图形的大小相等和組成相等

B.Г.布尔强斯基著

商 务 印 書 館

图形的大小相等
和組成相等

B.Г.布尔強斯基著

刘頴浩譯

商务印書館

1959年·北京

內 容 提 要

本書系根据苏联国家技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1956 年出版的 В. Г. 布尔强斯基 (В. Г. Болтянский) 著 Равновеликие и равносоставленные фигуры 譯出。

本書第一章論述平面多边形的大小相等和組成相等；第二章論述空間多面体的大小相等和組成相等。本書談到几何学中一个特殊而有趣的問題，这个問題在面积和体积的計算方面，是具有实用价値的。

商 务 印 書 館 出 版
北京东总布胡同 10 号
(北京市書刊出版业營业許可証出字第 107 号)
新 华 書 店 总 經 售
五十年代印刷厂印刷 紅旗裝訂厂裝訂
統一書号: 13017·185

1959年2月初版　　開本787×1092 1/32
1959年2月北京第1次印刷　　字数 50 千字
印張 2—3/16　　印数 1—8,000
定价 (9) ¥ 0.25

序　言

这本小册子的讀者請注意，我們要首先提出由数学家波耶奂和盖尔文所發現的一个定理的証明，这个定理是这样的：如果两个多角形的面积相等，那末其中一个多角形可以割分成这样一些部分，用这些部分可以組成另一个多角形。用簡單的术語来說：如果两个多角形大小相等，那末它們就会組成相等。这本小册子全部所講述的是与圖形的組成相等有关的某些問題。全書分为两章：第一章研究多角形的組成相等，第二章研究多面体的組成相等。上述定理就是第一章里几个基本定理中的一个。

第二章里的登定理是最有趣味的一个定理，它說：存在有两个具有相等体积（大小相等）而不組成相等的多面体。

B.Φ. 卡剛（1869—1953）在他的"論多面体的变換"一書中給出了上述两个古典定理的証明。这本写得特出而不成巨册的書，享有应得的荣誉。在他的这本書中，关于登定理的証明，有几处不是屬于初等数学范圍之內的，例如，他利用了連續的概念、綫性方程組的性質等等。

几位瑞士几何学家在最近时期得到了一些新的結果，比較波耶奂—盖尔文定理和登定理更深入。这些新結果的存在而 B.Φ. 卡剛的書实际上已經罕見，因而促使作者写一本关于这个問題的新書。

波耶奂—盖尔文定理和登定理分别証明在 §1、§5 两节里。在这里給出的証明大大不同于 B.Φ. 卡剛的書中的証明。尤其是，登定理的証明是以大量屬于初等数学范圍之內的簡單內容，和卡剛的書相区别。

在§§2—4以及§6諸节里介紹了最近几年的一些結果(除了§4中的一个新定理以外，这些結果屬于哈特維盖尔、格留尔以及席特列尔)。

前3—4节是本書中最簡單的部分。大約具有中学八年級的文化水平的讀者，就能够理解这一部分的內容。同时，这几节包括与多角形的面积度量有关的一些問題的單純內容。前三节的材料是作者曾經在莫斯科大学向中学生所作講演的基础上写成的。本書难懂的一部分是第5节和第6节的开端。在那些部分，讀者要具有完全中学的几何知識和很好的邏輯思維的程度。最后，本書剩下最难懂的一部分(小字部分)，預計要求讀者要有專科学校和大学的学生水平。

作者对И.М.雅格洛姆最后加工原稿所給予的友好帮助，表示眞誠的感謝，作者認为这是自己应尽的义务。

写作本書的时候曾經参考过下面的一些論文：

1. В. Ф. 卡剛著："論多面体的变换"，ГТТИ，1933。

2. Д. О. 士克李耶斯基、Н. Н. 鏘作夫、И. М. 雅格洛姆合著："初等数学定理和选題"，卷Ⅲ，立体几何，«数学小組丛書»第三期 Гостехиздат，1954。

3. H. 哈特維盖尔、P. 格留尔合著："平面多角形的剖分相等"，Elemente der Mathematik 6(1951)，97—106。

4. H. 哈特維盖尔著："多面体的剖分相等問題"，Archiv der Mathematik 2(1949—1950)，441—444。

5. H. 哈特維盖尔著："k維多面体的剖分相等問題"，Mathem. Ann. 127(1954)，170—174。

6. H. 哈特維盖尔著："k維多面体的拼补相等問題"，Mathem. Zeits. 55(1952)，292—298。

7. H. 哈特維盖尔著："剖分相等与加性多面体函数"，Archiv

der Mathematik 1(1948—1949), 468—472。

8. H. 哈特維盖尔著:“多面体的中心与剖分相等变换”, Mathem. Nachr. 8 (1952), 53—58。

B. 布尔强斯基

目　　錄

序 言 …………………………………………………………………… II

第一章　多角形的組成相等 ………………………………………… 1

§1 波耶矣—盖尔文定理 ………………………………………… 1

§2 哈特維盖尔—格留尔定理 …………………………………… 12

§3 組成相等和加性不变量的概念 ……………………………… 21

§4 組成相等和羣的概念 ………………………………………… 28

第二章　多面体的組成相等 ………………………………………… 37

§5 登定理和哈特維盖尔定理 …………………………………… 37

§6 体积的計算法 ………………………………………………… 52

中外人名对照表 …………………………………………………… 62

补充 ………………………………………………………………… 63

第一章　多角形的組成相等

§1　波耶英—盖尔文定理

1. 剖分法　我們观察圖 1 所表現的两个圖形(十字形的所有綫段彼此相等；正方形的一边与綫段 AB 相等)。在圖上画的一些虛綫，把这两个圖形剖分成数目相同的相等部分(这两个圖形里的相等部分用同一的数碼标出)。这个事实用术語表述如下：圖 1 的两个圖形組成相等。換句話說，如果用一定的方式把两个圖形中的一个剖分成有限个部分以后，又可以用其他方式配置这些部分，以組成这两个圖形中的另一个，那末，这两个圖形叫做組成相等。

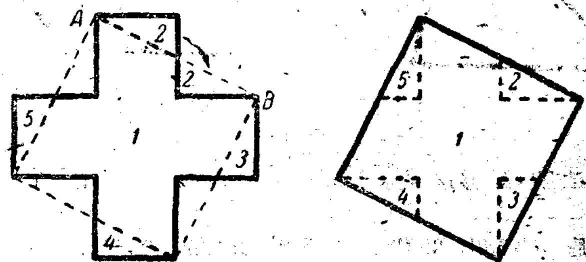


圖 1

显然，两个組成相等的圖形大小相等，就是說它們的面积相等。在这个基础上建立起来的計算面积的簡單方法，叫做剖分法(或者叫做划分)。这个方法(二千多年以前的欧几里得已經知道)規定如下：为了計算面积，用这样一个方法，把一个圖形剖分成有

限个部分，使得由这些部分可以組成一个更簡單的圖形(后一圖形的面积为已知)。我們回忆在中学几何教程里应用这个方法所熟悉的一些例子。圖 2 給出一个計算平行四边形的面积的方法：一

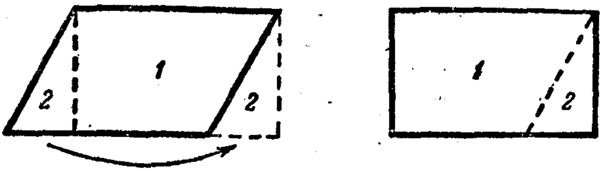


圖 2

个平行四边形和一个矩形如果等底等高，則它們是組成相等，从而它們也是大小相等①。

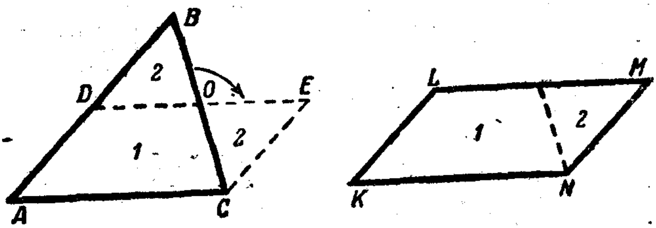
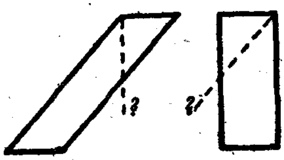


圖 3

圖 3 表明，能够这样来計算一个三角形的面积：一个三角形的

---

① 但是，应該指出，用这样一个簡單的分法(截出一个三角形)，未必能达到目的。在下圖表示的情形中，把一个平行四边形剖分成兩部分的机会沒有，而需要把平



行四边形剖分成更多的部分，使得这些部分構成一个与平行四边形等底等高的矩形(参看后面引理 3 的証明)。

面积等于一个底边与它相等而高只有它的一半的平行四边形的面积（因为这两个圖形組成相等）。最后，圖 4 給出一个計算梯形面积的方法。

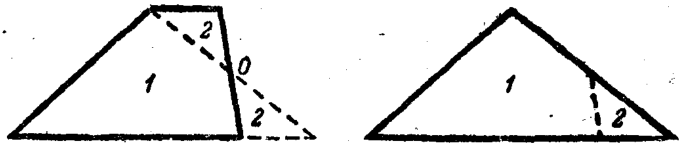


圖 4

当然，可以研究曲綫圖形的組成相等的問題（例如，参看圖 5）；但是这里不研究这样的圖形①。我們在这一章仅研究多角形。

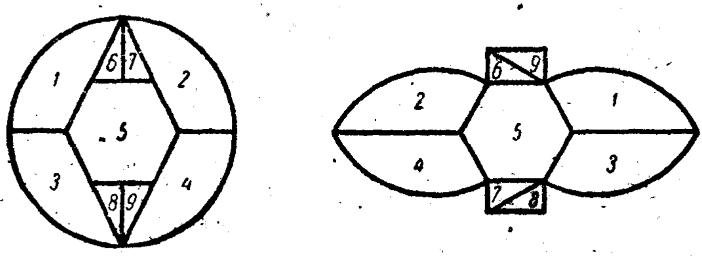


圖 5

因此，任意两个組成相等的多角形大小相等。一个相反的問題自然而然地会提出来：任意两个面积相等的多角形是否組成相等呢？匈牙利数学家法尔卡士·波耶矣（1832年）和德国軍官中的数学爱好者盖尔文（1833 年）（几乎同时）給出了这个問題的肯定

---

① 曲綫圖形的面积度量問題（利用一个極限过程）归結到多角形的面积度量問題——只要回忆中学几何教程里的圓面积的計算，就証实了这句話。因此，限定只研究多角形的度量問題，却是我們研究面积度量的基本的和最原則的問題。第二章和这里一样，也只研究多面体的度量問題；曲面几何体的体积的計算問題就不研究。

回答。我們就來談談波耶矣—蓋尔文定理的証明吧。

2．**波耶矣—蓋尔文定理** 我們首先証明几个輔助定理。

引理 1 如果圖形 A 和圖形 B 組成相等，而圖形 B 和圖形 C 組成相等，則圖形 A 和圖形 C 也組成相等。

事实上，我們在圖形 B 上画一些直綫，把圖形 B 剖分成这样一些部分，由这些部分可以組成圖形 A（圖 6，a 中的实綫）。其次，我們在圖形 B 上又画一些直綫，把圖形 B 剖分成若干个部分，由这些部分可以构成圖形 C（圖 6，$б$ 中的实綫）。两次所画的直

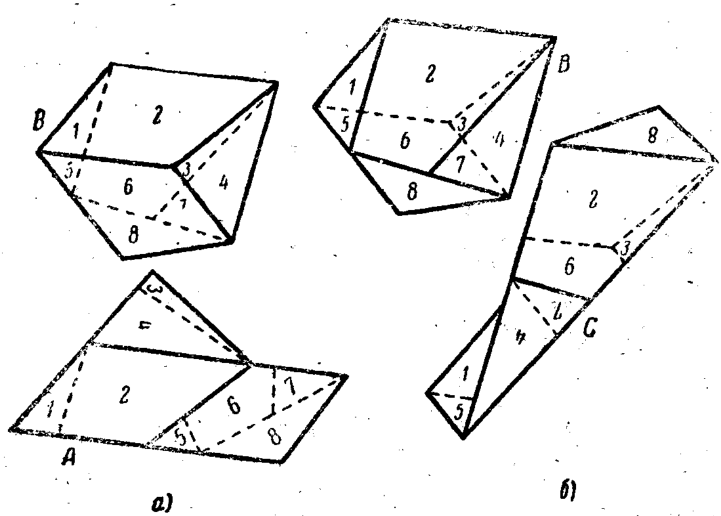


圖 6

綫合并起來把圖形 B 剖分成更小的部分，并且很明显，由这些更小的部分，可以构成圖形 A，也可以构成圖形 C。所以，圖形 A 和圖形 C 組成相等。

引理 2 任何三角形与一个矩形組成相等。

事实上，假設 AB 是 $\triangle ABC$ 的最長的一边（圖 7），CD 是 AB 边上的高。于是点 D 介于点 A 和点 B 之間（如果不然，$\angle A$ 或 $\angle B$ 是鈍角，AB 就不是最長的一边，参看圖 8）。通过高 CD 的中点作一条平行于 AB 的直綫，在这条直綫上作两条垂綫 AE 和 BF。于是我們得到一个和 $\triangle ABC$ 組成相等的矩形 $AEFB$。事实上，圖 7 里标記数碼 1 的两个三角形彼此相等（标記数碼 2 的两个三角形也彼此相等）。三角形 ABC 和矩形 $AEFB$ 都是由圖 7 里一个带有斜紋的梯形以及两个三角形 1 和 2 所构成。

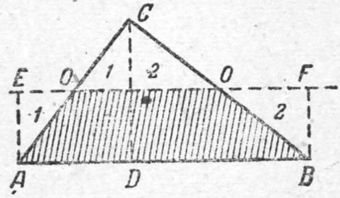


圖 7

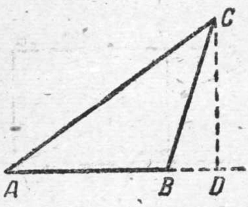


圖 8

引理 3 共有底边而面积相等的两个平行四边形組成相等。

假設 $ABCD$ 和 $ABEF$ 是共有一条底边 AB 而面积相等的两个平行四边形。于是这两个平行四边形的高相等，就是綫段 DC 和綫段 FE 在一条直綫上。在 AB 的延長綫上順次截取一些与綫段 AB 相等的綫段，通过每个分点作平行于 AD 和 AF 的直綫。于是在两条平行直綫 AB 和 DE 之間的一条長带划成許多个多角形(圖 9)。在平移一段距离 AB 以后，这些多角形中的每一个和与它相等的另一个重合。(証明！)圖 9 里各个相等的多角形用相同的数碼标記。其次指出，这两个平行四边形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 都含有一个标記数碼 1 的部分，一个标記数碼 2 的部分，一个标記数碼 3 的部分，等等。所以，这两个平行四边形組成

相等。①

引理 4　面积相等的两个矩形組成相等。

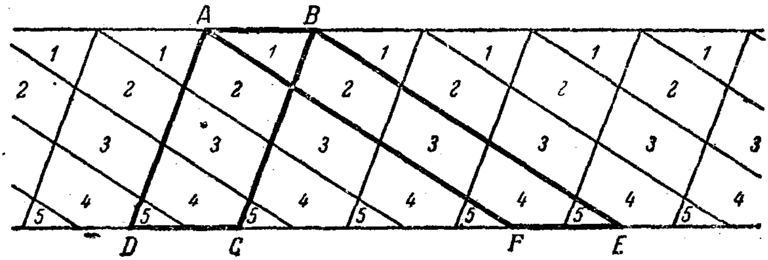


圖 9

假設 $ABCD$ 和 $EFGH$ 是面积相等的两个矩形(圖 10)。从四条綫段 AB、BC、EF、FG 中选出最長的一条——假設它是綫段

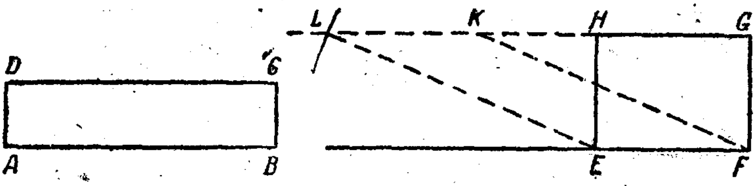
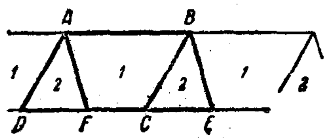


圖 10

AB。現在从点 H 开始把綫段 HG 延長，从点 E 用等于 AB 長的半徑在 HG 的延長綫上画一个弧（因为 $AB \geqslant EH$，所以圓心

---

① 如果圖 9 所表示的兩个平行四边形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 是这样的，兩条边 AF 和 BC 不相交，則圖9 成为附圖的形式，只要在平行四边形 $ABCD$ 內截出一个三角形，使截得的兩部分可以構成平行四边形 $ABEF$（参看第 2 頁的脚註）。



在点 E 、半徑等于 AB 之長的圓周能和 HG 的延長綫相交)。用 L 表示得到的一个交点，則有 $AB=EL$, 又截取綫段 $LK=EF$，我們作成一个平行四边形 $EFKL$ 。这个平行四边形与矩形 $EFGH$ 大小相等(与矩形 $ABCD$ 大小相等)。根据引理 3 推出，具有一条公共底边 EF 的两个平行四边形 $EFGH$ 和 $EFKL$ 組成相等。但是平行四边形 $ABCD$ 和 $EFKL$ 也有相等的边 $AB=EL$。因此(根据引理 3)它們組成相等。最后，因为平行四边形 $EFKL$ 和两个矩形 $ABCD$ 及 $EFGH$ 中的每一个組成相等，所以(引理 1)这两个矩形組成相等。

引理 5　任何多角形与一个矩形組成相等。

任何多角形(不論是凸的或凹的)可以剖分成有限个三角形。用数碼 1 、2 、3 、……来表示这些三角形(圖11)。其次，我們选定任意一条綫段 AB，在綫段 AB 的两个端点上作两条垂綫 AC 和 BD (圖 12)。我們作出与 AB 平行的一条綫段 A_1B_1，使矩

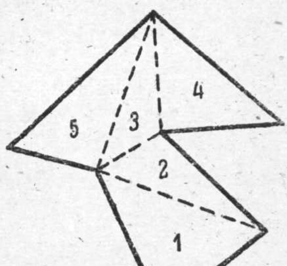


圖 11

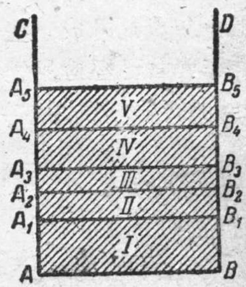


圖 12

形 ABB_1A_1 的面积等于三角形 1 的面积。那末三角形 1 与矩形 ABB_1A_1 (标記数碼 I) 組成相等。事实上，三角形 1 与一个矩形組成相等(引理 2)，而这个矩形也和具有同样面积的矩形 I 組

成相等(引理4)；因此三角形1和矩形Ⅰ組成相等(引理1)。隨后，我們又作出与綫段 AB 平行的一条綫段 A_2B_2，使标記数碼Ⅱ的矩形 $A_1B_1B_2A_2$ 与三角形2大小相等。則三角形2和矩形Ⅱ組成相等。往后我們还作出与三角形3組成相等的矩形Ⅲ，就照这样作下去。所作的这些矩形Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、…… 共同构成一个矩形(圖12的斜紋矩形)。根据作圖，这个矩形与原来的多角形組成相等。

現在有了这些引理，就不难証明波耶夹一盖尔文定理。

波耶夹一盖尔文定理 面积相等的两个多角形組成相等。

証明 根据引理5，两个多角形中的每一个和一个矩形組成相等。因而得到两个面积相等的矩形，因此它們組成相等(引理4)。所以最初的两个多角形組成相等(引理1)。

註 波耶夹一盖尔文定理中的“多角形”，并沒有必要理解为由一条封閉折綫圍成的平面的一部分。而这个定理，对于由若干条封閉折綫圍成的更复杂的圖形，仍然正确(如圖13所表示的圖形)。其实，把多角形剖分成一些三角形的可能性是“多角形”的單一性質，我們在前面已經应用过这种性質(参看引理5的証明)。然而用若干条封閉折綫圍成的每一个圖形，都具有这种性質(圖13)。

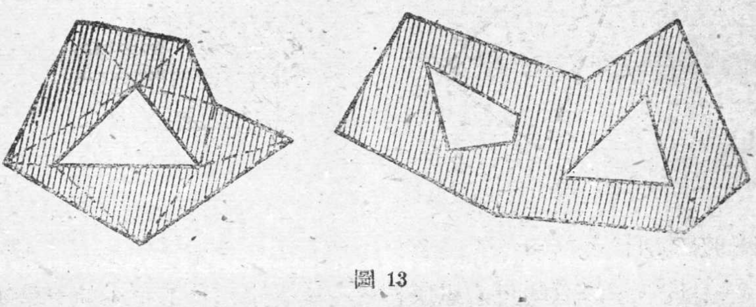


圖 13

3. 拼补法 常常用計算面积的另一种方法来代替剖分法，这

另一种方法在某种意义上来說，和剖分法相反。这个方法叫做拼补法，我們現在就来研究它。現在我們不設法去剖分两个圖形成相等的部分，而却用一些相等的部分来拼补这两个圖形，务必使得如此拼成的两个圖形相等。我們再来考慮圖1所表現的两个圖形。它們的面积相等(因为它們組成相等)。但是这两个圖形的面积相等，可以用另外的方法来証明(圖14)：用四个相等的三角形来拼补

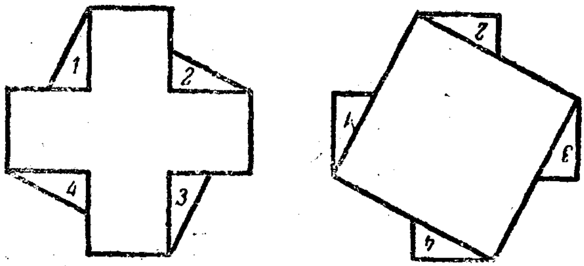


圖14

十字形和正方形，結果得到同一个圖形。由此可見，最初的两个圖形(十字形和正方形)大小相等。

对于初等几何定理的証明，拼补法是有成效的。例如，为了証明一个平行四边形和一个矩形如果等底等高則它們大小相等，这一个定理，只要把它們变成圖15的形状就成。从圖15看出，平行四边形和矩形可以用同样的三角形拼补成同样的梯形。所以平行四边形和矩形大小相等①。

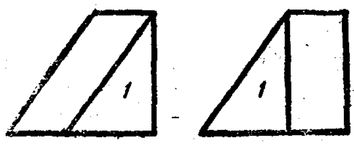


圖15

用这个方法容易証明畢达哥拉斯定理。假設 ABC 是一个直角三角形。为了証明在斜边上作出的正方形 I 的面积等于在两条

① 計算平行四边形的面积的这种方法，比較平常用的方法(圖2)好。事实上，圖15所表現的方法采用起来，永远比圖2所表現的方法优越(参看第2頁的脚註)。

直角边上作出的正方形Ⅱ和Ⅲ的面积之和(圖16)，这一事实，只要用圖17的方法就行。圖17表明，正方形Ⅱ和Ⅲ可以用等于$\triangle ABC$的四个三角形拼补成一个正方形；正方形Ⅰ也可以用同样的四个三角形拼补成一个正方形，这两个拼补而成的正方形完全

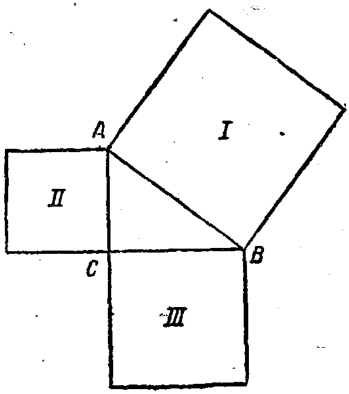


圖 16

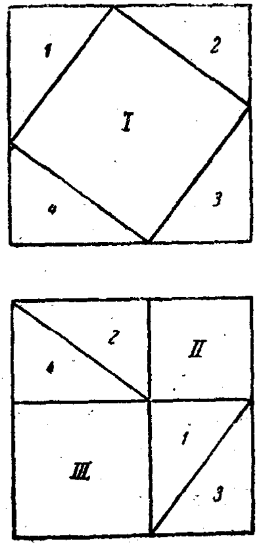


圖 17

是一样的，这个正方形的一边等于直角三角形 ABC 的两条直角边之和。这就証明了畢达哥拉斯定理。为了与此比較，我們也画出了用剖分法来証明畢达哥拉斯定理的圖①(圖18)。

我們規定，如果两个圖形都添补几个同样的多角形，可以得到两个同样的圖形，那末我們就可以說，两个原設的圖形拼补相等。

---

① 这个圖从 Л. О. 士克李耶尔斯基等著的書中緒言里的引証，移用过来。