数学解题方法

梁法驯　主编

HUXUE JIETI
ANGFA

华中理工大学出版社

数学解题方法

主　编　梁法驯

（按姓氏笔画排列）

副主编　孔庆燧　毛鄂涴　农仁才

范先友　龚善政　裔瀚声

编　委　孔庆燧　毛鄂涴　农仁才

汤大炳　伍启柱　陈正洪

何才曙　苏郁文　宗封里

范先友　范立琼　钱　愉

梁法驯　龚善政　裔瀚声

审　校　樊　恺

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第10号

图书在版编目(CIP)数据
数学解题方法/梁法驯　主编
武汉:华中理工大学出版社，　1995年3月
ISBN 7-5609-1026-2
Ⅰ.数…
Ⅱ.①梁…　②孔…　③毛…
Ⅲ.数学方法-类比归纳-模拟分析
Ⅳ.O1

数学解题方法
梁法驯　主编
责任编辑:李立鹏
*
华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山　邮编:430074)
新华书店湖北发行所经销
核工业中南三〇九印刷厂印刷
*
开本:850×1168 1/32　印张:9.875　字数:250 000
1995年3月第1版　1995年12月第2次印刷
印数:7 001-13 000
ISBN 7-5609-1026-2/O·128
定价:8.00元

内 容 简 介

解题在数学教学中占有极其重要的地位，本书讲述解题和寻找解题途径的一般规律和一些通用方法。本书共有两篇，第一篇：解题途径的探索，包括有五章：观察、联想、尝试；归纳发现；类比发现；模拟发现；数学问题的化归。第二篇：典型解题方法研究，包括有数形结合法；引入参数法；几何变换法；构造法。书中列举了大量的例题，使内容更通俗易懂，每章后配有适当数量的练习题（附解答），以帮助读者更好地掌握所学的解题方法。

本书对提高中学数学教师的解题理论水平和解题基本技能有一定的帮助，对帮助中学生学会解题和提高解题能力，拓宽思维、开发智力有促进作用。读者对象是广大中学教师，师范院校大学生、中学生，以及其他数学爱好者。

前　言

数学是在解决问题中产生，并在解决各种问题的过程中不断发展起来的。数学的真正组成部分是问题和解。解题也是数学教学过程中的一个重要组成部分。所有具有数学教学经验的人和大多数具有学习数学经验的人都承认，要教会解题和很好地掌握寻找解题方法，困难太大了。这是因为解数学题过程往往是一个相当复杂的思维过程，没有一个绝对的公式，它不仅具有各种策略，而且它的规则与方法有一部分是隐蔽的。

好比下棋，你必须首先学习各个棋子移动的规则和方法，只有当移动棋子的规则进入你的下意识之后，你的智力才能转而集中于战略、战术以及其他类似更富于创造性的策略上。解数学题也一样，你必须学习和掌握一些必须的基本解题规律和方法，这些规律和方法在解题过程中使用，实际上它对任何人都有所启发。

本书论述了数学解题的意义、步骤和寻找解题途径的一般规律和一些通用方法。这些规律和方法是对实际解题中反复使用的各种方法通过分析、概括和一般化而得出的。我们相信，通过教授和学习这些方法，可以逐步学会寻找解题途径的一般思维方法，并且一旦掌握了这些方法，便可以开拓思路，精力就能集中到数学的创造方面。

本书由中南、西南、西北地区部分教育学院有丰富教学经验和解题经验的教师共同研究，协作编写，并由主编、副主编整理而成。书中所涉及的内容只需具备中学数学知识即可阅读。它可作为中学数学教师继续教育的教材，也可作为高师数学教育专业的选修课教材，亦适合于广大中学数学教师、中学生和大专院校数学系学生阅读。

由于编者水平所限，编写时间仓促，因此书中错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1992年 10月

目　录

第二篇　典型解题方法的研究

绪　论

在数学的学习和研究中，解题是一项非常重要的活动．我国著名的数学家华罗庚说过："如果不做书中所附的习题，那就好比入宝山而空还．"我国现行的《中学数学教学大纲》更明确的规定："练习是数学教学的有机组成部分，对于学生掌握基础知识和基本技能、培养能力是必不可少的．在教学中，要充分发挥练习的作用，加强对解题的指导，并及时进行检查．"这就是说，解题在数学教学与学习中具有十分重要的意义．不仅如此，解题在数学研究中也是非常重要的．正如美国著名数学家哈尔莫斯(Halmos)指出的那样，"数学的真正组成部分是问题和解"，"数学研究主要的就是发现问题和解决问题，""数学家存在的主要理由就是解决问题"．解题能力也是衡量一个人数学水平的重要标志．因此，提高发现问题和解决问题的能力，就成为老师教好数学，学生学好数学的重要环节，也是研究数学、运用数学必不可少的技能．

在当前的数学教学中，普遍教授解题方法是：讲解某些具体类型问题的解题方法，以及为了掌握这些方法，而配合做相当数量的练习题．但是，仅这样做，对提高学生的解题能力和创造能力远远不够，因为他们往往没有能从中获得解题的一般有效的方法，以及懂得这些方法的理论基础．

近几十年来，数学解题方法越来越受到人们的重视，因而相应地产生了对数学解题方法本身的一系列问题的探讨和研究，出现了不少关于数学解题方法论的文章和著作，其中以著名美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)的著作最享誉世界．我国数学家徐利治教授也提倡这方面的研究，他的讲演和著作受到普遍的重视，推动了

我国“数学解题方法论”研究与教学的发展.

数学解题方法论是一门新学科，它主要是研究和讨论数学中关于解题和寻找解题方法的一般性的规律和法则.在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重于逻辑思维能力的训练.通过研究解题方法，人们还可以看到数学的另一个侧面，在创造过程中的数学，就其实质上来说，是寻找、发现和发明数学真理的实验探索性的科学，要掌握数学的这个侧面，在数学教育实践中，我们还必须重视探索式思维的训练.只有这样才能较好地培养学生的数学创造能力.

在绪论中，我们将概述数学解题的几个基本问题：数学问题及其分类；解数学题的实质和解题过程的一般步骤.

一、数学问题及其分类

对于数学问题，我们首先要考察的是它是由什么组成的和怎样组成的，这就是考察数学问题的结构形式.数学问题的结构形式，是数学问题分类的一个重要标准.结构形式上相同，实际上预示着那些不同的具体问题(属同一类型的问题)可以用类似的思维方法去思考，用类似的手法去处理，用类似的方法和技巧去解决.

1. 数学问题的结构

数学问题的结构怎样？我们先来看下面几个例子.

例 1 已知 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，求 $y=\sin A\sin B\sin C$ 的最大值.

读了这道题，我们容易发现，它是由**题设条件**“A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三内角”和**要求**“求 $y=\sin A\sin B\sin C$ 的最大值”两部分组成.

例 2 证明质数的个数无限多.

这道数学问题的陈述由一个单句组成，其组成部分不那么明显.但仔细分析这个句子，我们可以分出这样的**条件**：设 $p_1,p_2,p_3,\cdots\cdots$ 为全体质数，而**要求**证明全体质数的个数有无限多个.

由上面的例子可以看到，任何一个数学问题的陈述都是由某些**题设条件**（也简称为**条件**）和问题的**要求**（也称为结论、论断或问题的目标）等两部分组成.

在一般情况下，数学问题中的**条件**不只一个而可以有若干个，问题的**要求**也可以有若干个.

例 3 在边长为 2 的正方形内，任意放置 5 个点，求证：1）其中必存在三个点，以这三点为顶点的三角形面积不大于 1；2）其中必存在两个点，它们之间的距离不大于$\sqrt{2}$.

我们看到，这个问题的**条件**有两个："边长为 2 的正方形"和"在这个正方形内任意放置 5 个点". 问题的**要求**是："1）其中必存在三个点，以这三个点为顶点的三角形面积不大于 1；2）其中必存在两个点，它们之间的距离不大于$\sqrt{2}$."

数学问题的**题设条件**是解题的基础和出发点. 问题的**要求**是指明解题人要达到什么样的目标. 数学问题的**题设条件**和问题的**要求**都具有一定的内容和形式，即具有某种在知识结构，语言结构与逻辑上的特定的形式，因而解法一般也不相同. 因此，这种特定的内容和形式就成为数学问题分类的标准之一.

2. 数学问题的分类

将数学问题分类，目的是在于使得同一类型的数学问题，可以采用类似的思维方法进行解题. 数学问题由于形式、内容、解法的不同，可以分为很多不同类型. 如选择题、填空题、是非题、问答题、计算题、作图题、证明题等等. 在传统上，按问题的**要求**的不同，这些类型的题目大体上可以归结为两大类：求解题和求证题.

第一类：求解题. 在这类数学问题中，问题的要求是求出（寻找、作出、鉴别、列出、描述）满足题设条件的某个未知量，这个未知量可能是数、关系式、函数、图形等等.

第二类：求证题. 在这类数学问题中，问题的要求是证明某个清晰陈述的论断的正确性，或者判定它是成立或不成立，或者说明

某一种现象、某一个事实为什么成立等等.凡是问题要求包含有“证明”、“判定”、“为什么”等这些词的问题，通常都属于求证题.

这两类问题的每一类还可以进一步细分为各种类型，例如，求解题还可以分为计算题，解方程或不等式题，求表达式或函数题，求作几何图形题等等.显然，每种类型又可以细分，但我们这里将不继续分下去了，这是教师在课堂教学中，学生在平时学习中经常进行的一项工作.

“求证题”与“求解题”表面上似乎是很不相同，但是解“求解题”(简称解题)与证“求证题”(简称证题)实质上都是以已有的知识为桥梁，建立起问题中的条件与结论之间的联系.不同的仅仅是求证题明确地给出了要达到的目标，而求解题只给出了目标的不明确的范围.正因为这样，本书所阐述的解数学问题的一般思维方法，同时适用于这两类问题.因此，我们在下面的各章节关于解题方法的讨论中不再区分它们，而用“解题”这个术语泛指解数学问题，而代替“证题”与“解题”.

二、解数学问题的实质与过程

为了探讨解题的一般规律和方法，只从字面上来理解“解题”这个术语(就是意味着求出问题的答案)的含义是不够的.我们还必须搞清楚解题的实质和过程.

为此我们来考察几个不太复杂的问题的解法，并且详细写出这些解法.

首先，看一个代数题的解法过程：

分解因式　$x^3-24+6x^2-4x$.

解(1)　$x^3-24+6x^2-4x=x^3-4x+6x^2-24$(交换律)，

(2)　$x^3-4x+6x^2-24=(x^3-4x)+(6x^2-24)$(结合律)，

(3)　$(x^3-4x)+(6x^2-24)=x(x^2-4)+6(x^2-4)$(提公因式到括号外)，

(4)　$x(x^2-4)+6(x^2-4)=(x^2-4)(x+6)$(提公因式到

括号外)，

(5) $(x^2-4)(x+6)=(x+2)(x-2)(x+6)$(平方差的因式分解法则)，

即 $$x^3-24+6x^2-4x=(x+2)(x-2)(x+6).$$

如果读者注意分析上面的解法，就会发现：解答是由一个一个的推演步骤序列所组成，其中的每一个步骤都是把数学的一般原理(包括定义、公理、定理、法则、定律和公式等)运用于问题的条件(或者运用于这些条件的推论)的推理，至于整个解答则是把条件与结论串接起来的各个步骤所组成的序列. 而解题——实质上就是给出这个序列.

上面的观点同样也适用于求证题.

例如，已知 $AB=AC$，F、E 分别是 AB、AC 的中点，求证：$\triangle ABE\cong\triangle ACF$.

证明 (1) $\because$ F、E 分别为 AB、AC 的中点 (已知)，

$\therefore$ $AE=\frac{1}{2}AC$，$AF=\frac{1}{2}AB$ (中点定义)，

(2) $\because$ $AB=AC$ (已知)，

$\therefore$ $AE=AF$ (等量代换)，

(3) $\because$ $AB=AC$ (已知)，

$AE=AF$ (已证)，

$\angle A=\angle A$ (公用角)

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ACF$ (边、角、边定理).

当然，我们实际上碰到的问题可能要比上面举出的两个例子复杂得多，但解决它们的实质都是相同的，即给出一个把问题的条件和结论串接起来的严谨的推演步骤序列，而每一个步骤都是把数学的一般原理运用于条件或条件的推论(中间结果)的推理.

在上面的两个例子中，当我们写出问题的解法时，只能算是写出了问题的解答. 但是，找出这些解法，以及证实它们是正确的，自

然也是解题过程必不可少的工作.因此,解数学题过程,如果按照从得到问题的时刻直到全部完成它的解答时为止这一过程,一般可以分为审题,探索解题方法,写解法,校核与分析解法等四个阶段.

1. 审题

审题就是弄清问题的题意,弄清问题的特征.具体地说,就是弄清这是一道什么类型的问题?问题中的已知条件(已知数,已知图形,已知事项等)是什么?问题的要求或结论是什么?题中涉及那些概念,它们的含义是什么?并在此基础上引入适当的符号,或画出适合题意的图形,把题中的条件与要求清楚地表示出来,进一步通过分析、比较、观察、联想等方法找出问题的关键在什么地方?困难在什么地方?特别是发掘出题中若明若暗,含而不露的隐含条件.

审题在我们解答任何一个问题,甚至是最简单的问题的过程中都是必不可少的,如果把题目看错了或者理解错了,那就绝对不能得到正确的解题方法.对于比较复杂的问题,审题是探索解题方法的基础,是解题的出发点.

2. 寻找解题途径

寻找解题途径,就是寻求已知与未知串接起来的严谨的推理步骤序列,实现由已知向未知转化.一般地说,结构比较简单的问题,通过观察、联想与尝试,识别问题的类型就有可能找到解题途径;对于结构复杂,抽象多变的较难题目,常常需要在观察和联想的基础上,灵活运用各种常用的探索式思维方法,如归纳、类比、模拟、化归等等,才可能逐步探索出解题途径.在一般的解题过程中,探索解题途径是最重要的和最困难的阶段.从时间上来说,可能它占得最多,并且当你实施所找到的解题方法时,如果证实是错误的或者是太过繁杂的,那么又应当重新回到寻找解题方法这一阶段.因此,探索解题途径这一过程往往须要反复多次,但更重要的是在

每次探索解题方法失败的情况下，要回到审题阶段上，再次深入分析问题，找出失败原因.

3. 实施解法

实施解法，就是在找到解题方法后把它付之实践，也就是按照解题要求，决定书写格式，合乎逻辑地写出解答.

4. 校核与分析问题的解法

校核与分析问题的解法就是对所完成的解法进行检查与回顾思考. 首先从解答开始，检查解法的每一细节(演算过程或证明推理过程是否都是完整而正确，有无不合题意的解，研究解答中较长而复杂的部分，可否使它们更简短些，或者重新考虑寻找新的更简单直观的解法. 然后，你可以研究、总结你的解题方法，沉思问题的困难及你的解法的要点，尝试把它用于其他问题，并且探讨问题的推广，深化结论.

校核与分析问题的解法，在解题过程中不但可以使你避免出现不必要的差错，而且有可能使你找出一个新的更好的解法，可能使你发现新的有趣的东西. 同时，养成研究与总结解题的习惯，可以使你增进知识，拓宽解题思路，积累解题经验，提高解题能力.

我们看到，上面的第二个阶段是解题过程的关键环节. 在本书中将要论述的解题方法，主要就是寻找解题途径的方法. 我们将从寻找解题途径的一般的探索式思维方法与典型的解题方法两个方面，并结合解题过程及典型例子来论述.

第一篇　解题途径的探索

第一章　观察、联想、尝试

我们已经知道，解数学题的实质是：给出一个把问题的条件和结论串接起来的严谨的推演步骤序列，而每一个步骤是把数学的一般原理运用于条件或条件的推论（中间结果）的推理．由于数学题无论从题设条件到题目的结论，或是从形式到内容，都是千变万化的．这就使得找出这样的推演步骤序列的过程的思维——解题途径的探索——也是多种多样的．尽管如此，解数学题作为一种对客观事物规律性的认识，解题过程的思维还是有一些模式可循的．通过对大量的解数学题经验的总结，得出解数学题过程的思维一般模式是：从观察数学题本身入手，发现它的组成部分的特征和各种关系，通过联想、类比、模拟和归纳等分析综合手段，把问题化归为较熟悉的或简单的问题，从而确定解题的策略，将初步决策付诸实施就是尝试．如果尝试结果未能解决问题，再从观察开始，如此进行探索，经过多次，就有可能找出解题的途径．

这就说明，通过观察，有所发现，开动思维，引起联想，指导尝试，这是探索解数学题途径的一个基本方法．在实践中我们还以可看到，一个人解数学题能力的强弱与他的观察能力、联想能力和尝

试能力有密切的关系.解数学题能手一般都具有这些能力,例如,被誉为“数学王子”的高斯(Gauss,1777～1855),从小就具有这些能力.有一个突出的、成为后人美谈的事就是高斯在10岁时,有一次老师给全班同学出一道算题:计算 $1+2+3+\cdots+100$,高斯没有像其他同学一样立即逐项相加,而是对这道算题的整体进行仔细的观察,他把算题看作可改变的算式,从而发现了 $1+100=2+99=\cdots=50+51=101$,并联想到乘法,采用乘法巧妙且迅速地算出正确的结果,引起了教师和同学的惊讶.从此,高斯的数学才能被发现,被培养.这也促使高斯在整个科学研究的生涯中,十分注重观察、联想和尝试的作用,并取得很大的成就,登上当时数学和天文学领域的最高峰.又例如,在作为现代中学生解数学题能力的最高竞技场——国际数学奥林匹克竞赛中,优胜者除了他们扎实的数学基本功外,也依赖于他们对数学问题的洞察力、创造力以及数学机智.由此可见,培养和发展这些能力对提高解数学题能力有特别重要的意义.

第一节 观　　察

观察是科学研究中的一个基本方法,观察在解数学题过程中同样也起着非常重要的作用.它是解题的前导,分析综合的基础,其本身也是一种解题的方法.观察能力是解题能力的重要因素,而了解观察的意义,掌握观察方法是提高观察能力的关键.

一、观察的意义和作用

客观事物的现象是它的性质在外部的表现,客观事物的现象作用在人的感官上,人对客观事物的性态就有感觉和知觉,这也就是人对客观事物的感性认识.观察是人们在科学研究中对客观事物有意识地获取感性认识的一种活动.观察的任务是:对客观事物在自然条件下,有目的、有选择、有计划地观看和考察它的各种现