新编
高中数学专题教学

主编　翟连林　朱绪鹏

北京理工大学出版社

新编高中数学专题教学

主　编　程连林　朱绪鹏

副主编　刘德存　邱景若　陈东军

徐鼎新　张中立　石盛山

[illegible]氏笔划[illegible]

王田虎　[illegible]　[illegible]生　申[illegible]　刘[illegible]　刘相宁

吕世敦　李[illegible]　李家莹　李素寅　李福[illegible]　张文军

张玉玺　连瑞成　陈才富　杨贵武　汪国栋　严定刚

房贤圣　周承欢　周乃安　周荣铨　周建中　钟伟明

徐国清　梅其新　黄继川　童柏军　彭万宝　雷和平

曹宪波　熊跃利

北京理工大学出版社

（京）新登字149号

内 容 简 介

本书根据国家教委制定的全日制中学《数学教学大纲》及国家教委考试中心颁布的普通高校招生全国统一考试《数学科说明》，由全国八省市部分特、高级等优秀教师执笔，将高中数学知识归纳为32个专题，每专题由考试要求、例题分析与讲解及练习题三部分组成。全书复盖高中数学的每一个知识点，选材新颖灵活，以提高素质为宗旨，围绕方法与能力这一主线举例分析，综合性强，每道例题、习题（含选择、填空）均复盖高中数学知识点三个以上。

本书可作为高中数学专题教学教材及中学数学教师的参考书。

新编高中数学专题教学
翟连林　朱绪鹏　主编
•
北京理工大学出版社出版
（北京海淀区白石桥路7号）
新华书店北京发行所经销
涞水东风印刷厂印刷
•
787×1092　1/32　印张10.75　字数 237千字
1993年1月第1版　1993年第1次印刷
印数1—7000册
ISBN7-81013-674-7/G·165
定价：5.00元

前　言

归纳知识，掌握方法，提高能力是中学生素质教育的具体指标之一．为帮助广大高中学生清理数学知识脉络，沟通各章节知识的纵横联系，也为减轻高中数学教师选材的疾苦．我们组织了全国八省市部分特、高级等优秀教师，将自己多年的教学经验提炼整理，以32个专题的篇幅归纳高中数学的各种思维方法．每专题配有练习题，用以深化、巩固该专题应掌握的方法与能力．该书选材典型灵活，对启迪思维，提高素质将有事半功倍的作用．

本书作者是（排名不分先后）

周荣铨（福建永安市一中）　钟伟明（上海莘庄中学）
李志伟（湖南长郡中学）　刘德存（郑州市十九中）
周乃安（湖南临澧教研室）　黄继川（湖南长郡中学）
李素寅（郑州外语学校）　曹宪波（湖南娄底一中）
吕世敦（山东临朐一中）　李家莹（河南舞钢市一高中）
周承欢（贵州瓮安一中）　史新房（山东青州市八中）
张玉玺（河北晋州市一中）　童柏军（湖南常德市七中）
李福田（山东临朐一中）　王田虎（安徽枞阳长凤中学）
刘相宁（山东青州市五中）　房贤圣（山东青州市八中）
杨贵武（湖南永州市一中）　徐国清（湖南汉寿二中）
雷和平（湖南汉寿二中）　彭万宝（湖南常德农校）
连瑞成（山东临朐一中）　严定刚（湖南常德鼎城一中）
张文军（山东青州市一中）　申俭生（湖南永州市三中）
梅其新（湖南石门一中）　汪国栋（湖南常德市六中）
陈才富（湖南常德市二中）　徐鼎新（湖南常德市一中）

张中立(湖南常德市一中)　熊跃利(湖南常德市一中)

周建中(湖南常德市一中)　陈东军(河北晋州一中)

申时阳(贵州六盘水市水钢高中)

朱绪鹏(湖南常德市一中)　石盛山(山东青州八中)

由于编者水平有限，加之时间仓促，错误难免，敬请各位读者指正.

编　者　1992年12月

目　录

一、集合与映射的综合问题

考试要求：理解集合、子集、交集、并集、补集等概念，掌握其运算，了解映射的概念，加深对函数有关概念的理解.

集合是数学的基本概念之一，集合与映射的概念已渗透到代数、几何的各个领域，本节着重解决它们的综合运用.

例1 设$M=\{x|x^2+4x+3<0\}$，$N=\{x|1<x+k<5\}$.

(1)当$M\subset N$时，求k的取值范围；

(2)当$M\cap N\neq\varnothing$时，求k的取值范围.

分析：先求出集合M、N，再利用集合间的关系求出k的范围.

【解】 由$x^2+4x+3<0$，知 $-3<x<-1$，

$\therefore$ $M=\{x|-3<x<-1\}$.

同理 $N=\{x|1-k<x<5-k\}$.

(1)当$M\subset N$时，$\begin{cases}1-k\leqslant -3\\5-k\geqslant -1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $4\leqslant k\leqslant 6$.

(2)当$M\cap N\neq\varnothing$时，有如下四种情况满足条件：

①$M\subset N$，由(1)知此时$4\leqslant k\leqslant 6$.

②集N的左端点$1-k\in(-3,-1)$，即$-3<1-k<-1$，

$\therefore$ $2<k<4$.

③集N的右端点$5-k\in(-3,-1)$，即$-3<5-k<-1$，

$\therefore$ $6<k<8$.

④ $N\subseteq M$时，即 $\begin{cases}1-k\geqslant -3\\5-k\leqslant -1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}k<4,\\k>6,\end{cases}$ $\therefore$ $k\in\varnothing$.

综上所述，满足$M\cap N\neq\varnothing$的k值的范围是$4\leqslant k\leqslant 6$或

$2<k<4$或$6<k<8$，即$2<k<8$. ∴ $k\in(2,8)$.

(2)另解，若$M\cap N=\varnothing$时，即$1-k\geqslant-1$或$5-k\leqslant-3$，∴$k\leqslant2$或$k\geqslant8$，即$k\in(-\infty,2]\cup[8,+\infty)$. 由于$M\cap N\neq\varnothing$为上述集合的补集，故所求的$k$的范围为$k\in(2,8)$.

例2 设集合$M=\{0,-1,1\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2\}$，从M到N的映射f满足条件：对于每一个$x\in M$，$x+f(x)$恒为奇数，问这样的映射共有多少个？

分析：这里要深刻理解"$x+f(x)$恒为奇数"的含意，即M中的任何元素与该元素在N中的象的和为奇数. 在这个条件下再去考虑能建立多少个映射.

【解】 由于建立映射必须满足对M中的每一个元素，在N中都有唯一的元素与之对应，于是我们分步去思考.

对于M中的元素0，要使得0与0的象之和为奇数，0的象只能从-1和1中选一与之对应，故有P_2^1种. 同理对于M中的元素-1，只能从-2、0、2中选一与之对应，有P_3^1种，对于M中的元素1，只能从0、-2、2中选一与之对应，有P_3^1种. 而要建立映射，必须M中每个元素都有唯一的象，∴ 应有$P_2^1\cdot P_3^1\cdot P_3^1=18$(个).

例3 设$A=\{x\mid x^3-7x^2+14x-8=0\}$，$B=\{x\mid x^3+2x^2-c^2x-2c^2=0\}$，其中$c\geqslant0$.

(1)求集合A、B的各元素；

(2)以集合$A\cup B$的任意两元素作为二次方程$x^2+mx+n=0$的两根，试在$f(x)=x^2+mx+n$的最小值中，求出它的最大和最小值.

分析：问题的落点是要求$f(x)=x^2+mx+n$最小值中的最大、最小值，显然$f(x)=x^2+mx+n$的最小值仍是m、n的函数，故应考虑m、n与方程两根的关系，自然追溯到$A\cup B$.

【解】（1）由 $x^3-7x^2+14x-8=0$，得 $(x-1)(x-2)(x-4)=0$，∴ $A=\{1, 2, 4\}$.

由 $x^3+2x^2-c^2x-2c^2=0 \Rightarrow (x+2)(x+c)(x-c)=0$，∴ $B=\{-2, c, -c\}$.

（2）若方程 $x^2+mx+n=0$ 的两根为 α，β. 则 $\alpha+\beta=-m$，$\alpha\beta=n$.

于是 $f(x)=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2-4n}{4}=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$.

记 $f(x)$ 的最小值为 s，则 $s=-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$. 显然 $s_{max}=0$，s 的最小值在 $|\alpha-\beta|$ 为最大时取得.

（i）当 $c\geqslant 4$ 时，则根 $-c$ 最小，c 最大，

∴ $s_{min}=-\frac{(c+c)^2}{4}=-c^2$.

（ii）当 $2\leqslant c<4$ 时，则根 $-c$ 最小，4最大，

∴ $s_{min}=-\frac{(4+c)^2}{4}$.

（iii）当 $0\leqslant c<2$ 时，根 -2 最小，4最大，

∴ $s_{min}=-\frac{(4+2)^2}{4}=-9$.

例4 已知 $A=\{1, 2, 3, m\}$，$B=\{4, 7, n^4, n^2+3n\}$，且 m、$n\in N$，$x\in A$，$y\in B$. $f: x\to y=3x+1$ 是从 A 到 B 的一个映射，求 m 和 n.

分析：此题关键是要弄清在 f 的作用下，A 中各元素在 B 中的象各是哪些.

【解】易知 $f(1)=4$，$f(2)=7$.

若 $\begin{cases} f(3)=n^4 \\ f(m)=n^2+3n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10=n^4, \\ 3m+1=n^2+3n, \end{cases}$ n 为无理数，

不合题意.

若$\begin{cases}f(3)=n^2+3n\\f(m)=n^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10=n^2+3n\\3m+1=n^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=2,\\m=5.\end{cases}$

例5 已知$A=\left\{(x,\ y)\,|\,4x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha\leqslant 8,\right.$ $\left.\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 18\}$, 求$A\subseteq B$时$\alpha$的取值范围.

分析: 先判断 A、B 表示的曲线的类型, 再根据 $A\subseteq B$ 求解.

【解】 A: $4x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha\leqslant 8$, 即

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sin\alpha}\right)^2}\leqslant 1.$$

$\because\ \ \alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\therefore\ \ \cos\alpha>0$, $\sin\alpha>0$.

显然, 集合A表示以原点为中心, 半长轴和半短轴随α变化的椭圆周界及其内部. 集合B是圆心在原点, 半径为$3\sqrt{2}$的圆的周界及内部.

由$A\subseteq B$, 则 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\leqslant 3\sqrt{2}\\\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\alpha}\leqslant 3\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{3}\leqslant\cos\alpha<1\\\dfrac{2}{3}\leqslant\sin\alpha<1\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}0<\alpha\leqslant\arccos\dfrac{1}{3}\\\arcsin\dfrac{2}{3}\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$\therefore\ \ \alpha$的范围是$\left[\arcsin\frac{2}{3},\ \arccos\frac{1}{3}\right]$.

例6 设$A=\left\{x \mid x=\frac{t+1}{t-1}\ t\in R,\ t\neq 1\right\}$，$B=\{x \mid x=t^2+t+1,\ t\in R\}$，求$A\cap B$.

分析：要求$A\cap B$，首先要弄清A、B的意义．由于A、B中的元素x都是实数t的函数，故问题转化为求二函数值域的交集．

【解】 $\because\quad \frac{t+1}{t-1}=1+\frac{2}{t-1}\neq 1$，$\therefore\quad A=\{x \mid x\neq 1,\ x\in R\}$.

由 $t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，则 $B=\left\{x \mid x\geqslant\frac{3}{4}\right\}$，

$\therefore\quad A\cap B=\left\{x \mid x\geqslant\frac{3}{4}，且x\neq 1\right\}$.

注：集合的运算关键是要理解题中集合的意义，为此应将集合的形式进一步明确化．

例7 设$A=\{x \mid |x^2-2x|\leqslant x\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, \left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}\right\}$，$C=\{x \mid ax^2+x+b<0\}$，若$(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=R$，试确定$a$、$b$之值．

分析：$(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=R$这两个条件隐含着什么必须弄清楚，为此先求$A\cup B$.

【解】 由已知，$A=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 3或\ x=0\}$，$B=\{x \mid 0\leqslant x<1\}$，

$\therefore\quad A\cup B=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$．$\because\quad (A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=R$，于是 $\overline{A\cup B}=C$，

$\therefore\quad \overline{A\cup B}=\{x \mid x<0或x>3\}=\{x \mid x(x-3)>0\}$.

又 $C=\{x \mid ax^2+x+b<0\}=\overline{A\cup B}$，$\therefore\quad ax^2+x+b=0$两根为3，0.

由韦达定理，得$3+0=-\frac{1}{a}$，$3\times0=\frac{b}{a}$知 $a=-\frac{1}{3}$，$b=0$.

例8 设自然数集合$N=\{1, 2, \cdots, n\}$，N的子集中含有4个元素的子集的个数记为m，如果这m个集合的所有元素之和是$\frac{1}{12}P_{100}^{5}$，求n的值.

分析：关键是求出m个集合的所有元素之和关于n的表达式.

【解】 设k是集合N中的任意一个元素，则在m个含有4个元素的子集中，有C_{n-1}^{3}个都含有k(可列举示意)，现求这些集合所有元素之和，进而发现$N=\{1, 2, \cdots, n\}$中每个元素在这些集合中都出现了C_{n-1}^{3}次，$\therefore$ $C_{n-1}^{3}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{12}P_{100}^{5}$，即$C_{n-1}^{3}\frac{(n+1)n}{2}=\frac{1}{12}P_{100}^{5}$，

就是$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}=\frac{100\cdot99\cdot98\cdot97\cdot96}{12}$.

因方程左右均为五个连续自然数的积，$\therefore$ $n=99$.

练 习 题 一

1．选择题

(1)设全集$I=\{(x, y)|x, y\in R\}$，集$A=\{(x, y)|\lg\frac{y-3}{x-2}=0\}$，集$B=\{x, y)|y\neq x+1\}$，则$\overline{A}\cup\overline{B}$是(　　).

(A)$\varnothing$；　(B)$\{(2, 3)\}$；　(C)$\{2, 3\}$；

(D)$\{(x, y)|y=x+1\}$.

(2)已知集合$M=\left\{x|x\in R, x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{k\pi}{4}, k\in Z\right\}$，$N=$

$\{y|y\in R\}$，集 M 里的元素按对应关系 f：$x\to y=\mathrm{tg}2x$ 和 N 里的元素相对应，则 N 里的元素3的原象是（　）．

(A) $\frac{1}{2}\mathrm{arc\ tg}3$；　(B) $k\pi+\frac{1}{2}\mathrm{arc\ tg}3(k\in Z)$；

(C) $\frac{1}{2}k\pi+\frac{1}{2}\mathrm{arc\ tg}3(k\in Z)$；(D)以上答案都不对．

（3）设 $A=\{(x,y)|y\geqslant x^2\}$，$B=\{(x,y)|x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$，则 $B\subset A$ 成立的充要条件是（　）．

(A) $a\geqslant\frac{5}{4}$；(B) $a=\frac{5}{4}$；(C) $a\geqslant 1$；(D) $0<a<1$．

2．填空题

（1）已知 $M=\{1, 2, (m^2-3m-1)+(m^2-5m-6)i\}$（$i$为虚数单位），$N=\{-1, 3\}$，$M\cap N=\{3\}$，则 m 的值是____．

（2）已知 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，则从 A 到 B 的映射共有____个．

（3）设 f：$x\to y=\sqrt{x}$ $(x\in A, y\in B)$ 是集 A 到集 B 的映射．当 $A=\{3x|0<x<5, x\in Z\}$，则集 B 中至少含有_个元素．

3．设 $A=\{x|x^2-kx+k^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_3(x^2-5x+15)=2\}$，$C=\{x|a^{x^2+2x-8}=1$，且 $a>0$，$a\neq 1\}$，满足 $A\cap B\supset\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 k 的值．

4．设 a、b 是两个实数，$A=\{(x, y)|x=n, y=na+b$，n是整数$\}$，$B=\{(x, y)|x=m, y=3m^2+15$，$m$是整数$\}$，$C=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xOy 内的点的集合，讨论是否存在 a 和 b 使得：（1）$A\cap B\neq\varnothing$（$\varnothing$表空集），（2）$(a, b)\in C$ 同时成立？

5．已知集合$A=\{(x, y)|x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x, y)|$
$\left.\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\right\}(a>0, b>0)$．若$A\cap B$是单元素集合，求：

（1）a与b的关系；　（2）ab的最小值。

二、函数的性质及其运用

考试要求：理解函数的单调性和奇偶性的概念，了解周期函数和最小正周期的意义，能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数的图象．

例1 判断函数$y=\frac{x-b}{x-a}(a>b)$的单调性．

分析1：在中学数学范围内单调性的判定方法只有定义，没讲判定定理．

【解法1】 定义域是$x\neq a$．设 $x_1<x_2<a$，则$x_1-a<0$，$x_2-a<0$，$x_2-x_1>0$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1-b}{x_1-a}-\frac{x_2-b}{x_2-a}=\frac{(a-b)(x_2-x_1)}{(x_1-a)(x_2-a)}>0．$$

即$f(x_1)>f(x_2)$，∴　y在$(-\infty, a)$上是减函数．

同法可得　y在$(a, +\infty)$上也是减函数．

分析2：除由定义判断外，还可使用复合函数的判别法．

【解法2】 $y=\frac{x-b}{x-a}=\frac{x-a+a-b}{x-a}=1+\frac{a-b}{x-a}$.

∵　$a>b$，则　$a-b>0$，又　$x-a$是增函数，

∴　$\frac{1}{x-a}$　在$(-\infty, a)\cup(a, +\infty)$上是减函数，于是

$\frac{a-b}{x-a}$在$(-\infty, a)\cup(a, +\infty)$上也是减函数．

从而$y=1+\dfrac{a-b}{x-a}$在$(-\infty, a)\cup(a, +\infty)$上也是减函数。

注：某函数在自变量不变时，函数值y都增加一常数，其增减性不改变.

例2 设$f(x)=\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)x$，求证$f(x)>0$.

分析：定义域是$x\neq 0$，很容联想需对$x>0$与$x<0$分别考虑．而$x>0$时，$f(x)>0$是显然的，进而设想，若能证出$f(x)$为偶函数，问题就解决了.

【证明】 ∵ $f(x)-f(-x)=\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)x-\left(\dfrac{1}{2^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)(-x)=\left(\dfrac{1}{2^x-1}-\dfrac{2^x}{2^x-1}+1\right)x=\left(\dfrac{1-2^x}{2^x-1}+1\right)x=0$,

∴ $f(x)=f(-x)$，即$f(x)$为偶函数.

又 $x>0$时，$f(x)>0$是显然的，所以$f(x)>0$.

注：本题证法简单，但此种思想值得借鉴.

例3 选择题

(1)已知$f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且$f(-2)=10$，则$f(2)$等于(　　)．(1990年全国高考文科题)

(A)-26；(B)-18；(C)-10；(D)10.

(2)若奇函数$f(x)$在区间$[3, 7]$上是增函数，且最小值为5，则$f(x)$在$[-7, -3]$上是(　　).

(A)增函数有最小值5；　(B)增函数有最大值-5；

(C)减函数有最小值-5；(D)减函数且最大值为-5.

【解】 (1)令$g(x)=x^5+ax^3+bx$，易知$g(x)$为奇函数，且$f(x)=g(x)-8$，$f(-2)=g(-2)-8=10$，则$g(-2)=18$，∴ $f(2)=g(2)-8=-g(-2)-8=-18-8$

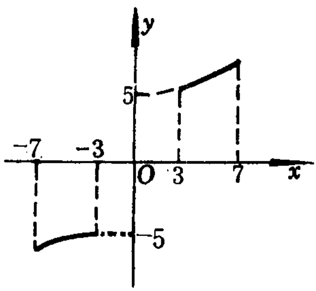

图2-1

$=-26$，故(A)正确．

(2)可画出$f(x)$在$[3, 7]$内的示意图(如图2-1)，再利用对称性画出$f(x)$在$[-7, -3]$上的示意图，图形展示(B)正确．

例4 确定函数$g(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$的奇偶性时，下列解法是否正确，说明理由．

$$\because\quad g(x)=\frac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$，从而$g(x)$为奇函数．

【解】 上述解的过程似乎天衣无缝，其实是错误的．

原函数表达式通过变形化简为$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$，有可能改变定义域，因此$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$就有可能与原函数不是同一个函数．实事上，原函数的定义域是$x\neq(2k+1)\pi$且$x\neq 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$的定义域是$x\neq 2k\pi+\pi(k\in Z)$．其实原函数的定义域不是关于原点的对称区间，$\therefore$ 原函数是非奇非偶的函数．由此可见，通过化简后的函数来考察原型函数的性质．只有当原型函数和化简后函数完全等价时才能有效．

例5 求函数$y=\sqrt{e^{-x^2}-\dfrac{1}{2}}$的值域．