SHUXUE

高等教育学历文凭考试全国统考

课程教材

高等数学

[2001年版]

教育部高等教育司 组编

中国财政经济出版社

013
1.2

10

高等教育学历文凭考试全国统考课程教材

教育部高等教育司组编
主编　韩云瑞
编著者　刘庆华　扈志明　李海中
主审　李心灿
审稿　刘德荫

高等教育学历文凭考试全国统考课程教材

高等数学

（2001年版）

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/韩云瑞主编．－3版－北京：中国财政经济出版社，1998.7

高等教育学历文凭考试全国统考课程教材

ISBN 7－5005－3881－2

Ⅰ．高…　Ⅱ．韩…　Ⅲ．高等数学－成人教育：高等教育－教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 17277 号

中国财政经济出版社出版

URL：http：//www．cfeph．com

E－mail：cfeph@drc.gov.cn

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036

发行电话：010－88190655（传真）　88190616

北京新华印刷厂印刷

850×1168 毫米　24 开　13.25 印张　228000 字

2001 年 8 月第 3 版　2001 年 8 月北京第 1 次印刷

印数：1—20 060　定价：18.00 元

ISBN 7－5005－3881－2/O·0006

前　　言

为了更好地贯彻落实《中国教育和发展纲要》的精神，做好高等教育学历文凭考试试点工作，原教育部成人教育司制订颁布了《高等教育学历文凭考试全国统考课程教学大纲》(以下简称《教学大纲》)。之后，又组织有关专家、教授编写了高等教育学历文凭考试全国统考课程《大学语文》、《高等数学》、《计算机基础》、《会计学基础》4 本教材。教材的使用对于贯彻《教学大纲》，规范学历文凭考试试点学校的人才培养，保证教育质量起到了重要的作用。

根据原教材实际使用情况，教育部高等教育司要求有关出版社依据《教学大纲》修订了教材，现推荐使用。请将使用教材的意见向我司和有关出版社反馈。

教育部高等教育司
一九九九年三月二十二日

编者的话

《高等数学》是参加学历文凭考试试点的民办高校工科类与经济类各专科专业的公共基础课，本书是教育部高等教育司与考试中心组织编写的国家学历文凭考试课程《高等数学》的教材。它完全按照《高等数学》课程的教学大纲进行编写，并参考了教育部考试中心制定的《高等数学》课程考试大纲的要求，适用于参加国家学历文凭考试试点的民办高校工科类与经济类各专科专业的《高等数学》课程教学。

本书包含了《高等数学》课程的教学大纲的全部内容。体现了各专科专业在一元微积分方面所必须具备的基本知识和基本能力的要求。根据民办高校培养应用性、技能型人才的培养目标，贯彻基础课程要宽口径和理论知识以够用为度的精神，本书的选材在符合科学性、系统性的基础上，恰当地把握了内容的广度和深度，努力使这部教材忠实地体现《高等数学》课程的教学大纲与考试大纲的要求。对于若干基本的数学概念，不追求完全形式化的严格叙述，而是尽可能地用通俗的语言和实际背景使学生理解其真正意义。对于一元微积分中的一些重要的定理和结论，虽然适当地给出了一些必要的证明，但是更加重视对于这些定理和结论的直观的解释，并且重视引导学生正确地运用基本概念与基本定理去分析解决实际问题。

本书在每一节都附有适量的练习，每章后还附有复习题。这些练习与习题覆盖了教学大纲的所有内容，并且体现了考试大纲对于能力方面的要求。不但能够帮助学生复习巩固所学的知识，而且也能很好

地满足国家学历文凭考试应考准备的需要。

本书由清华大学数学科学系韩云瑞主编，并与清华大学数学科学系的刘庆华、扈志明和李海中几位教授共同编写。北京市高校数学研究会理事长，原中国数学学会理事，北京航空航天大学李心灿教授担任主审。北京电视大学刘德荫教授也参加了审稿工作。现在，借本书改版的机会，由主编对全书进行了修订和补充。

自从本书第一版问世以来，编者收到了许多读者提出的非常有益的建议和批评，这些建议和批评在新版中大多被采纳。借此机会，编者向所有关心本书的读者表示衷心感谢。并希望大家对这部教材继续提出批评指正。

学历文凭考试是我国高等教育体制改革中出现的一个新事物，对于它的认识需要有一个过程，加之编者的水平有限，因此这部教材难免存在一些缺点与不足，恳请广大教师和同学批评指正。

2001 年 3 月

目录

CONTONES

第一章 函 数 …… 1
§1.1 实数 …… 1
一 集合 …… 1
二 实数 …… 3
三 实数的绝对值 …… 5
四 若干常见的实数集 …… 6
五 平面上的点 …… 8
六 平面上的直线 …… 10
七 邻域 …… 12
练习1.1 …… 12
§1.2 函数的定义与性质 …… 14
一 函数的概念 …… 14
二 函数的定义域与图形 …… 18
三 函数的一些重要属性 …… 18
四 反函数与复合函数 …… 23
练习1.2 …… 27
§1.3 初等函数 …… 31
一 常值函数 …… 31
二 幂函数 …… 32
三 指数函数 …… 34
四 对数函数 …… 38
五 三角函数 …… 40
六 反三角函数 …… 43

目　录

练习 1.3 …… 44
§1.4　非初等函数举例 …… 45
练习 1.4 …… 48
§1.5　建立函数关系 …… 48
练习 1.5 …… 52
复习题一 …… 52

第二章　极限与连续 …… 58
§2.1　从刘徽割圆谈起 …… 58
§2.2　数列极限 …… 60
练习 2.2 …… 64
§2.3　函数极限 …… 65
一　x 趋向于无穷大时的极限 …… 65
二　函数在一点的极限 …… 69
三　函数的左极限与右极限 …… 71
练习 2.3 …… 73
§2.4　极限的性质与运算法则 …… 74
一　变量的极限 …… 74
二　极限的性质 …… 76
三　极限的运算法则 …… 77
练习 2.4 …… 81
§2.5　两个重要极限 …… 82
一　极限存在的两个准则 …… 82
二　两个重要极限 …… 84
练习 2.5 …… 90
§2.6　无穷小量与无穷大量 …… 91

一　无穷小量 …… 91
二　无穷大量 …… 92
*三　无穷小量阶的比较 …… 93
练习 2.6 …… 94
§2.7　函数的连续性 …… 95
一　连续函数的概念与性质 …… 95
二　函数的间断点 …… 97
三　闭区间上连续函数的性质 …… 99
练习 2.7 …… 102
复习题二 …… 103

第三章　导数与微分 …… 109
§3.1　导数的概念 …… 109
一　引例 …… 109
二　导数的定义 …… 112
三　求导举例 …… 113
四　导数的几何意义 …… 115
五　可导与连续的关系 …… 117
六　左导数与右导数 …… 118
练习 3.1 …… 122
§3.2　求导法则 …… 123
一　导数的四则运算法则 …… 124
二　复合函数求导法则 …… 127
三　反函数求导法则 …… 130
四　基本求导公式 …… 131
练习 3.2 …… 133

目　录

§3.3　隐函数求导方法 …… 134
一　隐函数求导 …… 134
二　对数求导法 …… 137
练习 3.3 …… 138
§3.4　高阶导数 …… 139
一　高阶导数的概念 …… 139
二　一些函数的高阶导数 …… 140
练习 3.4 …… 142
§3.5　函数的微分 …… 143
一　微分的概念 …… 143
二　微分的几何意义 …… 145
三　微分用于近似计算 …… 146
四　微分的运算法则 …… 148
练习 3.5 …… 150
§3.6　补充例题 …… 150
复习题三 …… 157

第四章　中值定理与导数的应用 …… 162
§4.1　微分中值定理 …… 162
一　罗尔定理 …… 162
二　拉格朗日定理 …… 166
*三　哥西定理 …… 170
练习 4.1 …… 170
§4.2　罗比塔法则 …… 171
一　$\frac{0}{0}$型不定式 …… 172

二　$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式 …… 175
三　其他型式的不定式 …… 176
练习 4.2 …… 179
§4.3　函数单调性的判定 …… 181
练习 4.3 …… 184
§4.4　函数的极值 …… 185
一　极值的定义与必要条件 …… 185
二　极值的充分条件 …… 188
练习 4.4 …… 193
§4.5　函数的最大值与最小值 …… 194
一　函数在闭区间上的最大（小）值 …… 194
二　应用举例 …… 196
练习 4.5 …… 199
复习题四 …… 201

第五章　不定积分 …… 205
§5.1　不定积分的概念 …… 205
一　原函数 …… 205
二　不定积分 …… 207
三　不定积分的几何意义 …… 209
练习 5.1 …… 209
§5.2　不定积分的性质与基本积分公式 …… 210
一　不定积分的性质 …… 210
二　基本积分公式 …… 212
练习 5.2 …… 216

目　录

§5.3　换元积分法 …… 217
练习 5.3 …… 225
§5.4　分部积分法 …… 226
练习 5.4 …… 233
§5.5　积分表的使用 …… 233
复习题五 …… 237

第六章　定积分 …… 241
§6.1　定积分的概念 …… 241
一　实例分析 …… 241
二　定积分的定义 …… 244
三　定积分存在的必要条件与充分条件 …… 245
练习 6.1 …… 247
§6.2　定积分的性质 …… 247
练习 6.2 …… 251
§6.3　定积分的计算——牛顿—莱布尼兹公式 …… 251
一　变限定积分 …… 252
二　牛顿—莱布尼兹公式 …… 255
练习 6.3 …… 258
§6.4　定积分的换元积分法与分部积分法 …… 259
一　换元积分法 …… 260
二　分部积分法 …… 263
练习 6.4 …… 265
§6.5　定积分的应用 …… 267
一　平面图形的面积 …… 267
二　旋转体的体积 …… 273

三　定积分的其他应用举例 …… 275
练习 6.5 …… 279
§6.6　无穷区间上的广义积分 …… 280
练习 6.6 …… 283
复习题六 …… 283

附录 1　初等数学的一些重要公式 …… 290
一　因式分解公式 …… 290
二　一元二次方程 …… 290
三　二项式定理 …… 290
四　几个求和公式 …… 291
五　圆、球的有关公式 …… 291
六　三角函数公式 …… 291

附录 2　导数公式 …… 293

附录 3　简单积分表 …… 294

第一章　函　　数

函数是微积分学研究的主要对象.这一章的主要内容包括实数和函数两个部分.函数是微积分(高等数学)研究的主要对象,因此我们对于函数的概念和各种属性,初等函数和非初等函数都作了比较详尽而浅显的论述.在高等数学这门课程中,函数中的自变量和因变量都是实数,因此研究函数,包括函数定义和性质,特别是研究函数的变化趋势都涉及到实数集的性质.因此学习微积分必须掌握有关实数理论中那些最基本的内容.另外,本章还叙述了平面上的直线的方程式,因为微积分的抽象概念和原理需要用直观的几何图形加以解释和表现.直观的几何图形还可以作为辅助工具,帮助读者更好地分析解决实际问题.从某种意义上说,本章的内容可以认为是学习高等数学课程的必要的准备知识.

§1.1　实　　数

一　集　合

一个集合 S 是某些个体的总和,这些个体或者符合某种规定,或者具有某些可以识别的属性.集合 S 中的每一个体 a 称为 S 的元素,如果 a 是 S 的一个元素,记为 $a\in S$,读作"a 属于 S";如果 a 不是 S 的元素,则记为 $a\notin S$,读作"a 不属于 S".

一般情况下,集合有两种表示方法,这两种表示方法可以通过下面的例子来说明.

例 1.1.1　考察由下列元素

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

组成的集合 S，我们可以将其表示成

$$S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

这种表示集合的方法，即将集合 S 中的所有元素都列举出来，称为列举法.

集合 S 也可以用下面的方式表示：

$$S=\{n \mid n \text{ 是小于 10 的非负整数}\}$$

在这里我们用一个命题："n 是小于 10 的非负整数"来描述集合 S 中所有元素 n 的属性，这种表示集合的方法，称为描述法.

在数学中经常用描述法来表示一个集合，即用 $\{x \mid p(x)\}$ 表示所有满足命题 $p(x)$ 的实数 x 组成的集合. 例如 $\{x \mid x^2+1=2\}$ 表示所有满足等式 $x^2+1=2$ 的实数 x 构成的集合；$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 表示所有满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 构成的集合.

现在考察下面两个集合：

$$A=\{1,2\},B=\{1,2,3,4\}$$

可以看出，A 中的每一个元素都属于 B. 一般情形，如果集合 A 中的所有元素都属于集合 B，则称 A 包含于 B，并且记作 $A\subseteq B$. 例如

$$\{2\}\subseteq\{1,2\},\{3,5\}\subseteq\{1,2,3,4,5\},(0,1)\subseteq[0,1]$$

当 $A\subseteq B$ 时，称 A 是 B 的一个子集.

空集是不包含任何元素的集合，空集的记号是 $\varnothing$. 例如，在实数范围内，集合 $\{x \mid x^2+1=0\}$ 就是空集. 空集是任何一个集合 S 的子集.

设 A,B 是两个集合，由这两个集合中的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 和 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

例如，

$$\{1,2,3,4,5\} \cup \{1,3,5,7,9\} = \{1,2,3,4,5,7,9\}$$

$$\{1,2,3,4,5\} \cap \{1,3,5,7,9\} = \{1,3,5\}$$

二　实　数

高等数学这门课程主要是在实数范围内讨论问题，因此，需要对于实数和实数集有足够的认识．在这一节，我们对实数作简单的介绍．

数轴是研究实数的重要工具，有关实数的许多性质，都可以通过数轴直观地表现出来，因此，我们首先建立数轴的概念．

在一条直线上取定一点，记作 O，称其为原点；取直线的一个方向为正向，并用箭头表示；再取一个单位长度，就可以构成数轴．数轴上的任意一个点 P，都对应于一个实数 x，这个实数 x 是这样确定的：假定点 P 与原点 O 重合，则 $x=0$．假定点 P 不与原点 O 重合，首先用所取的单位长度量出线段 OP 的长度 $|OP|$．如果点 P 位于原点的右侧，则取 $x=|OP|$；如果点 P 位于原点的左侧，则取 $x=-|OP|$．反之，任给一个实数 x，都可以在数轴上找到一个点 P，使得点 P 所对应的实数为 x．这样一来，数轴上的点就与全体实数建立了一一对应的关系（图 1－1）．

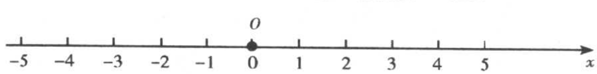

图 1－1

数轴也称为实数系的坐标系，数轴上与实数 x 对应的点 P 称为 x 的坐标．图 1－2 中标出了实数 $\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}$，$\sqrt{2}$，π，$-\pi$ 的坐标．

人们对于数的认识是逐步发展的，首先认识的是自然数 1，2，3，… 和整数 0，±1，±2，…然后是有理数，最后是无理数．

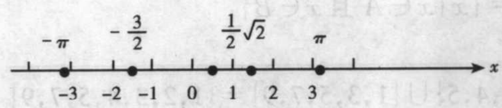

图 1 - 2

通常,用 N 表示所有自然数构成的集合;Z 表示全体整数组成的集合;Q 表示全体有理数组成的集合.在数轴上,与有理数对应的点称为有理点.

有理数集包括所有整数与分数 $\frac{p}{q}$(其中 p,q 为整数,$q\neq0$).在有理数集中定义了四则运算(除数不等于零),有理数集对于四则运算是封闭的.也就是说,对于有理数任意进行加、减、乘和除法运算(零不能作除数),得到的结果仍然是有理数.

此外,有理数集 Q 还有两个重要性质:一个是有序性,即有理数集 Q 是一个有序集,在数轴上,所有的有理点是按照从小到大的顺序自左至右排列的.有理数的另一个重要性质是它的稠密性,即任意两个有理数之间有无穷多个有理数,有理点在数轴上是处处稠密的,即任意一个非空的开区间内都有无穷多个有理点.

虽然有理点在数轴上是处处稠密的,但是它们不能充满整个实轴.例如,设边长为 1 的正方形的对角线长等于 a,则 $a^2=2$.以数轴上的原点为圆心、a 为半径作圆周,则圆周与实轴的交点就不是有理点(图 1 - 3).实际上,我们已经知道这个点是无理数$\sqrt{2}$.于是,在数轴上除了有理点之外还有许多空隙,这些空隙处的点称为无理点.无理点所代表的数称为无理数,所有无理数构成的集合称为无理数集.

每个有理数可以表示为一个有限小数,或者一个无限循环小数;每个无理数可以表示为一个无限不循环小数,但是经常用有限小数作为无理数的近似值,例如