

非线性泛函分析

陈 文 岷 著

甘 肃 人 民 出 版 社

非线性泛函分析

陈文 崑 著

甘肃人民出版社

非线性泛函分析

陈文颢著

甘肃人民出版社出版

(兰州第一新村51号)

甘肃省新华书店发行 兰州八一印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张12.375 字数293,000

1982年6月第1版 1982年6月第1次印刷

印数1—3,865

书号13096 定价: 1.62元

序 言 (之一)

非线性泛函分析如果追溯到古典变分法,则它的历史可以说比线性泛函分析还要长得多。这是因为线性泛函分析要等到线性代数本身有了一定的成熟程度才能产生,而非线性泛函分析却是作为微积分学的自然推广而在十七世纪末十八世纪初就以变分法的形式出现了。这就是指求定义在函数空间上的(积分形式的)泛函的极大极小值。十九世纪末关于变分法的进一步研究以及偏微分方程边界值问题的研究,使人们逐步获得了泛函与算子的概念。

本世纪初,与变分法问题、流体力学问题、天体形状理论等有关,数学家们在许多篇文章中处理了一些特殊类的非线性积分方程与积分微分方程。这里主要有E.Schmidt、M.A.Ляпунов与T.Carleman等人的工作。在这些特殊问题中,创立的方法至今仍是非线性泛函分析的组成部分(见本书第二章§9等)。

真正的非线性泛函分析却是由M.Fréchet的奠基性工作开始的。他在G.Cantor集论的基础上建立了一般分析学,即抽象(拓扑)空间上的数学分析。他又提出了泛函与算子的微分等基本概念。于是无穷维空间上的微积分形成了。

现在,非线性泛函分析还在发展中。就其目前的内容来说,有下列一些:微分学与变分问题(包括次微分,不能微分情形的求极值);具特定的但又有一定广泛性的属性的非线性算子:例如单调型算子及其推广、有序线性空间中的正(即保序)算子等等,集值算子;与非线性方程解的个数有关的映象度理论;自H.Poin-

care以来就被重视的分歧（分岔）理论等等。这些理论的重要，不仅是由于它们在纯数学上的价值，而且是由于它们在实际上的重要性。

前面已经指出，非线性的各种方程——包括微分方程、偏微分方程、积分方程、积分微分方程以及差分方程的研究来源于自然科学与工程技术中的大量问题。如果自然科学家与工程技术家往往认为线性方程的解存在唯一性对他们来说常是理所当然的，从而他们对于纯数学家在这方面的努力并不感兴趣，那末，在非线性方程的情形却很不一样！首先，非线性方程的解从大范围说来一般并不唯一。但它是否一定有多解？它究竟有几个解？这问题之所以重要，而且恰是非线性泛函分析这样的理论工具最适合于解答，因为一些近似的、数值的方法虽然在实际上很重要，它们往往是从初始近似逐步改进而得出逼近到所需程度的近似解。这里所依据的是解的局部唯一性。在有多个解的情形，这种方法的局限性就很明显了，因为单纯用逼近的数值方法很难保证把所有的解求出。所以人们认为，在这里，泛函分析的方法，以及它与拓扑学、微分几何与大范围分析相交叉的部分，发挥了别的方法所不能取代的作用，对非线性问题解的个数能给出确切的结论。

在许多实际问题中，问题的定态解意味着系统的平衡态，而方程中的参数的变化标志着系统的构成部件或单元特征的变化，反映了环境的改变或系统的“老化”等等。这种参数的变化，在没有达到一定程度时只引起系统的量的改变，但当参数变化达到一定程度（达到临界值）时，就会引起系统的定性行为的改变。

在一些实际问题中，例如在化学工程中，由于非线性问题的多解的存在，不仅常要关心由于方程中参数的变化，从一个解变到多个解的分岔，还要关心在分岔前后稳定性的改变。此外，这种分歧（或分岔）的问题近年来引起多方面的注意，例如流体力

学中的Bénard问题与Taylor问题，还有在激光现象中，生态问题中，等等。分歧表达了这种量变到质变的过程。或是当参数走过临界值时，定态解的个数由一个变成好几个；或是本来在参数未达到临界值时只有定态解，但当参数达到临界值时使周期解出现，这意味着系统的自组织性。最近几年，人们的考察从物理——力学的系统以及工程系统（自动控制系统等）扩展到生态系统、经济社会系统，同时发现这些系统都在定量定性方面呈现着某些共性——复杂系统由于高度的非线性所呈现的分歧现象就是这些共性中的一个较为带基本性的。例如，比利时诺贝尔奖金获得者I. Prigogine的非平衡系统的自组织性学说，H. Haken的协同学等都部分地与分歧理论有密切关系。从系统科学看来，这正表现了复杂系统的某些共性。因此，分歧理论乃至一般的非线性分析就受到更广泛的科学技术工作者们的关心。

陈文颢同志从事非线性泛函分析的研究二十余年，卓有成绩，他在多年的科学研究与教学的丰富经验的基础上写出这本书，在许多方面有自己的特色。同时，这本书又是在我国正式出版的第一本关于非线性泛函分析的基础读物。我相信，这本书的出版，不仅对于我国数学界，也对于关心复杂系统的各门科学技术的科学工作者，很有益处。

关肇直

1981年4月30日于北京

序 言 (之二)

泛函分析是分析学的对象纳入无穷维空间的框架,代数的、几何的概念结合起来,发展起来的数学分支。泛函分析形成的开始时期已有非线性分析的一些本质的题材。认真说来,非线性泛函分析不是线性泛函分析(如果我们同意这样称呼的话)的直接的、对立物或泛函分析这个领域中线性知识总体的逻辑上的余集。我们接受这个词表明近年泛函分析已发展到一个新的阶段,这时人们对泛函分析的非线性内容中较集中、较频繁地反映了实质性而又逐渐被形成系统的若干课题予以综合。非线性泛函分析的现状,反映近时人们认为方便有力的处理非线性分析问题的观点,还将随着有关分支学科发展。

分析学对象的背景联系到一些物理科学关心的重要问题。泛函分析由之吸收营养,但如没有现代几何学、拓扑学的发展来支持是很难设想的。几何学的(包括半序的)、拓扑学的象代数的因素一样,在泛函分析中除有助于提供课题外,更主要是在构成框架及与框架适应地进行数学分析的观点及方法选择中起根本作用。Henssi Poincaré把数学分析理解得很广的主张在现在能更好地被理解。除分析数学最根本的领域外,在实、复流形上微分几何、经典及现代物理学、变分学的研究中产生的非线性分析问题及方法,都可能进入非线性泛函分析汲取的范围。从而取得的认识在建立泛函分析的对象模型,探求泛函的统一性和深入洞察内在的特性的努力中已起着并继续起着推动、指引作用。

在探求统一性中,人们自然地侧重表现泛函分析固有特性手

段的运用。人们从抽象的观点面临的课题，基本上有两个途径：其一是把线性泛函分析中卓有成效的特定结果推向更一般的非线性框架中；其二是用有穷维流形及其间映射的无穷维样版看课题。最后还有在这两途径之上存在着真正无穷维而又非线性的现象。这两途径密切相关，由之人们不断吸收数学各分支成就；且当它们与现代拓扑学结合，其效应特别显著，具强大力量的数学思想构成了。非线性泛函分析的潜力就在于此。

非线性泛函分析的根本任务，是解决具有分析学的结构无穷维空间之间有各种规定性的映射给出的方程求解问题。因此，求解的安排是在一定的框架中。人们要求回答定性——存在性、唯一性、连续依赖性问题，局部地或全局地回答构造性和计算性问题。

无穷维空间中的微积分学，特别是微分学的发展成熟是非线性泛函分析日益被人注意并加以运用的一个重要促成因素。变分学的发展，对无穷维空间微分学起着根本的作用。今天，人们从经典的求极值问题被引到更一般的优化理论，被引到通过变分方法研究解决微分、积分、算子等各类方程问题。非线性积分方程的研究始于本世纪初，它涉及非线性泛函分析诸多方面，对提供课题、概念及方法最有关系，直至今天它对非线性泛函分析仍极富于典型的意义。

于是，我们看到对非线性泛函分析的一般安排、各种尝试。大体上它们有解析的、变分的及拓扑的几个侧面，虽然这些不能包括全面，且不同时机不同作者还有自己的选择和侧重，有比较共同的作法。给出无穷维空间微积分学基础，随着将隐函数及反函数定理及其运用介绍出来（牛顿图、Liapunov——Schmidt程序、Morse引理等），不动点定理、拓扑度理论这些拓扑的理论近来的发展及作用，表示人们解决非线性问题的力量更加增

进。对于非线性分析问题来说，这些无疑地具有最经常、最根本的意义。例如，对各型方程问题解的定性讨论，对分枝问题的分析等。如果说紧性理论在分析学中具有根本的意义，特别它涉及不动点及Leray—Schauder度，那末单调性理论，利用先验估计的使用且它结合凸泛函数和梯度算子在解决发展型方程、变分不等方程方面的作用是近年已受到注意的。变分原则及变分方法对经典的数理问题、线性分析的成就有贡献，今后对非线性分析问题将会有更大的发展。在非线性的泛函分析的发展中，人们还注意到对计算性和构造性的兴趣始终不减弱，逐步迭代或逼近理论地位的重要就不必说了。比如，在涉及不动点、拓扑度的分析上，人们也注意了能计算或构造的因素。

近年数学多样的迅速发展，使每个人对知识的需要均有自己的选择。例如，在线性偏微分方程理论方面，由于发展很快，已很难也不必一次写一本包容全面的书。无疑我们需要适应不同要求有特色的参考书。因此，以本书作为出色的开端，我们期待在非线性的泛函分析方面有更多这样的参考书问世。

田方增

1981年3月24日

目 录

序言 (之一)	关肇直 (1)
序言 (之二)	田方增 (4)

第一章 基本概念

§ 1 非线性映象的连续性和有界性	(1)
§1.1 定义和简单例子	(2)
§1.2 Caratheodory映象	(6)
§ 2 n 线性算子与 n 次型	(10)
§2.1 n 线性算子与对称 n 线性算子	(11)
§2.2 有界 n 线性算子	(15)
§2.3 连续的 n 线性算子和 n 次型	(22)
§ 3 非线性映象的微分	(26)
§3.1 非线性映象的弱微分	(27)
§3.2 非线性映象的微分	(31)
§3.3 导映象与梯度	(37)
§3.4 例子	(42)
§ 4 高阶微分	(48)
§4.1 高阶弱微分	(49)
§4.2 高阶微分和高阶导映象	(50)
§4.3 Taylor公式	(55)
§ 5 解析映象	(57)
§5.1 幂级数的收敛性	(58)
§5.2 幂级数的连续性与可微性	(65)

第二章 反函数定理	(69)
§ 6 反函数定理.....	(70)
§6.1 局部反函数定理.....	(71)
§6.2 全局反函数定理.....	(77)
§ 7 反函数定理的变形和推广.....	(86)
§7.1 导映象闭值时映象的局部状态.....	(87)
§7.2 不可微映象的反函数.....	(97)
§7.3 邻域定理.....	(103)
§ 8 隐函数定理.....	(108)
§8.1 隐函数存在定理.....	(108)
§8.2 解析映象的隐函数.....	(111)
§ 9 分歧问题与Ляпунов—Schmidt过程 ...	(115)
§9.1 定义和例子.....	(116)
§9.2 Ляпунов—Schmidt过程.....	(122)
第三章 拓扑度数理论	(131)
§ 10 Brouwer度.....	(132)
§10.1 引言.....	(133)
§10.2 C^2 映象的度数.....	(137)
§10.3 Brouwer度的定义和基本性质.....	(146)
§10.4 乘积定理与简化定理.....	(155)
§ 11 有限维球面上的映象.....	(161)
§11.1 球面间映象的同伦.....	(162)
§11.2 Brouwer定理.....	(167)
§11.3 Borsuk定理及其应用.....	(169)
§ 12 紧连续映象.....	(176)
§12.1 引言.....	(177)

§12.2	紧连续映象	(180)
§12.3	紧连续场与紧同伦	(186)
§13	Leray—Schauder度	(188)
§13.1	Leray—Schauder度的定义	(189)
§13.2	Leray—Schauder度的性质	(194)
§13.3	孤立不动点指数的计算	(199)
§14	非线性固有元问题	(204)
§14.1	歧点	(205)
§14.2	渐近歧点	(211)
第四章	度数理论的推广	(215)
§15	拓扑度公理	(216)
§15.1	度数的公理和性质	(216)
§15.2	度数的延拓与唯一性	(223)
§16	集压缩映象和凝聚映象	(231)
§16.1	非紧致度	(232)
§16.2	集压缩映象	(239)
§16.3	拓扑度数	(246)
§16.4	补充材料——关于基本集	(252)
§17	锥映象	(254)
§17.1	有序Banach空间	(255)
§17.2	锥映象的拓扑度	(262)
§17.3	多解定理	(267)
§18	同伦延拓理论	(273)
§18.1	同伦延拓定理	(274)
§18.2	本质性与平凡性的判别法	(277)
§18.3	应用	(286)

第五章 变分原理	(290)
§ 19 极值问题.....	(290)
§19.1 极值必要条件	(291)
§19.2 极值的存在性	(295)
§ 20 临界点理论.....	(305)
§20.1 引言	(307)
§20.2 集合种类	(310)
§20.3 假设与预备结论	(313)
§20.4 主要定理	(322)
附录A Sard 定理.....	(328)
§A.1 临界点和临界值	(328)
§A.2 定理的证明	(330)
§A.3 $n=m$ 时定理的简证	(338)
附录B 仿紧性及有关命题	(339)
§B.1 仿紧空间与单位分割	(340)
§B.2 非平凡光滑泛函.....	(344)
§B.3 Dugundji延拓定理	(348)
附录C 复盖映象.....	(350)
§C.1 基本概念	(350)
§C.2 复盖映象的特征.....	(355)
§C.3 有限层复盖映象.....	(362)
文献.....	(368)
索引.....	(372)
符号.....	(376)
后记.....	(381)

第一章 基本概念

非线性泛函分析的研究对象是无穷维空间中的非线性映象。它有两个显然而重要的特例：一是有限维空间中的函数和向量场；二是泛函分析中的线性算子和线性泛函。因此，对于非线性泛函分析而言，古典分析理论和线性算子理论始终是两个重要的基础课目。无论从概念引入或是研究方法直至基本结果，它们都为研究非线性映象提供了许多十分有益的启示。

本章的目的是类比古典分析和线性泛函分析建立非线性映象的某些概念，主要是无穷维空间中的微分概念。由于这些内容在研究非线性问题中能起很大的作用，把它们叙述得稍微充实一点是有好处的。为此，我们除了介绍一些作为以后章节预备的基本定义而外，还加了一些本身有独立意义的讨论。

本章的内容有：

- §1 非线性映象的连续性和有界性
- §2 n 线性算子和 n 次型
- §3 非线性映象的微分
- §4 高阶微分
- §5 解析映象

§1 非线性映象的连续性和有界性

连续性和有界性是古典分析中的基本概念，在泛函分析中它们仍然起着相当重要的作用。然而由于泛函空间的无穷维特点，

这些概念与它们在有限维的情形是有差别的。

第一，连续性是与极限有关的。无穷维空间有各种各样的拓扑，因而，能导出多许不同的连续性。在处理不同的具体问题时，利用不同的连续性常常是方便的。

第二，无穷维空间的连续性是一种很严格的限制。例如，无界线性算子就是不连续的。很多形式非常简单的映象也未必连续。我们回想数学分析中多元函数连续远比一元函数复杂，就不难理解无穷维的连续性是十分强的要求。

第三，无穷维空间的连续映象并不起有限维连续函数相同的作用。例如，不能保证单位球上连续泛函有界。

尽管需要注意如上差别；但总的说来，对于无穷维空间的连续性和有界性，仍然能够类似于古典分析引出很多有用的事实（请参看М.М.Вайнберг [27] 第一章）。我们在这里不算重述那些结果，只限于讲几个最基本的定义和最简单的例子。

本节讨论如下两个问题

§1.1 定义和简单例子

§1.2 Caratheodory映象

§ 1.1 定义和简单例子

本段介绍几个基本定义。

设 X, Y 为实线性赋范空间， $\Omega \subset X$

定义 称映象 $f: \Omega \rightarrow Y$ 在 $x \in \Omega$ 是有限 n 连续的，即对任何 $h_1, \dots, h_n \in X$ ，当 $x + \sum_{i=1}^n t_i h_i \in \Omega$ 时， n 个实变元 $t_1, \dots, t_n$ 的抽象函数

$f(x + \sum_{i=1}^n t_i h_i)$ 在 $\{t_1, \dots, t_n\} = \{0, \dots, 0\}$ 连续。

直觉地说，有限 n 连续即 f 局限在任何 n 维子空间是连续的。

请注意, 这里并没有用到 X 的范数, 只要 X 是线性空间 (但 Y 必须有极限概念) 就可定义有限连续性。

定义 称映象 $f: \Omega \rightarrow Y$ 在 $x \in \Omega$ 连续, 即任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\sigma > 0$, 当 $x' \in \Omega$ 且 $\|x' - x\| < \sigma$ 时, 恒有 $\|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$ 。若 f 在 Ω 内每点都连续, 则称 f 在 Ω 连续。如果 $x \in \Omega$ 时, 连续定义中的 σ 只与 ε 有关而与 x 无关, 则称 f 在 Ω 一致连续。

定义 称映象 $f: \Omega \rightarrow Y$ 有界, 即 f 映 Ω 中任何有界集成 Y 中有界集。

上述连续的定义, 几乎是古典分析中定义的照抄。而有界性定义虽与古典分析中函数有界的定义略有不同, 但与泛函分析中线性算子有界的定义是吻合的。请注意, 由于空间是无穷维的, 这些形式上相同的定义, 可能导出极不相同的特性。例如, 在有限维空间 $X = R^n$ 中, 由于任何有界闭集 Ω 是紧的, 故 Ω 上连续映象 $f(x)$ 必有界且 $\|f(x)\|$ 在 Ω 上达到极值。下面的例子表明, 对于无穷维空间, 这些结论可能不成立。

例1 考察 $X = l^2$ 上的泛函

$$\varphi(x) = \sum_{|\xi_i| \geq 1} (|\xi_i| - 1)i,$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots\} \in l^2$, 由于 $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = 0$, 故对任何 $x \in l^2$, $\varphi(x)$ 定义中的和数只含有限多项。又由于 l^2 中依范收敛导出按坐标收敛, 故 $\varphi(x)$ 在 l^2 中连续。

但对任何固定的 $\varepsilon > 0$, 取数列 $x^{(n)} = \{\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_i^{(n)}, \dots\}$

$$\text{其中 } \xi_i^{(n)} = \begin{cases} 1 + \varepsilon, & \text{当 } i = n \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } i \neq n \text{ 时,} \end{cases}$$

则 $x^{(n)}$ 属于球 $T = \{x \mid \|x\| \leq 1 + \varepsilon\}$ 而且

$$\varphi(x^{(n)}) = \varepsilon n \rightarrow \infty, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

这说明泛函 $\varphi(x)$ 在 T 上连续而无界。#

例2 表 X 为 $C[0, 1]$ 中满足条件 $x(0) = x(1) = 0$ 的子空间, 考察 X 上泛函

$$\varphi(x) = \int_0^1 |x(t)|^2 dt$$

由于 X 中收敛是连续函数列的一致收敛, 故 $\varphi(x)$ 在 X 连续。

易见 $\varphi(x)$ 在 X 的单位球 $T = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ 上有界且

$$\sup_{s \in T} \varphi(x) = 1$$

但任何 $x \in T$, 由于 $x(0) = x(1) = 0$, 必有 $\varphi(x) < 1$

这表明 $\varphi(x)$ 在 T 上连续有界而不能达到极大值。#

结论1.1 球上一致连续映象有界。

证明 设映象 $f(x)$ 在球 $T = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ 上一致连续, 则取 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x, x' \in T$ 且 $\|x - x'\| < \delta$ 时, $\|f(x) - f(x')\| < 1$ 。

选自然数 N 使 $\frac{r}{N} < \delta$, 对任何 $x \in T$, 令

$$x_i = x_0 + \frac{i}{N}(x - x_0), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

由于 $\|x_{i+1} - x_i\| = \frac{1}{N} \|x - x_0\| \leq \frac{r}{N} < \delta$, 故 $\|f(x_{i+1}) - f(x_i)\|$

< 1 , 因此,

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \sum_{i=0}^{N-1} \|f(x_{i+1}) - f(x_i)\| \leq \|f(x_0)\| + N$$