ZhXShX

中学数学丛书

张朝康 冯善庆

分式与根式

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版

ZHONG. SHU

ZhXSnX

中学数学丛书

分式与根式

张朝康 冯善庆

湖北教育出版社

内 容 提 要

本书根据中学数学教学大纲的要求，系统地介绍了分式和根式的概念、性质、运算法则以及分式方程和无理方程的解法。在内容上，本书注意由浅入深，并配有大量的例题和习题且附有提示或答案。

本书适合中学生课外阅读，同时，亦可供中学数学教师参考。

中学数学丛书
分式与根式
张朝康 冯善庆

湖北教育出版社出版 湖北省新华书店发行
黄冈县印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 4.75印张 1插页 108,000字
1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷
印数：1—23,000

统一书号：7306·127 定价：0.64元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得．

《中学数学丛书》共计三十四册，多数小册子内容是和教材

相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的．丛书中每本小册子既相对独立又互相联系．同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用．学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读．另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，丛书对教师教学亦有一定的参考作用．

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好．同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见．

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》。本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

《中学数学丛书》

书　目

湖北省暨武汉市数学学会主编　湖北教育出版社出版

整数的性质及其作用
有理数与整式
循环小数
因式分解
一元二次方程
不等式
分式与根式
指数与对数
函数及其图象
复数与三角
排列组合与二项式定理
数列与极限
极值
一元代数方程纵横谈
相似形与圆
代数与三角在几何中的应用
直线与平面
平面向量
多面体与旋转体
直线与圆的方程
三角级数
三角函数
反三角函数与三角方程
解三角形
坐标系与坐标变换
圆锥曲线
极坐标与参数方程
集合
逻辑代数初步
线性代数初步
概率统计初步
微积分初步
归纳与递推
为什么错？
怎样探索解题途径

目　　录

第一章　分　式

在初中一年级学习整式除法运算时，其结果有两种情况，一种是被除式能被除式整除．如

$$28x^4y^2 \div 7x^3y = 4xy,$$

$$(a^3 - 14a^2 + 7a) \div 7a = \frac{1}{7}a^2 - 2a + 1,$$

$$(x^2 - 3x + 2) \div (x - 1) = x - 2;$$

一种是被除式不能被除式整除．如

$$28x^4y^2 \div 7x^5y, \qquad ①$$

$$(a^3 - 14a^2 + 7a) \div 7a^4, \qquad ②$$

$$(x^2 - 3x + 2) \div (3x + 1). \qquad ③$$

后一种情况，商是什么呢？为了解决这一问题，我们仿照整数的除法，把两个整式相除表为如下形式：

$$\frac{28x^4y^2}{7x^3y},\ \cdots,\ \frac{28x^4y^2}{7x^5y},$$

$$\frac{a^3 - 14a^2 + 7a}{7a^4},\ \frac{x^2 - 3x + 2}{3x + 1}.$$

这种形式我们称它为分式．在这章里，我们将对分式的意义、性质和它的运算加以详尽的研究．

§1.　分　式

在除式中含有字母的有理式叫做有理分式，简称分式．例

如

$$\frac{b}{a},\ \frac{2}{x-1},\ \frac{xy}{x^2-y^2},\ \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

等都是分式.

观察上述分式，不难看出，分式中字母的值没有固定，换句话说，字母是可以取不同数值的变动的数. 因此，有理分式的定义又可以叙述为：除式中含有变数字母的有理式叫做有理分式. 由于分式的分母中含有变数字母，所以，分式字母的取值不应使分母为零，否则，分式没有意义. 我们把使分式有意义的字母的取值范围称为**分式的允许值范围**. 例如，分式$\frac{1}{x}$的允许值范围是$x\neq0$，即x可以取除零以外的任何数.

例 1 有理式$\frac{(x-1)^2}{x-1}$是不是分式？为什么？

解：有理式$\frac{(x-1)^2}{x-1}$是分式，因为它的除式$(x-1)$中含有变数字母x.

分式$\frac{(x-1)^2}{x-1}$可以看作$(x-1)^2$与$x-1$的商，根据整式的除法，易知商为整式$x-1$. 应当注意，$\frac{(x-1)^2}{x-1}$与$x-1$并不是一回事，前者$x\neq1$，后者x可以任意取值. 但是，当$x\neq1$时，

$$\frac{(x-1)^2}{x-1}=x-1.$$

因此，在研究问题时，我们常常把整式看成是分式的特殊情况.

例 2 求分式$\frac{4b}{3a-6}$中字母的允许值范围.

解：设 $3a-6=0$，则 $a=2$，

所以，分式的字母允许值范围是：

$$a\neq 2.$$

在本书中，如果没有特别说明，所遇到的分式都是有意义的．例如，在分式$\frac{a}{b}$中，$b\neq 0$；在分式$\frac{2}{x-1}$中，$x\neq 1$．

例 3　当 x 是什么数时，下列分式的值为零：

$$(1)\ \frac{x-2}{x^2+1};\qquad (2)\ \frac{2x-1}{2x^2-5x+2}.$$

解例 3 时，注意 x 取值应使分式的分子为零，而使分母不为零．

解：(1) 由分子 $x-2=0$，得 $x=2$．

当 $x=2$ 时，分母 $x^2+1=2^2+1\neq 0$，

所以，当 $x=2$ 时，分式$\frac{x-2}{x^2+1}$的值为零；

(2) 由分子 $2x-1=0$，得 $x=\frac{1}{2}$．

当 $x=\frac{1}{2}$时，分母 $2x^2-5x+2=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\times\frac{1}{2}+2=0$．

所以，无论 x 取什么值，都不能使分式$\frac{2x-1}{2x^2-5x+2}$的值为零．

例 4　当 $x=3$，$y=-2$ 时，

求分式$\frac{xy}{x-y}$的值．

解：当 $x=3$，$y=-2$ 时．

$$\frac{xy}{x-y}=\frac{3\times(-2)}{3-(-2)}=\frac{-6}{5}=-1.2.$$

例 5　当 $x=5\frac{1}{2}$时，

求分式$\frac{x^3-13x^2+56x-79}{x^2-10x+25}$的值.

解：根据整式的除法，将分式变形，然后再求值.

因
$$\frac{x^3-13x^2+56x-79}{x^2-10x+25}=(x-3)+\frac{x-4}{(x-5)^2},$$

故当　$x=5\frac{1}{2}$时，

$$\frac{x^3-13x^2+56x-79}{x^2-10x+25}=(x-3)+\frac{x-4}{(x-5)^2}$$

$$=\left(5\frac{1}{2}-3\right)+\frac{5\frac{1}{2}-4}{\left(5\frac{1}{2}-5\right)^2}=8\frac{1}{2}.$$

例 5 中，分式$\frac{x^3-13x^2+56x-79}{x^2-10x+25}$的分子、分母都是$x$的多项式，分子的次数高于分母的次数；分式$\frac{x-4}{x^2-10x+25}$的分子、分母也都是多项式，但其分子的次数低于分母的次数. 我们把分子的次数低于分母的次数的分式叫做**真分式**；把分子的次数不低于分母次数的分式叫做**假分式**. 如$\frac{x-4}{x^2-10x+25}$就是真分式，$\frac{x^3-13x^2+56x-79}{x^2-10x+25}$，$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-1}$就是假分式. 一般，求假分式的值时，都是先把假分式化为整式与真分式的代数和，再求值，可使计算简便.

练　习　1.1

1. 下列各式中，哪些是整式，哪些是分式？为什么？

(1) $\frac{x^2+3x-4}{5}$；　　　　(2) $\frac{1}{a+b}$；

(3) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$;　　(4) $3x-\dfrac{5}{x-2}$

(5) $\dfrac{1}{4}(x-1)^2+(x-1)$;　　(6) $\dfrac{1}{1+\dfrac{3x}{1-x}}$.

2. 求下列各分式的字母允许值范围：

(1) $\dfrac{x}{x^2-1}$;　　(2) $\dfrac{m^2-n^2}{m-n+1}$;

(3) $\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}$;　　(4) $\dfrac{x^6+1}{x^2+1}$;

(5) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{x}$.

3. 分式是否可以定义为："分母中含有变数字母的有理式叫做分式"？为什么？

4. (1) 当 x 是什么数时，分式 $\dfrac{(x-1)(x^2+x)}{x+2}$ 的值为零；

(2) 当 x 是什么数时，分式$\dfrac{(x-1)(x^2+x)}{x+2}$没有意义.

5. (1) 当 $x=3$ 时，求分式$\dfrac{x+7}{x^2-6x+11}$的值；

(2) 当 $m=-1.5$，$n=1$ 时，求分式 $\dfrac{2m-n}{m^2+3mn+2n^2}$ 的值.

6. 把下列各式化为整式与真分式的代数和：

(1) $\dfrac{x-7}{x-5}$;　　(2) $\dfrac{x^2+6x-5}{x+3}$;

(3) $\dfrac{ab-3a-b-3}{b-3}$;　　(4) $\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2+x+1}$.

7. (1) 当　$x=2\dfrac{1}{3}$时，

求分式$\frac{9x^3-18x^2-x+6}{3x^2-7x+2}$的值；

（2）当 $t=1.25$ 时，

求分式$\frac{4t^3+t^2-3}{t^2-1}$的值.

§2. 分式的基本性质

（一）分式的基本性质

我们知道，分数的分子和分母都乘以（或除以）同一个不等于零的数，分数的值不变．分式也有类似的性质，就是：

如果分式的分子和分母都乘以（或除以）同一个不等于零的代数式，分式的值不变．用式子表示，就是

（1）$\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m}$；（2）$\frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}$，

其中 m 是不等于零的代数式.

学习分式的基本性质，应当注意两点：

（1）运用分式的基本性质把分式变形时，原分式的字母允许值范围和变形后分式的字母允许值范围可能不同，因此，只有在原分式和变形后的分式都有意义的字母允许值范围内，分式的基本性质才能成立．例如，把$\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-2)}$的分子、分母都除以$(x-1)$，则

$$\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{3(x-1)\div(x-1)}{(x-1)(x-2)\div(x-1)}=\frac{3}{x-2} \quad ①$$

显然原分式$\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-2)}$的字母允许值范围是 $x\neq1$，$x\neq2$，

而变形后的代数式$\frac{3}{x-2}$的字母允许值范围是$x\neq 2$．因此，等式①在$x\neq 1$，$x\neq 2$时才能成立．

(2) 弄清所乘代数式$m\neq 0$的含意．即代数式m中的字母的取值不能使$m=0$．

（二）分式的符号法则

根据分式的基本性质，当$m=-1(\neq 0)$时，有

$$\frac{-a}{-b}=\frac{(-a)\cdot(-1)}{(-b)\cdot(-1)}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{-a}{b}=\frac{(-a)\cdot(-1)}{b\cdot(-1)}=\frac{a}{-b}.$$

这就是说，分子和分母同时改变符号，分式的值不变．

根据整式除法法则，有

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}; \qquad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

这就是说，改变分子(或分母)的符号，分式本身的符号也要改变．

综上所述，分式的符号法则是：

分子、分母和分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变．

例1　不改变分式的值，把下列分式的分子和分母中各项的系数化为整数：

(1) $\dfrac{\frac{2}{35}a+\frac{3}{14}b}{\frac{3}{10}a-\frac{4}{7}b}$；　(2) $\dfrac{\frac{1}{4}x-0.2y}{1.5x+\frac{1}{2}y}$．

解：(1) 因为35、14、10、7的最小公倍数是70，所以

$$\frac{\frac{2}{35}a+\frac{3}{14}b}{\frac{3}{10}a-\frac{4}{7}b}=\frac{(\frac{2}{35}a+\frac{3}{14}b)\times 70}{(\frac{3}{10}a-\frac{4}{7}b)\times 70}$$

$$=\frac{4a+15b}{21a-40b};$$

(2)
$$\frac{\frac{1}{4}x-0.2y}{1.5x+\frac{1}{2}y}=\frac{\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y}{\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y}$$

$$=\frac{(\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y)\times 20}{(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y)\times 20}=\frac{5x-4y}{30x+10y}.$$

例 2 不改变分式的值，使分子、分母的第一项都带正号：

(1) $\frac{5}{-6x^2}$；　　(2) $\frac{-x+1}{x+1}$

(3) $\frac{-a-b+c}{-a+b-c}$.

解： (1) 同时改变分式和分母的符号，得

$$\frac{5}{-6x^2}=-\frac{5}{6x^2};$$

(2) 同时改变分式和分子的符号，得

$$\frac{-x+1}{x+1}=\frac{-(x-1)}{x+1}=-\frac{x-1}{x+1};$$

(3) 同时改变分子和分母的符号，得

$$\frac{-a-b+c}{-a+b-c}=\frac{-(a+b-c)}{-(a-b+c)}=\frac{a+b-c}{a-b+c}.$$

例 3 不改变分式的值，整理下列分式，依照 x 的降幂排列分子和分母，并使分子、分母的第一项不带负号：

(1) $\dfrac{1-x+x^2-x^3}{1-x}$；　　(2) $-\dfrac{-2+2x^2-3x}{3x-2-4x^2}$.

解：

(1) $\dfrac{1-x+x^2-x^3}{1-x}=\dfrac{-(x^3-x^2+x-1)}{-(x-1)}$

$$=\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1};$$

(2) $-\dfrac{-2+2x^2-3x}{3x-2-4x^2}=-\dfrac{2x^2-3x-2}{-(4x^2-3x+2)}$

$$=\frac{2x^2-3x-2}{4x^2-3x+2}.$$

（三）分式的约分

和分数的约分相类似，如果一个分式的分子和分母有公因式，可以根据分式的基本性质，把分子、分母都除以这个公因式，这个过程叫做**分式的约分**. 例如，分式$\dfrac{a^2b}{ab(a+b)}$的分子a^2b和分母$ab(a+b)$中，都含有公因式a，把分子、分母都除以公因式a，则

$$\frac{a^2b}{ab(a+b)}=\frac{a^2b\div a}{ab(a+b)\div a}=\frac{ab}{b(a+b)}.$$

但是，上述分式在约分后，分子和分母中还有公因式b，应该继续约分. 所以

$$\frac{ab}{b(a+b)}=\frac{ab\div b}{b(a+b)\div b}=\frac{a}{a+b}.$$

在分式$\dfrac{a}{a+b}$中，分子和分母除1以外再没有公因式了，我们把这样的分式叫做**最简分式**（或称既约分式）. 约分时，通常是约去分式的分子和分母中的所有公因式，化成最简分式.

例 4　指出下列分式的分子和分母的公因式：