是在 $[0,\infty)$ 上使反常积分 $\int_1^\infty|f'(x)|dx$ 收敛的实值 C^1 函数. 证明无穷级数 $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ 收敛的充要条件是 $\int_1^\infty f(x)dx$ 收敛.

题 1.1.27(Su82)　令 E 为所有连续实值函数 $u:[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足条件

$$|u(x)-u(y)|\leqslant|x-y|,\quad 0\leqslant x,\quad y\leqslant 1,\quad u(0)=0$$

的集合.令 $\varphi:E\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\varphi(u)=\int_0^1(u(x)^2-u(x))dx.$$

阐明 φ 在E 的某个元素上达到它的最大值.

题 1.1.28(Fa87)　令 S 为$[0,1]$上满足 $f(0)=0$ 且 $\int_0^1 f'(x)^2dx\leqslant 1$ 的所有实 C^1 函数 f 的集合.定义

$$J(f)=\int_0^1 f(x)dx.$$

阐明函数 J 在S 上有界,并计算它的上确界.是否存在一个函数 $f_0\in S$ 在该处J 达到它的极大值?假如存在,f_0 又是什么?

题 1.1.29(Fa82,Fa96)　令 f 为$[0,1]$上的一个实值非负连续函数,当 $t\in[0,1]$ 时满足

$$f(t)^2\leqslant 1+2\int_0^t f(s)ds.$$

阐明当 $t\in[0,1]$时 $f(t)\leqslant 1+t$.

提示:你可以考虑

$$u(t)=1+2\int_0^t f(s)ds.$$

题 1.1.30(Sp96)　假设 φ 为$\mathbb{R}$ 上的一个 C^1 函数使得

当 $x\to\infty$ 时,$\varphi(x)\to a$ 且$\varphi'(x)\to b$.

证明或给出一个反例:b 必定为零.

题 1.1.31(Su77)　阐明

$$F(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k\cos^2x}}$$

当 $0\leqslant k<1$ 时,是 k 的一个增函数.

题 1.1.32(Fa79)　已知

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

显式地求出 $f'(t)$,这里

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tx^2}dx,\quad t>0.$$

题 1.1.33(Fa80)　定义

$$F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{(t^2+xt)}dt.$$

计算 $F'(0)$.

题 1.1.34 (Fa95) 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个对所有的 x 及 y 满足 $f(x)f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 的非零的 C^∞ 函数，使得当 $|x|\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$.

1. 证明 f 为一个偶函数且 $f(0)$ 为 1.

2. 证明 f 满足微分方程 $f'(x)=f''(0)xf(x)$，并找出满足给定条件的最一般的函数.

1.2 极限与连续性

题 1.2.1 (Fa90) 假设 f 映射紧区间 I 入它自身且对所有的 $x,y\in I$, $x\neq y$ 满足

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,$$

是否能下这样的结论：存在着某个常数 $M<1$ 使对所有的 $x,y\in I$，都有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|?$$

题 1.2.2 (Sp90) 令实值函数 f 在 $[0,1]$ 上有下面两个性质：

- 若 $[a,b]\subset[0,1]$，则 $f([a,b])$ 包含具有 $f(a)$ 与 $f(b)$ 为端点的区间（即 f 具有中间值性质）；
- 对每个 $c\in\mathbb{R}$，集合 $f^{-1}(c)$ 为闭集.

证明 f 是连续的.

题 1.2.3 (Sp83) 假设 f 为 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的周期函数，即 $f(x+1)=f(x)$. 阐明：

1. 函数 f 有上下界并且达到它的极大值与极小值.

2. 函数在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

3. 存在一个实数 x_0 使得

$$f(x_0+\pi)=f(x_0).$$

题 1.2.4 (Sp77) 令 $h:[0,1)\to\mathbb{R}$ 为定义在半开区间 $[0,1)$ 上的映射. 证明若 h 是一致连续的，则存在一个一致连续的映射 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得 $g(x)=h(x)$ 对所有 $x\in[0,1)$ 成立.

题 1.2.5 (Sp84) 证明或提供一个反例：假如函数 f 从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 的每一点处都有左极限和右极限，则 f 的间断点的集合至多是可数的.

题 1.2.6 (Fa78) 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 对 $x\leqslant y$ 满足 $f(x)\leqslant f(y)$. 证明 f 的不连续点集合是有限的或是可数无穷的.

题 1.2.7 (Su85, Fa96) 一个函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 称作是上半连续的，假如对给定的 $x\in[0,1]$ 及 $\varepsilon>0$，存在着一个 $\delta>0$ 使得若 $|y-x|<\delta$，则 $f(y)<f(x)+\varepsilon$. 证明一个在 $[0,1]$ 上上半连续的函数是上有界的且在某个点 $p\in[0,1]$ 处达到它的极大值.

题 1.2.8 (Su83) 证明若一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数将开集映射至开集，则它必定是单调的.

题 1.2.9(Fa91) 令 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个连续函数使得对所有的 x 及 y 有 $|f(x)-f(y)|\geqslant|x-y|$. 证明 f 的值域为 $\mathbb{R}$ 的全部.

注意:同时参看题 2.1.8.

题 1.2.10(Fa81) 令 f 为 $[0,1]$ 上的一个连续函数. 计算下面的极限值.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

题 1.2.11(Fa88, Sp97) 令 f 为从 $[0,1]$ 到它自身的函数, 其图像

$$G_f=\{(x,f(x))\mid x\in[0,1]\}$$

是一个单位正方形的闭子集. 证明 f 是连续的.

注意:同时参看题 2.1.2.

题 1.2.12(Sp89) 令 f 为 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续实值函数, 令 g 为在 $[0,1]$ 上由

$$g(x)=\max\{f(x,y)\mid y\in[0,1]\}.$$

定义的一个函数. 证明 g 是连续的.

1.3 序列, 级数与乘积

题 1.3.1(Su85) 令 $A_1\geqslant A_2\geqslant\cdots\geqslant A_k\geqslant 0$. 求

$$\lim_{n\to\infty}(A_1^n+A_2^n+\cdots+A_k^n)^{1/n}$$

的值.

注意:同时参看题 5.1.10.

题 1.3.2(Sp96) 计算

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}.$$

题 1.3.3(Sp92) 令 $x_0=1$ 及

$$x_n=\frac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}},\quad n=1,2,\cdots.$$

证明

$$x_\infty=\lim_{n\to\infty}x_n$$

存在, 并求出它的值.

题 1.3.4(Fa97) 由

$$x_0=1,\quad x_{n+1}=\frac{1}{2+x_n},\quad 当\ n\geqslant 0,$$

定义一个实数序列 (x_n). 阐明 (x_n) 收敛, 并求它的极限.

题 1.3.5(Fa89, Sp94) 令 α 为 $(0,1)$ 间的一个数. 证明满足递推关系

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}$$

的任何实数序列(x_n)有一个极限,并求出以 α, x_0 及 x_1 表示的极限.

题 1.3.6(Fa92) 令 k 为一个正整数.决定那些实数 c,对它而言每一个满足递推关系

$$\frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n-1}) = cx_n$$

的实数序列(x_n)具有周期 k(即对所有 $n, x_{n+k} = x_n$).

题 1.3.7(Sp84) 令 a 为一个正实数.定义序列 x_n 为

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = a + x_n^2, \quad n \geqslant 0.$$

找出关于 a 的一个充要条件,使得 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 必定存在一个有限极限.

题 1.3.8(Fa95) 令 x_1 为一实数,$0<x_1<1$,并定义序列为 $x_{n+1}=x_n - x_n^{n+1}$.阐明 $\liminf_{n\to\infty} x_n>0$.

题 1.3.9(Fa80) 令 $f(x)=\frac{1}{4}+x-x^2$.对任何实数 x,定义序列(x_n)为 $x_0=x$ 和 $x_{n+1}=f(x_n)$.若序列收敛,令 x_∞表示极限.

1. 当 $x=0$,阐明序列有界且非减的,并求 $x_\infty=\lambda$.
2. 求所有的 $y\in\mathbb{R}$ 满足 $y_\infty=\lambda$.

题 1.3.10(Fa81) Fibonacci 数 $f_1, f_2, \cdots$为由 $f_1=1, f_2=2$ 以及当 $n\geqslant 2$ 时,$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$递推地定义.阐明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

存在,并计算该极限.

注意:同时参看题 7.5.14.

题 1.3.11(Fa79) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \log 2.$$

题 1.3.12(Sp90) 假设 $x_1, x_2, x_3, \cdots$是一个非负实数序列对所有的 $n\geqslant 1$ 满足

$$x_{n+1} \leqslant x_n + \frac{1}{n^2}.$$

证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

题 1.3.13(Sp93) 令(a_n)和(ε_o)为正数序列.假设 $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 且在$(0,1)$中有一个数 k 使得对每个n 有 $a_{n+1}\leqslant ka_n+\varepsilon_n$ 成立.证明 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

题 1.3.14(Fa83) 证明或反证(给出一个反例)下面的论断:实数的任一无穷序列 $x_1, x_2, \cdots$不是有一个非减子序列就是有一个非增的子序列.

题 1.3.15(Su83) 令 $b_1, b_2, \cdots$为具有

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ 及} \lim_{n\to\infty}(b_n/b_{n+1}) = 1$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com