○高等学校《自学辅导与应试指南》丛书○

普通物理学

解题指南

曾德璋　主编

电子科技大学出版社

●高等学校《自学辅导与应试指南》丛书●

《普通物理学》解题指南

曾德璋　主编

电子科技大学出版社

内容提要

(1)以最简捷的方式给出《普通物理学》各章的基本内容。

其中包含物理学的基本概念、基本原理以及处理问题的基本方法。

(2)以剖析大量典型题目的方式来阐述这些基本概念的含义,明确这些基本原理的实质,并熟悉物理学中处理问题的基本方法。

(3)列出大量的自我测试题目及答案,以检查读者对各章基本内容理解及掌握的程度。

●高等学校《自学辅导与应试指南》丛书●

《普通物理学》解题指南

曾德璋　主编

*

电子科技大学出版社出版

(成都建设北路二段四号)邮编 610054

成都理工学院印刷厂印刷

新华书店经销

*

开本 787×1092　1/16　印张　19.625　字数　478 千字

版次　1997 年 11 月第一版　印次　1997 年 11 月第一次印刷

印数 1--10000 册

ISBN 7—81043—846—8/O·56

定价:22.00 元

前　言

按照工科《普通物理学》教学大纲的要求，根据几十年教学经验，总结了在《普通物理学》的各类（本科、专科、自学考试、电大、夜大、职大和函大等）教学和考试中的重点、难点和频繁出现的题目编写了本书，其特点如下：

1. **明确复习要求**　指出了考生必须理解和明确的基本概念、基本内容以及必须掌握的基本方法，对于一些非基本的内容，书中用“掌握”、“理解”和“了解”来区分其间的差别，经验证明，绝大部分的考试内容均落在“掌握”和“理解”的范围之内。

2. **形成完整印象**　作为各章节内容的概括和总结，列出了各章节的基本内容，它们构成该章一个完整的有机主体，便于考前记忆，从而也明确了考试要求的范围、重点和难点。

3. **熟悉考题类型**　在现行的国家考试题库中，主要题型可概括为三种，选择填空题、填空题和计算题（包括证明题、改错题等），对不同类型的题目有不同的解题方法和技巧。

4. **提高解题能力**　本书选出了大量重要的典型题目（总共约 500 余题），并逐题给予详细的解答：指出各题的解题根据，并逐题给予详细的解答：指出各题的解题根据、解题的思路以及详细的解题过程，对一些题目还指出了同学们在解题中常犯的错误，还给出一题的多种解法。

5. **自我检查应试能力**　本书还列出大量（约 200 余题）的自测题，这有利于考生自我检查参加《普通物理学》考试的能力，每章末附有自测题的正确解答。

本书适合学习工科《普通物理学》并准备参加考试的各类考生，可作为学习参考书及考前复习的基本读物，对各类学校的《普通物理学》课教师也有教学参考价值。

1～7 章由王晓华、刘和玲、孙冰撰稿。

8～15 章由曾德章、李国胜、陈新明撰稿。

16～18 章由杨秀梅、张家德、孙冰撰稿。

19～21 章由孔莉、庄川撰稿。曾德璋完成全书的统稿及审稿工作。

编　者

1997 **年** 8 **月于电子科技大学**

目　　录

第一章　质点运动学

第二章　质点动力学

第三章　刚体的转动

第四章　振动学基础

第五章　波动学基础

第六章　气体分子运动论

第七章　热力学的物理基础

第八章　静电场

第九章　静电场中的导体和电介质

第十章　稳恒电流

第十一章　电流的磁场

第十二章　磁场对电流的作用

第二十章　光的量子性

第二十一章　原子的量子理论

第一章　质点运动学

一、基本要求

1. 掌握描述质点运动规律的方法
2. 掌握解决两类运动学问题的方法。
3. 掌握直线运动。
4. 理解运动迭加原理。
5. 掌握抛体运动和圆周运动。
6. 掌握相对运动的描述方法。

二、基本内容

1. 描写质点运动的几个基本量

位置矢量　如图1-1，从坐标原点向质点所在的位置P点作的矢径$\boldsymbol{r}(t)$称为t时刻质点

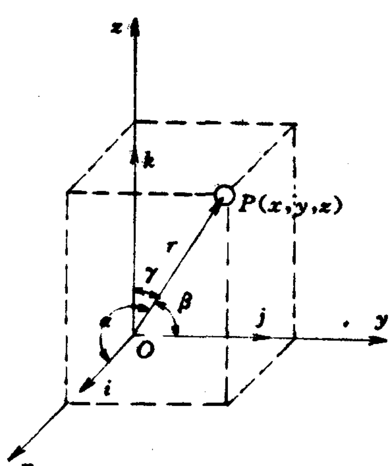

图1-1

的位置矢量。有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

或写为

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

或有

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1-3}$$

上列三式通称为质点的运动方程，由运动方程便可获取有关的运动信息。

位移 设 t_1 时刻质点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(t_1)$，$t_2$ 时刻质点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}(t_2)$，则称在 t_1 到 t_2 的时间范围内质点的位移为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1) \tag{1-4}$$

位移也是矢量。

速度 在 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内，质点的平均速度定义为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-5}$$

瞬时速度定义为

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{1-6}$$

速度的分量方程为

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{1-7}$$

且速度矢量的大小为

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2} \tag{1-8}$$

平均速度只能反映出在给定时间间隔内，质点大致的运动情况，而瞬时速度则能反映质点的瞬时的运动。

加速度 在 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间范围内，质点的速度从 v_1 变为 v_2，平均加速度定义为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-9}$$

瞬时加速度定义为

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \tag{1-10}$$

加速度矢量的分量方程为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{1-11}$$

加速度矢量的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1-12}$$

轨道方程由运动方程式(1-3)，消去参变量 t 即可得

$$y = y(x) \qquad (\text{平面运动}) \tag{1-13}$$

$$\text{或} \; z = z(x,y) \qquad (\text{空间运动}) \tag{1-14}$$

上两式称为质点的轨道方程，即质点的运动轨迹。

2. 直线运动

设质点沿 X 轴运动，其运动方程可写为 $x=x(t)$，在以下方程式中 A、B、C、D、……均为给定的常数，若质点的运动方程为：

$x=A$，　$v=\dfrac{dx}{dt}=0$，　则质点在 X 轴上的 A 点保持不动；

$x=A+Bt$，　$v=\dfrac{dx}{dt}=B$，　则质点作匀速直线运动；

$x=A+Bt+Ct^2$，　$v=B+2Ct$，　$a=\dfrac{dv}{dt}=2C$，　则质点作匀加速直线运动。

$x=A+Bt+Ct^2+Dt^3$，　$v=B+2Ct+3Dt^2$，　$a=2C+6Dt$，　则质点作变加(或减)速直线运动。

直线运动中，v 和 a 的正负便可表示速度和加速度的方向，若某时刻 a、v 同号，则此时刻质点作加速运动。返之，若 a、v 异号，则此时刻质点作减速运动。

3. 抛体运动

抛体运动实际上是由水平方向的匀速直线运动和铅直方向的匀加速直线运动合成的结果，例如：

$$x=3t,\quad y=4t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{1-15}$$

为质点的运动方程，则该质点作抛体运动，其轨道方程为

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{g}{18}x^2 \tag{1-16}$$

4. 圆周运动

匀速圆周运动的运动方程可写为

$$x=R\cos\omega t,\quad y=R\sin\omega t \tag{1-17}$$

式中的 R、ω 均为给定常数，消去 t 便得到轨道方程

$$x^2+y^2=R^2 \tag{1-18}$$

质点的运动速度

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=R\omega \tag{1-19}$$

一般圆周运动：其法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2 \tag{1-20}$$

其切向加速度为

$$a_t=\frac{dv}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}=R\beta \tag{1-21}$$

式中的 ω、β 分别代表圆周运动的角速度和角加速度。

5. 相对运动

由于物体的位移具有相对性，物体 A 相对于坐标系 C 的位移 $\Delta\boldsymbol{r}_{AC}$ 等于物体 A 相对于坐标系 B 的位移 $\Delta\boldsymbol{r}_{AB}$ 和坐标系 B 相对于坐标系 C 的位移 $\Delta\boldsymbol{r}_{BC}$ 之和，即

$$\Delta\boldsymbol{r}_{AC}=\Delta\boldsymbol{r}_{AB}+\Delta\boldsymbol{r}_{BC} \tag{1-22}$$

所以有

$$\boldsymbol{v}_{AC}=\boldsymbol{v}_{AB}+\boldsymbol{v}_{BC} \tag{1-23}$$

即物体 A 相对于坐标系 C 的运动速度等于物体 A 相对于坐标系 B 的运动速度与坐标系 B 相对于坐标系 C 的运动速度之和。

6. **两类运动学问题**

(a)已知质点的运动方程，求任一给定时刻，质点所在的位置，质点运动的速度和加速度，即质点的运动情况。(b)已知质点的受力运动情况，求写出该质点的运动方程。

三、例题剖析

1. 一质点沿 X 轴运动，其运动方程是 $x=t^2-4t+5$，其中 x 和 t 分别以米和秒计，则在前 3s 钟内，它的(　　)。

(A)位移和路程都是 3m；

(B)位移为 5m，路程为 −3m；

(C)位移和路程都是 −3m；

(D)位移为 −3m，路程为 5m。

解　由给出的运动方程便可求出在给定时间范围内质点的位移和路程。质点的运动速度

$$v=\frac{dx}{dt}=2t-4,\quad v_0=-4\text{m/s}$$

v_0 代表 $t=0$ 时刻，质点的运动速度。质点运动的加速度 $a=\frac{dv}{dt}=2\text{m/s}^2$。加速度保持不变。起始时刻($t=0$)质点正在 $x_0=5$m 处，以 4m/s 的速度沿 X 轴的负方向作减速运动，因为这时加速度与速度的方向相反。由 $v=2t-4$ 求出，到 $t=2$s 这一时刻，质点的速度减小为零，相应的位置是 $x_2=4-8+5=1$m。此后质点将沿 X 轴正方向作匀加速直线运动。到 $t=3$s 这一时刻，质点的位置是 $x_3=9-12+5=2$m。按式(1-4)，前 3s 质点的位移

$$\Delta x=x_3-x_0=2-5=-3\text{m}$$

因此，可供选取的只能是(C)或(D)，但因为路程是质点在给定时间内所经过的距离，只能为正值，所以正确的答案应该是(D)。果然，在前 2s 内，走过的路程是 4m，掉头后再走 1m，总共是 5m。

2. 一质点沿 X 方向运动，其运动方程是 $x=t^3-9t^2+15t+1$，式中 x、t 分别以米和秒计，则质点在(　　)时刻反向掉头运动，在(　　)和(　　)时间间隔内，作加速运动，在(　　)和(　　)时间间隔内作减速运动。在 $0<t<2$s 的时间间隔内，质点离坐标原点的最远距离是(　　)m。

解　运动方程 $x=t^3-9t^2+15t+1$，表示出不同的时刻 t，质点在 X 轴上的位置不同，按式(1-6)质点的速度 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+15$，质点的加速度按式(1-10)，$a=\frac{dv}{dt}=6t-18$。加速度也是随时改变的。

速度为零的时刻便是反向掉头运动的时刻，因此，由 $v=3t^2-18+15$，求得：当 $t=1$s 和 $t=5$s 时，质点的运动速度为零，质点反向掉头运动。

由 $a=6t-18$。还可求得，当 $t=3$s 时，质点的加速度为零。

$t=0$， $x_0=1\text{m}$， $v_0=15\text{m/s}$， $a=-18\text{m/s}^2$，质点从 $x_0=1\text{m}$ 处开始向右作减速运动，到 $t=1\text{s}$ 这一时刻，质点的速度减少为零。

$t=1\text{s}$， $x_1=8\text{m}$， $v_1=0$， $a_1=-12\text{m/s}^2$，由此时刻，质点开始向左作加速运动，一直到 $t=3\text{s}$ 这一时刻为止。

$t=3\text{s}$， $x_3=-8\text{m}$， $v_3=-12\text{m/s}$， $a_3=0$，此时刻质点向左运动的速度达到最大值，由此时刻，质点开始向左作减速运动，一直到 $t=5\text{s}$ 这一时刻为止。

$t=5\text{s}$， $x_5=-24\text{m}$， $v_5=0$， $a_5=12\text{m/s}^2$，由此时刻质点开始向右加速运动。

综上所述，可见在 $0<t<1\text{s}$ 和 $3\text{s}<t<5\text{s}$ 时间间隔内，质点作减速运动。在 $1\text{s}<t<3\text{s}$ 和 $t>5\text{s}$ 的时间间隔内，质点作加速运动。在 $0<t<2\text{s}$ 的时间间隔内，质点离坐标原点的距离最远是 8m。

3. 已知电梯的高度为 h，在电梯正以匀加速 a 上升的过程中，电梯天花板上有一颗螺钉脱落掉向电梯地板上。求螺钉从脱落到掉在地板上所需要的时间。

解 如图 1-2 所示，首先选取合适的坐标系，以地面作为参照系，螺钉脱离时所在的位置作为坐标原点，向上作为 X 轴的正方向。取螺钉脱落时刻作为计时零点，则螺钉从脱落时刻开始，以 v_0 的初速度作竖直上抛运动，其运动方程是

$$x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

式中的 g 代表重力加速度。电梯地板以同样的初速 v_0 竖直向上作匀加速直线运动，加速度为 a，其运动方程是

$$x_2 = -h + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

式中"$-h$"代表 $t=0$ 时刻，地板所在的位置。两物相遇时，螺钉和地板的坐标相等，即有 $x_1=x_2$ 解得 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{a+g}}$ 这便是螺钉掉到地板上所需时间。

4. 一质点在 XOY 平面上运动，其运动方程为，$\boldsymbol{r}=(3+2t+t^2)\boldsymbol{i}+(4+2t+t^2)\boldsymbol{j}(SI)$，则该质点必定是作(　　)

(A)变加速曲线运动；　　(B)匀加速曲线运动；

(C)变加速直线运动；　　(D)匀加速直线运动。

解 须要判定的有两点：运动轨迹是直线还是曲线；加速度是变化的还是不变的。由轨道方程便可判定。由运动方程，有

$$x = 3 + 2t + t^2, \quad y = 4 + 2t + t^2$$

消去 t 后，有 $y=1+x$

这是 XY 平面上的一条直线

按式(1-12)，求出加速度 a 的大小。

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(2+2t) = 2\text{m/s}^2, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 2\text{m/s}^2$$

a_x 和 a_y 均与时刻 t 无关，因此加速度是不变的。所以正确的答案应该是(D)。

5. 某瞬刻一运动质点在 $\boldsymbol{r}(x,y)$ 矢径的端点处，其速度的大小可表示为(　　)。

(A)$\dfrac{dr}{dt}$；　(B)$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$；　(C)$\dfrac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$；　(D)$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

解 (A)中的$\frac{dr}{dt}$代表位置矢量r的大小随时间的变化率，不能代表速度的大小，例如对匀速率圆周运动，$\frac{dr}{dt}=0$，但其速度的大小并不为零。

(B)中的$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$的确代表质点的运动速度，这是矢量，速度的大小是标量，不是矢量。

(C)中的$\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$的含义与$(A)$相同。

按式(1-8)，(D)正确地表示出质点运动速度的大小。

6. 一质点在XOY平面上运动，其运动方程为$x=2t$，　$y=9-2t^2$，式中x、y均以米计，t以秒计，问：在什么时刻质点的位置矢量$\boldsymbol{r}$与速度矢量$\boldsymbol{v}$恰好相互垂直。

解 已知$\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(9-2t^2)\boldsymbol{j}$

按式(1-6)，速度矢量为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$$

设t时刻，$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{v}$，则应有$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$，即两矢量的点积为零，有

$$[2t\boldsymbol{i}+(9-2t^2)\boldsymbol{j}]\cdot(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})=0$$

$$4t+(9-2t^2)(-4t)=0$$

$$4t-36t+8t^3=0,\quad 8(t^3-4t)=0$$

求得$t=0$，　$t=2\text{s}$或$t=-2\text{s}$，舍去最后一个不合理的根，正确的答案是在起始时刻和2s这一时刻，运动质点的位置矢量与运动方向垂直。

果然，$t=0$时刻$\boldsymbol{r}_0=9\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{v}_0=2\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{r}_0$只有$y$方向的分量，$\boldsymbol{v}_0$只有$x$方向的分量，$\boldsymbol{r}_0\perp\boldsymbol{v}_0$，如图1-3所示。

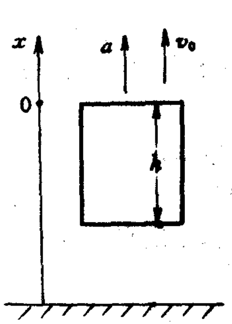

图 1-2

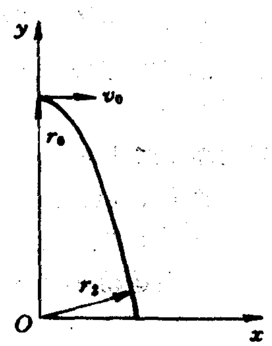

图 1-3

$t=2\text{s}$时刻，$\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，　$\boldsymbol{v}_2=2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}$，　$\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{v}_2=(4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\cdot(2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j})=8-8-0$

或者在XOY平面上作出矢量图也可看出上述结果。

7. 一质点在XOY平面内运动，其运动方程为$x=2t$，$y=19-2t^2$。式中x、y均以米计，t以秒计，①计算从1s末至2s末这段时间内，质点的平均速度；②计算1s末和2s末质点的瞬时速度和瞬时加速度；③在什么时刻，质点离坐标原点最近，并算出这一距离。

解 ①$t_1=1\text{s}$，　$\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+(19-2)\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}+17\boldsymbol{j}$

$t_2=2\text{s}$，$\quad \boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}+(19-8)\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}$

按式(1-5)$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}=\dfrac{2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}}{2-1}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}$

②按式(1-6)，$\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$，$\quad \boldsymbol{a}=\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-4\boldsymbol{j}$ 加速度 $\boldsymbol{a}$ 是一个不随时间改变的常矢量。

$t_1=1\text{s}$ 时，$\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$，$\quad t_2=2\text{s}$ 时，$\boldsymbol{v}_2=2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}$

③矢量 $\boldsymbol{r}$ 的大小为 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2t)^2+(19-2t^2)^2}$，令$\dfrac{dr}{dt}=0$，由此有 $8t(1-19+2t^2)=0$，解此式得，$t=0$ 和 $t=\pm 3\text{s}$，舍去 $t=-3\text{s}$ 这一不合理的根，$t=0$ 时刻，r 有极大值；$r(0)=19\text{m}$；$t=3\text{s}$ 时刻，r 有极小值，$r(3)=6.08\text{m}$。

8. 一无风的下雨天，地面观察者看来，雨滴正以 $4\sqrt{3}\ \text{m/s}$ 的速度匀速铅直下落，那么，在以 4m/s 的速度水平匀速前进的火车中的观察者看来，雨滴与铅直线成(　　)°角。

解　已知 $v_{雨地}=4\sqrt{3}\ \text{m/s}$，方向铅直向下，$v_{车地}=4\text{m/s}$，方向水平向右，按相对运动的速度公式。

$v_{雨地}=v_{雨车}+v_{车地}$，矢量和如图 1-4 所示。$v_{雨车}$便是车上的观察者测得雨滴的速度，由图可知

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{v_{车地}}{v_{雨地}}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad \therefore \theta=30^\circ$$

9. 在一转动着的齿轮上，一个齿尖 P 沿半径为 R 的圆周运动，其路程 s 随 t 的变化规律为 $s=v_0t+\dfrac{1}{2}bt^2$，其中 v_0、b 都是正常数，在 t 时刻齿尖 P 的速度大小是(　　)，加速度的大小是(　　)。

解　Δt 在时间内，齿尖 P 经过的路程为 Δs，位移为 $\Delta \boldsymbol{r}$。当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta s=|\Delta \boldsymbol{r}|$，因此，瞬时速率$\dfrac{ds}{dt}$便与瞬时速度大小相等，即$\dfrac{ds}{dt}=\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$，$t$ 时刻 P 的速度大小为$\dfrac{ds}{dt}=v=v_0+bt$

齿尖作圆周运动，其法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0+bt)^2}{R}$$

其切向加速度为

$$a_t=\frac{dv}{dt}=b$$

齿尖 P 的加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_n{}^2+a_t{}^2}=\sqrt{\frac{(v_0+bt)^4}{R^2}+b^2}$$

10. 一质点作半径为 0.10m 的圆周运动，其运动方程为：$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}t^2$，(SI)制。则其切向加速度 $a_t=$(　　)

解　运动方程中的 θ 是质点的角位置，以弧度(rad)为单位，t 以秒(s)为单位，按圆周运动的公式 $a_t=R\dfrac{d\omega}{dt}=R\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$，其中角速度 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$。

$$a_t=R=0.10\text{m/s}^2$$

11. 一细线下端拴一小球，上端固定构成一单摆，摆线长为 L，将摆球拉至水平位置，然后由静止释放，在摆球沿圆形轨道向下运动过程中，摆球速度逐渐增大，但速度的铅直方向

的分量的变化却不是单调的。求当线与水平方向的夹角 θ 为多大时，摆球铅直方向的分速度达到极大值？

解 如图 1-5 所示，摆球从 A 运到到 B 的过程中，重力对它所作的功为 $mgL\cdot\sin\theta$，拉力 T 不作功，按动能定理，有 $mgL\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}mv^2$，其中 v 代表摆球在 B 位置时所具有的速

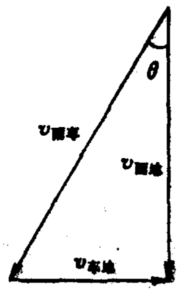

图 1-4

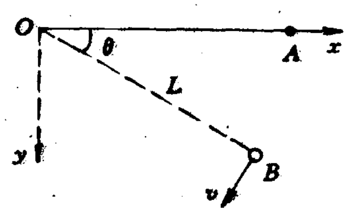

图 1-5

度大小，方向沿圆的切线方向向下，因此速度的铅直分量为

$$v_y=v\cos\theta=\sqrt{2gL}\sqrt{\sin\theta}\cdot\cos\theta$$

θ 不同，v_y 不同。令 $\frac{dv_y}{d\theta}=0$，有

$$\frac{dv_y}{d\theta}=\sqrt{2gL}\left[\sqrt{\sin\theta}(-\sin\theta)+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\right]$$

$$=\sqrt{2gL}\left[\frac{-\sin^2\theta}{\sqrt{\sin\theta}}+\frac{1}{2}\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\right]=0$$

有 $\frac{1}{2}\cos^2\theta=\sin^2\theta$， 或 $\frac{1}{2}(1-\sin^2\theta)=\sin^2\theta$

$\sin^2\theta=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore\theta=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=35°16'$

讨论：为什么在这个角度时，摆球速度的铅直分量达到极大值？回答如下：

摆球作变速圆周运动，其法线方向上的运动方程是

$$T-mg\sin\theta=m\frac{v^2}{L},\quad\text{或}\ T=m\frac{v^2}{L}+mg\sin\theta$$

起始时刻，$\theta=0$，$v=0$，拉力 T 也为零，随着 θ 的增加，拉力 T 也将不断增大，摆球在铅直方向所受的合力 $f_y=mg-T\sin\theta$

$$f_y=mg-\left[m\frac{v^2}{L}+mg\sin\theta\right]\sin\theta$$

$$=mg-\left[\frac{m}{L}\cdot 2gL\sin\theta+mg\sin\theta\right]\sin\theta=mg-3mg\sin^2\theta$$

当 $\sin^2\theta=\frac{1}{3}$ 时，$f_y=0$，即当 $\theta=35°16'$ 时，摆球铅直方向所受合力为零，$a_y=0$，从而使速度的铅直分量达到极大值。而在此之前，f_y 向下，v_y 不断增大，在此之后，f_y 向上，v_y 将不断减小，一直到零。

12. 在离水面高为 h 的岸边，有人用绳子拉船靠岸，人以不变的速率 v_0 收绳。求当船在离岸的水平距离为 x 时，船的速度和加速度。

解 对这个问题，通常的错误是不从速度、加速度的严格定义出发，而想当然地认为：速度的大小为 v_0，速度的方向沿绳向岸，而船以此速度的分量靠岸，则船速 $v=v_0\cos\theta<v_0$，上述结论是错误的。分析如下：设 t 时刻船在 A 点，经 Δt 以后，船行至 A' 点，位移为 Δx，而在此时间内绳的缩短量为 Δs，由图可见 $|\Delta x|>\Delta s$，因而船速

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta t}>\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=v_0(\text{收绳的速率})$$

正确的作法：选取如图 1-6 所示的坐标系，以收绳点作为坐标原点，水平向右作为 X 轴的正方向，铅直向下作为 Y 轴正方向，船的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+h\boldsymbol{j}$$

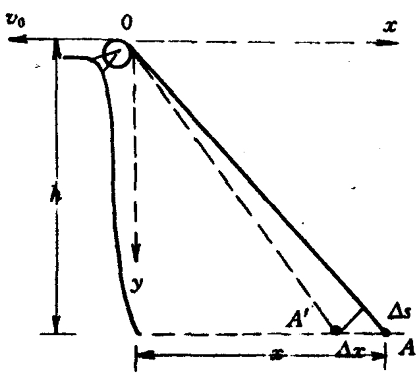

图 1-6

由速度的定义知

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dh}{dt}\boldsymbol{j}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}$$

由图知，$x=\sqrt{r^2-h^2}$ 代入上式，有

$$\boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}\sqrt{r^2-h^2}\cdot\boldsymbol{i}=\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}\frac{dr}{dt}\boldsymbol{i}$$

按题意 $v_0=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=-\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta r}{\Delta t}=-\dfrac{dr}{dt}$

代入上式得 $\boldsymbol{v}=-\dfrac{rv_0}{\sqrt{r^2-h^2}}\boldsymbol{i}=-\dfrac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0\boldsymbol{i}$

显然船速 $\boldsymbol{v}$ 的大小 $\dfrac{rv_0}{\sqrt{r^2-h^2}}>v_0$，式中负号表明方向沿水平方向向左。

由加速度的定义，$\boldsymbol{a}=\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$

$$\boldsymbol{a}=-v_0\frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2+h^2}/x\right)\boldsymbol{i}$$

$$=\frac{v_0h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}$$