自学考试题典

- 全国高等教育自学考试辅导用书
- 经济管理类专业

高等数学(二)
第二分册 概率统计

GAODENGSHUXUE(ER)GAILÜTONGJI

主编 高汝熹 奚声扬

吉林大学出版社

●责任编辑:赵洪波
●责任校对:赵洪波
●封面设计:郝　威

全国高等教育自学考试辅导用书

自学考试题典

高等数学(二)

第二分册　概率统计

(经济管理类专业)

主编　高汝熹　奚声扬

吉林大学出版社出版发行　(长春市解放大路125号)
长春市创意电脑排版制作部制版　长春市长航印刷厂印刷
开本:850×1168毫米　1/32　1999年11月第1版
印张:7.625　字数:195千字　1999年11月第1次印刷

ISBN 7-5601-2303-1/O·247　定价:11.00元

出版说明

高等教育自学考试教材是由全国考委组织的一批具有丰富的教学经验和自学考试工作经验的专家、学者编写的，使用多年，深受欢迎。应广大师生的要求，我们邀请了这些专家，编写了与自学考试教材配套的《自学考试题典》丛书。

本丛书特点如下：

1. 以高等教育自学考试教材为依据，按自学考试大纲的要求编写而成。

2. 本书具有实用性、科学性、权威性、指导性。

3. 全书以章为单位，以“题”为主，采取全国高等教育自学考试试卷的模式，每章题后附答案，供考生自查，以增强考生记忆，强化学习效果。

4. 为便于考生进行自测和临场训练，在本书的最后附有若干套模拟标准试卷，以供参考。

吉林大学出版社《自学考试辅导丛书》编辑室

目 录

第一章 随机事件及其概率

第一部分 基本内容

一、随机事件

1. 确定性现象与随机现象

在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，称为确定性现象．在一定条件下具有多种可能发生的结果，究竟发生哪种结果事先不能肯定的现象，称为随机现象．

2. 随机试验

一个试验如果满足下列条件：

(1)试验可以在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，试验前能预知所有的可能结果；

(3)每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但在试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果．

在概率论中，称上述试验为随机试验，简称试验，记为 E.

3. 基本事件、样本点与样本空间

试验的每一个基本结果称为基本事件，或称为样本点，一般用 ω 表示．随机试验 E 的所有基本事件的全体称为样本空间，记为 Ω.

4. 随机事件

随机事件是样本空间 Ω 的子集，常用大写字母 A、B、C 等表示．样本空间 Ω 也是一个事件，称为必然事件．空集 $\varnothing$ 也作为一个事件，它在每次试验中都不会发生，称为不可能事件．为了讨论

方便，把必然事件和不可能事件作为随机事件的特例，随机事件简称为事件．

5．事件之间的关系与运算

(1)包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．对任意事件 C，都有 $\varnothing\subset C\subset\Omega$．

(2)等价关系

如果事件 $A\supset B$，并且 $B\supset A$，则称事件 A 与 B 等价或 A 等于 B，记为 $A=B$．

(3)事件的并

由属于事件 A 或属于事件 B 的样本点所构成的事件 G，称为事件 A、B 的并，或称为事件 A、B 的和，记为 $G=A\cup B$．事件 G 的发生意味着事件 A 与事件 B 中至少有一个发生．

(4)事件的差

由属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点所构成的事件 H 称为事件 A、B 的差，记为 $H=A-B$．事件 H 的发生意味着事件 A 发生而事件 B 不发生．

(5)事件的交

由属于事件 A 且属于事件 B 的样本点所构成的事件 F 称为事件 A、B 的交或称为事件 A、B 的积，记为 $F=AB$ 或 $F=A\cap B$．事件 F 的发生意味着事件 A 与事件 B 同时发生．

(6)互不相容

如果事件 A 与事件 B 没有共同的样本点，称事件 A 与事件 B 互不相容或称为互斥．两个事件互不相容是指两个事件不可能同时发生，可表示为 $AB=\varnothing$．

(7)对立事件

由所有不包含在事件 A 中的样本点所构成的事件为 A 的对立事件，记作 $\bar{A}$．对立事件也称为逆事件．事件 A 与其逆事件 $\bar{A}$ 满足 $A\bar{A}=\varnothing$，$A\cup\bar{A}=\Omega$．

(8)事件运算的规律

① 交换律:$A\cup B=B\cup A,AB=BA$

② 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$

③ 分配律:$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

④ 德莫根(De Morgan)定理:

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

德莫根定理可以推广到任意多个事件的场合.

二、随机事件的概念

1. 事件的频率

在相同条件下进行 n 次试验,如果事件 A 出现了 μ 次,则称

$$F_n(A)=\frac{\mu}{n}$$

为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率.

2. 事件的概率

随机试验 E 中的事件 A,在 n 次重复试验中发生的次数记为 μ. 当 n 很大时,如果频率 μ/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动,则称 p 为随机事件 A 的概率,记为

$$P(A)=p$$

概率的基本性质:

(1)对任意事件 A 有不等式

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1;$$

(2)对必然事件 Ω 有

$$P(\Omega)=1;$$

(3)对不可能事件 $\varnothing$ 有

$$P(\varnothing)=0.$$

3. 古典概型

(1)古典概型的两个特点

① 试验 E 的样本空间是有限的,设样本点的个数为 n,可记

样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;

② 事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 的发生是等可能性的,即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}.$$

(2)古典概型中事件 A 的概率:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本点总数}}$$

(3)排列与组合

① 排列定义及排列数公式:从 n 个不同元素中任取 $r(r\leq n)$ 个不同元素,按照一定顺序排成一列,叫做从 n 个不同的元素中每次取 r 个不同元素的一个排列．其种数称为排列数,记作 A_n^r,排列数的计算公式为

$$A_n^r=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

当 $r<n$ 时,称为选排列．当 $r=n$ 时,称为全排列．全排列数为

$$A_n^n=n!$$

②重复排列定义及排列数公式:从 n 个不同元素,每次取出 r 个元素(元素可以重复出现),按照一定的顺序排成一列,称为一个重复排列．

从 n 个不同元素中,每次取出 r 个元素的重复排列种数是 n^r.

③组合定义及组合数公式:从 n 个不同元素中任取 $r(r\leq n)$ 个元素编成一组,叫做从 n 个不同元素中任取 r 个元素的组合．其种数称为组合数,记作 C_n^r 或 $\binom{n}{r}$,组合数的计算公式为

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{A_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

4. 概率的加法公式

定理 若事件 A 与事件 B 互不相容,即 $AB=\emptyset$,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

推论 1 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容(即 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j$),则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

推论 2 对立事件的概率之和等于 1,即

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

推论 3 若 $A \supset B$,则

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

推论 4 设 A, B 为任意两个事件,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

5. 条件概率与乘法公式

在已知事件 B 发生的条件下,求事件 A 发生的概率,称为事件 A 在事件 B 已发生的条件下的条件概率,记作 $P(A \mid B)$,在 $P(B) > 0$ 的情况下,有

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

两个事件 A、B 的交的概率,等于其中的一个事件的概率(它不为 0)乘以另一事件在已知前一事件发生的条件下的条件概率,即有乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A)$$

对于事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,如果 $P(A_1) > 0, P(A_1A_2) > 0, \cdots, P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1A_2) \cdots \cdot P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

6. 全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式

如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足

(1) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容,并且有

$$P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n);$$

(2) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

则对 Ω 中任一事件 B,都有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

称上式为全概率公式．应用条件概率和全概率公式，可得贝叶斯公式：

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}(i=1,2,\cdots,n)$$

7. 事件的独立性

对事件 A 和 B，如果

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称它们是统计独立的，简称为独立的．

推论 若 A,B 独立，且 $P(A)>0$，则

$$P(B\mid A)=P(B),$$

反之亦然，

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，任意的 $1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$ 都成立

$$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik})$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的．

8. 贝努里(Bernoulli)试验

(1)贝努里试验的特点

①每次试验都在相同条件下进行，即每次试验所对应的样本空间是相同的；

②各次试验是相互独立的；

③每次试验有且仅有两种结果：事件 A 和事件 $\bar{A}$；

④每次试验的结果发生的概率相同：

$$P(A)=p,P(\bar{A})=q=1-p$$

若试验共进行 n 次，即称为 n 重贝努里试验．

(2) n 重贝努里试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$b(k;n,p)=C_n^kp^kq^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n.$$

第二部分 典型例题分析

一、单项选择题

1. 对掷一粒骰子的试验，在概率论中将“出现奇数点”称为(　　).

(1)不可能事件　　　　(2)必然事件

(3)随机事件　　　　(4)样本空间

分析：掷一粒骰子的试验中，事件“出现奇数点”可能发生也可能不发生，称这样的事件为随机事件.

答案：(3).

2. 下面各组事件中，互为对立事件的有(　　).

(1) $A_1=\{$抽到的三个产品全是合格品$\}$

$A_2=\{$抽到的三个产品全是废品$\}$

(2) $B_1=\{$抽到的三个产品全是合格品$\}$

$B_2=\{$抽到的三个产品中至少有一个废品$\}$

(3) $C_1=\{$抽到的三个产品中合格品不少于 2 个$\}$

$C_2=\{$抽到的三个产品中废品不多于 2 个$\}$

(4) $D_1=\{$抽到的三个产品中有 2 个合格品$\}$

$D_2=\{$抽到的三个产品中有 2 个废品$\}$

分析：设事件 $F_i=\{$第 i 次取到产品为合格品$\}(i=1,2,3)$，抽取三个产品的随机试验对应样本空间为 $\Omega=\{F_1F_2F_3\quad F_1F_2\bar{F}_3\quad F_1\bar{F}_2F_3\quad \bar{F}_1F_2F_3\quad F_1\bar{F}_2\bar{F}_3\quad \bar{F}_1F_2\bar{F}_3\quad \bar{F}_1\bar{F}_2F_3\quad \bar{F}_1\bar{F}_2\bar{F}_3\}$. (1)题中 $A_1=\{F_1F_2F_3\}$, $A_2=\{\bar{F}_1\bar{F}_2\bar{F}_3\}$, $A_1\cup A_2\neq\Omega$, A_1 与 A_2 不是对立事件.(2)题中 $B_1=\{F_1F_2F_3\}$, $B_2=\{F_1F_2\bar{F}_3\quad F_1\bar{F}_2F_3\quad \bar{F}_1F_2F_3\quad F_1\bar{F}_2\bar{F}_3\quad \bar{F}_1F_2\bar{F}_3\quad \bar{F}_1\bar{F}_2F_3\quad \bar{F}_1\bar{F}_2\bar{F}_3\}$, $B_1B_2=\varnothing$, $B_1\cup B_2=\Omega$. 故 B_1 与 B_2 互为对立事件.同理可得 C_1 与 C_2, D_1 与 D_2 不是对立事件.

答案:(2).

3. 事件 $A-B$ 与(　　)不等价.

(1) $A-AB$　　(2) $(A\cup B)-B$

(3) $\bar{A}B$　　(4) $A\bar{B}$

分析:事件 $A-B$ 指由属于事件 A 不属于事件 B 的样本点组成,即事件 $A-B$ 发生,意味着事件 A 发生,而事件 B 不发生.由此判断,可得 $A-AB$,$(A\cup B)-B$,$A\bar{B}$ 分别与 $A-B$ 等价.而 $\bar{A}B$ 指 A 不发生与 B 发生,显见与 $A-B$ 不等价.

答案:(3).

4. 设 A、B 为事件,则 $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=$(　　).

(1) AB　　(2) $\bar{A}\,\bar{B}$

(3) $\overline{AB}$　　(4) $A\cup B$

分析:因 A、B 为事件,其对立事件 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 亦为事件,分别记为 C、D,由德莫根定理

$$\overline{C\cup D}=\bar{C}\,\bar{D}$$

而事件 A 的对立事件 C 的对立事件即为事件 A,同理事件 B 的对立事件 D 的对立事件即为事件 B,即 $\bar{C}\,\bar{D}=AB$.

答案:(1).

5. 甲、乙两人进行射击.A、B 分别表示甲、乙射中目标,则 $\bar{A}\cup\bar{B}$ 表示(　　).

(1)二人都没射中　　(2)两人都射中

(3)二人没有都射中　　(4)至少一个射中

分析:$\bar{A}\cup\bar{B}$ 事件指 A、B 的对立事件 $\bar{A}$,$\bar{B}$ 中至少有一个发生,现 A、B 分别表示甲、乙射中目标,所以 $\bar{A}\cup\bar{B}$ 表示甲、乙至少一人没射中,即二人没有都射中.

答案:(3).

6. 已知事件 A、B 相互独立不能推出(　　).

(1) A 与 B 互不相容　　(2) $\bar{A}$ 与 B 相互独立

(3) A 与 $\bar{B}$ 相互独立　　(4) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立

分析：由 A、B 相互独立，得 $P(AB)=P(A)P(B)$. 为考察(3)是否成立，把事件 $\bar{A}B$ 表示为 $B(\Omega-A)=B-AB$，又 $AB\subset B$，故

$$
\begin{aligned}
P(\bar{A}B) &= P(B-AB)=P(B)-P(AB)\\
&= P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))\\
&= P(B)P(\bar{A})
\end{aligned}
$$

所以 $\bar{A}$ 与 B 也相互独立．同理可推出(3)与(4).

答案：(1).

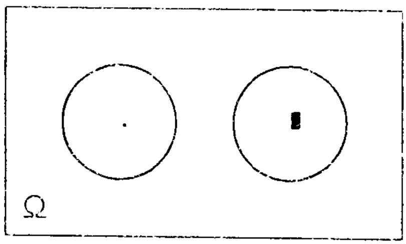
7. 具有正概率事件 A、B 互不相容，则(　　)一定成立．

(1) $P(\bar{A}B)=0$

(2) $P(B|\bar{A})=0$

(3) $P(A)=P(A\cup B)-P(B)$

(4) $1-P(\overline{AB})\neq 0$



分析：为了判别上述五个等式是否成立，可借助图 1-1 进行分析．(1)由图可知 $\bar{A}B=B\neq\emptyset$，故 $P(\bar{A}B)\neq 0$.

(2)由图可知，在 $\bar{A}$ 发生的条件下，事件 B 有可能发生，$P(B|\bar{A})$不恒等于零．

(3)由图 1-1，事件 $A\cup B$ 所含有的样本点等于事件 A 与事件 B 含有的样本点之和，故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，即 $P(A)=P(A\cup B)-P(B)$.

(4)由图 1-1，$AB=\emptyset$，$\overline{AB}=\Omega$，故 $P(\overline{AB})=1$ 即 $1-P(\overline{AB})=0$.

答案：(3).

8. 设 A、B 是两事件，则下列等式中(　　)是不正确的．

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$，A、B 相互独立

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，A、B 互不相容

(3) $P(AB)=P(B)P(A|B)$，$P(B)\neq 0$

(4) $P(AB)=P(A)P(A|B), P(A)\neq 0$

答案:(4).

9. 当事件 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 互不相容时,$P(\overline{A\cup B})=($　　$)$.

(1) $1-P(A)-P(B)$　　(2) $P(\bar{A})P(\bar{B})$

(3) 1　　(4) 0

分析:如果用对立事件的概率计算,得 $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$,已知条件为 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 互不相容,不等于事件 A、B 互不相容,故 $P(\overline{A\cup B})\neq 1-P(A)-P(B)$. 用德莫根定理,得 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\,\bar{B}$,事件 $\bar{A}$,$\bar{B}$ 互不相容,不等于事件 $\bar{A}$,$\bar{B}$ 相互独立,故 $P(\overline{A\cup B})=P(\bar{A}\,\bar{B})\neq P(\bar{A})P(\bar{B})$. 当 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 互不相容时,有 $\bar{A}\bar{B}=\varnothing$,故 $P(\bar{A}\,\bar{B})=0$.

答案:(4).

10. 设 A、B 具有正概率的事件,下列各式中恒成立的为(　　).

(1) $P(A\cup B)<P(A)+P(B)$

(2) $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

(3) $P(A|B)>P(AB)$

(4) $P(A)>P(A-B)$

分析:已知 A、B 具有正概率的事件,有可能 A、B 互不相容,此时 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;也有可能 A、B 不互不相容,此时 $P(AB)>0$,即 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)<P(A)+P(B)$,所以(1)不恒成立,(2)恒成立. 由条件概率公式 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$,当 $0<P(B)<1$ 时,有 $P(A|B)>P(AB)$;当 $P(B)=1$ 时,有 $P(A|B)=P(AB)$,所以(3)不恒成立. 当事件 A、B 互不相容时,有 $A-B=A$,此时 $P(A)=P(A-B)$,所以(4)不恒成立.

答案:(2).

11. 设事件 A 与 B 相互独立,则(　　)不能成立.

(1) $P(A)=P(A|B)$　　(2) $P(A)=P(A|\bar{B})$

(3) $P(B)=P(B|A)$

(4) $P(A\cup B)=1-P(A)P(B)$

分析:已知事件 A 与 B 相互独立,即事件 A、B 中任一事件发生与否不影响另一事件发生的概率,所以有

$$P(A|B)=P(A),P(B|A)=P(B)$$

故(1)、(3)成立;当 A 与 B 相互独立时,A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 B 及 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立,所以有

$$P(A|\bar{B})=P(A)$$

故(2)成立;由互为对立事件的概率公式、德莫根定理及 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 的独立性,不难推得:

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\,\bar{B})\\&=1-P(\bar{A})P(\bar{B})\end{aligned}$$

所以(4)不成立.

答案:(4).

12. 有50个产品,其中46个正品,4个次品,现从中抽取5次,每次任取1个产品,则取到的5个产品都是正品的概率为(　　).

(1) $\frac{46}{50}$　　(2) $\frac{C_{46}^{5}}{C_{50}^{5}}$

(3) $\frac{C_{46}^{5}}{50^{5}}$　　(4) $\frac{46^{5}}{50^{5}}$

分析:本题中试验形式等价于从中任取1次为5个产品,可利用古典概率的公式计算.

答案:(2).

13. 盒中共有18个球,其中8个玻璃球,10个木质球,而玻璃球中有2个红色、6个蓝色球;木质球中有3个红色、7个蓝色球,记 A="取到蓝色球",B="取到玻璃球",则 $P(B|A)=$(　　).

(1) $\frac{8}{10}$　　(2) $\frac{6}{13}$

(3) $\frac{6}{7}$　　(4) $\frac{8}{10}$

分析：条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，在 18 个球中，蓝色球共 $6+7=13$ 个，故 $P(A)=\dfrac{13}{18}$. 在 18 个球中，蓝色的玻璃球为 6 个，事件 AB 表示取到蓝色的玻璃球，故 $P(AB)=\dfrac{6}{18}$，因此 $P(B|A)=\dfrac{6}{18}\Big/\dfrac{13}{18}=\dfrac{6}{13}$.

答案：(2).

14. 某批产品中有 20% 的次品，现取 5 件进行重复抽样检查，那么所取 5 件中有 3 件正品的概率为(　　).

(1) 0.2^2　　(2) $\dfrac{3}{5}\times(1-0.2)^2$

(3) $C_5^3 0.2^2(1-0.2)^3$　　(4) $C_5^3 0.2^3(1-0.2)^2$

分析：重复抽样检查中，每次取一件为次品的概率是 20%，故每次取一件为正品的概率为 $1-20\%=80\%=0.8$，抽取 5 件可看作抽取 5 次，每次一件，本题为 5 重贝努里试验，5 件中有 3 件正品的概率为 $b(3;5,0.8)=C_5^3 0.8^3\times0.2^2$.

答案：(3).

二、简答题

1. 写出下列随机试验的样本空间．

(1) 一盒内放有四个球，它们分别标上 1,2,3,4 号．现从盒中任取一球后，不放回盒中，再从盒中任取一球，记录两次取球的号码．

(2) 将(1)的取球方式改为第一次取球后放回盒中再作第二次取球，记录两次取球的号码．

(3) 将(1)的取球方式改为一次从盒中任取两个球，记录取球的号码．

答：(1) 分析：由于第一次取球后不放回再作第二次取球，因此两次取到的标号不能重复．显然第一次取球时，盒中的四个球中