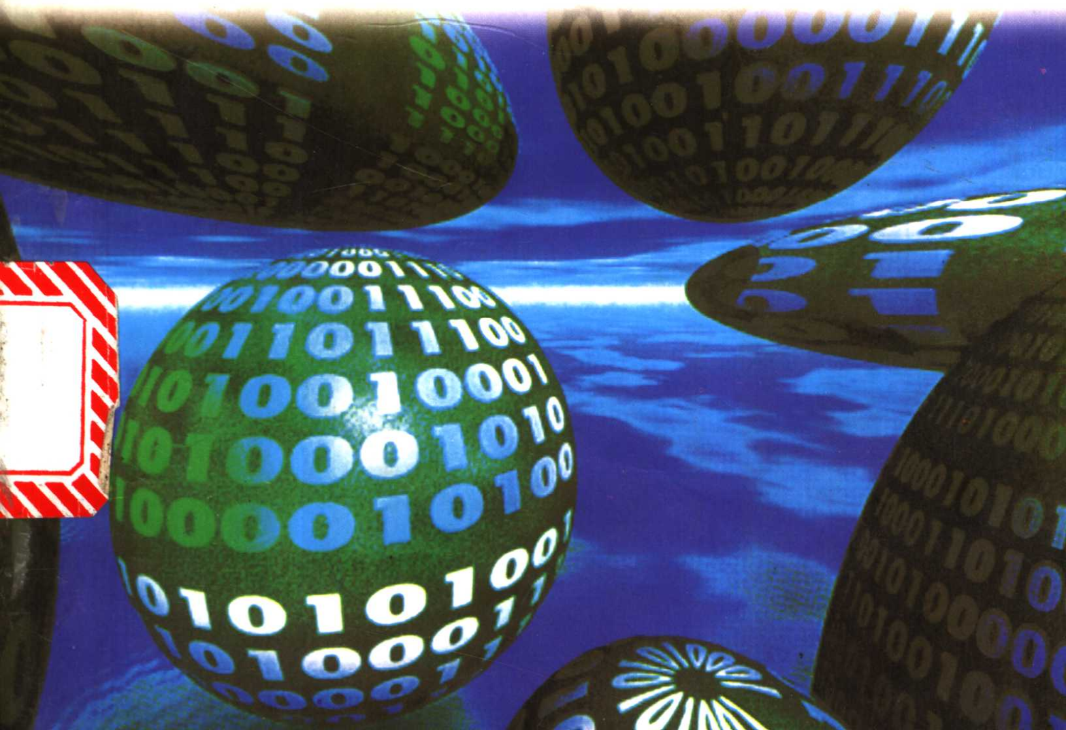
张志军　编著

数学分析中的一些新思想与新方法

兰州大学出版社



烟台大学博士基金资助课题
甘肃省自然科学基金资助课题

数学分析中的一些新思想与新方法

张志军　编著

兰州大学出版社

内容提要

本书从近年国内外大量的数学分析研究成果中，选取了其中一些基本而重要的问题进行讨论，其思想方法是初等的，且又发人深省。内容包括：欧拉常数与斯特林公式；微分学（包括多元函数极值的一阶偏导数判别准则，多变元情形下的洛尔定理及其应用）；连续函数的一个重要定理—Sarkovskii 定理（特例即为著名的周期 3 蕴含混沌）；积分学（包括几类特殊积分的计算）；不等式（包括 Hölder 不等式与 Minmowski 不等式）等。

本书可作为高等学校《高等数学》、数学系《数学分析》的选修课或教学参考书。

数学分析中的一些
新思想与新方法

张志军　编著

兰州大学出版社出版发行
兰州市天水路 308 号　电话：8617156　邮编：730000

兰州大学出版社激光照排中心排版
兰州人民印刷厂印刷
开本：850×1168 毫米 1/32　印张：5.5

1998 年 5 月第 1 版　1998 年 5 月第 1 次印刷
字数：133 千字　印数：1—1000 册

ISBN7－311－01336－4/O・133　定价：8.80 元

前　言

美国数学月刊(The American Mathematics Monthly)是国际数学方面影响广泛、读者最多的刊物，它的内容大致分为三部分。第一部分以初等的方法阐述数学发展中出现的新思想和新方法，文章多出自数学大师(如陈省身)之手；第二部分以新思想和新方法或新技巧解决和发展古典或近代数学问题；第三部分是数学竞赛或征求解答的问题，这些问题大都是数学工作者在各自研究领域中遇到的比较初等的问题。

我国的数学教材或教学参考书以及研究生入学试题、大学生数学竞赛题等都曾吸收了该刊的许多内容；另外，该刊的不少文章成为我国一些数学工作者研究课题的参考文献。这些极大地推动了我国的数学教学和研究，但另外一方面，据我们所查资料，从 80 年代开始到现在的 16 年，该刊的《数学分析》内容，在我国的数学分析教材中反应很少，为了更新教材，加快吸收、借鉴国际数学发展的新思想和新方法，我们从 1980 年至今这 16 年来该刊发表的数学分析文章中，经过反复推敲、修改和筛选，并结合我们自己的教学以及科研工作，编写了这本书，选题不求全面，但求方法新颖而富有启发性，突出新的数学思想。

我们深知，数学分析博大精深，且其一些分支的内容仍在深入研究和发展中，因此，要囊括它的全部成果是不可能的；同时，也不是一个人所能做到的，正是这点曾是我深深感到自己非常渺小，幸亏我的导师一兰州大学陈文嵘教授给予了热情指导和

鼓励：突出数学思想和方法，要少而精。本着这个原则，我又认真全面地查阅了一遍美国数学月刊；以及国内的《数学译林》、《数学通报》、《数学的实践与认识》，并从后者中选取了六篇文章。在此对陈文嵘教授、上述刊物和作者（译者）以及对烟台大学校领导、数学系领导、西北师范大学科研处领导的大力支持表示衷心的感谢！

本书的部分内容曾连续五年在西北师范大学数学系《数学分析选讲》课上进过。但由于作者水平所限，一些非常重要的内容未能编入，甚至书中一定有不少缺点，恳请读者批评指正。

张志军

1996.1 于西北师范大学数学系

1997.10 于烟台大学数学系

目 录

第一章　欧拉常数与斯特林公式

欧拉(Euler) 常数 γ($= 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606\ 51\cdots$) 同圆周率 π、自然对数的底 e 一样，是数学中的一个著名常数，它有多种定义方式(见文献[1 ～ 3])。本章我们按最初等的定义。而斯特林(Stirling) 公式是数学中的常用公式。因为在理论和实际应用中(如概率统计等) 常常需要估计当 n 充分大时，$n!$ 的无穷大的阶数。将两者放在一起，主要是因为证明欧拉常数的存在性和斯特林公式以及余项估计的一些方法是相同的。本章应用多种方法讨论它们。

第一节　欧拉常数

本节首先用初等方法证明欧拉常数的存在性，随后介绍 Detemple[4] 的一种快速收敛于欧拉常数的方法，最后讨论广义欧拉常数的存在性以及余项的估计问题。

1.1　通常的欧拉常数

通常的欧拉常数 γ 定义为

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} D_n = \gamma \tag{1}$$

其中，$D_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.
将 $\ln n$ 替换为 $\ln(n+a)$ 也成立，这里 a 为任一固定的实数。

现在用单调有界原理证明(1) 极限的存在性。其中有界性的证明方法是经常要用到的。

应用基本不等式

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \forall\, x > 0 \tag{2}$$

得

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

即 $\{D_n\}$ 严格单调递减。为证其有界，令

$$E_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

明显地，有 $E_n < D_n, n = 1, 2, \cdots$，并且由(2) 可知

$$E_{n+1} - E_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0$$

即 $\{E_n\}$ 严格单调递增。这样，我们得到了

$$0 < \ln\frac{e}{2}$$

$$= E_1 < E_2 < E_n < D_n < \cdots < D_2 < D_1 = 1$$

因此，由单调有界原理可知，$\{D_n\}$ 与 $\{E_n\}$ 都收敛于 $\gamma(\gamma \in (0, 1))$。

1.2 余项的估计

1983 年孙燮华[5](下节将介绍其方法) 首先给出一个十分基本的结果

$$\frac{1}{2(n+1)} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}, n = 1, 2, \cdots \quad (3)$$

1991 年 Young[6] 给出了另一种初等方法。这里，介绍 Detemple[4] 的初等面积比较方法。应用该方法不仅可得到(3)，而且还可得到一种快速收敛于欧拉常数的序列。

先证(3)

注意到

$$D_n - D_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}$$

因此，可令

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}, \forall\ x \geqslant 1$$

则

$$D_n - D_{n+1} = f(n),$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

应用基本不等式

$$x(x+1)^2 > \left(x + \frac{1}{2}\right)^3, \forall\ x \geqslant 1$$

即得：对任意的 $x \geqslant 1$ 成立

$$\frac{1}{(x+1)^3} < -f'(x) < \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^3} \quad (4)$$

于是，有

$$\frac{1}{2(k+1)^2} = \int_k^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx < -\int_k^{+\infty} f'(x) dx$$

$$= f(k) < \int_k^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^3} dx = \frac{1}{2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}$$

这里的面积比较法如图 1 所示

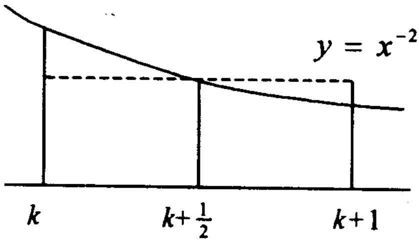


图 1

再结合$(k+\frac{1}{2})^2>k(k+1),k=1,2,3,\cdots$可得

$$D_n-\gamma=\sum_{k=n}^{\infty}(D_k-D_{k+1})=\sum_{k=n}^{\infty}f(k)$$
$$<\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2(k+\frac{1}{2})^2}<\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n}$$

并且

$$D_n-\gamma>\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2(k+1)^2}>\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_{n+1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2(n+1)}$$

至此(3)获证。

为了得到一个快速收敛于γ的序列，令

$$R_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+c)$$

其中，c为待定常数。

由于

$$R_n-R_{n+1}=\ln(n+1+c)-\ln(n+c)-\frac{1}{n+1}$$

同(3) 的证明相同，令

$$g(x)=\ln(x+1+c)-\ln(x+c)-\frac{1}{x+1},$$
$$\forall\, x>\max\{0,-c\}$$

则

$$R_n-R_{(n+1)}=g(n),$$

$$g'(x)=\frac{1}{x+1+c}-\frac{1}{x+c}+\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=-\frac{(2c-1)x+c^2+c-1}{(x+c+1)(x+c)(x+1)^2}$$

由(3) 的证明过程可以看出，为使 R_n 更快速收敛于 γ，必须使 $g'(x)$ 在无穷远处趋于零的速度更快。为此，只有取 $c=\frac{1}{2}$ 才能使 $g'(x)$ 在无穷远处与 $\frac{1}{x^3}$ 同阶。否则，当 $c\neq\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)$ 在无穷远处与 $\frac{1}{x^3}$ 同阶。因此，取 $c=\frac{1}{2}$，即

$$R_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+\frac{1}{2}),$$

$$g(x)=\ln(x+\frac{3}{2})-\ln(x+\frac{1}{2})-\frac{1}{x+1},x\geqslant 1,$$

$$g'(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-2}(x+\frac{1}{2})^{-1}(x+\frac{3}{2})^{-1},x\geqslant 1。$$

余下的完全同(3) 的证明。

由于

$$k(k+1)<(k+\frac{1}{2})^2$$

$$(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})=x^2+2x+\frac{3}{4}<(x+1)^2,\forall\, x\in R$$

得

$$(k+\frac{1}{2})^{-3}=\frac{2k+1}{2(k+\frac{1}{2})^4}<\frac{2k+1}{2[k(k+1)]^2}$$

$$= \int_k^{k+1} x^{-3} \mathrm{d}x \quad (\text{如图 2 的面积比较法}),$$

$$\frac{1}{4}(x+1)^{-4} < -g'(x) < \frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})^{-4}, \forall\ x \geqslant 1$$

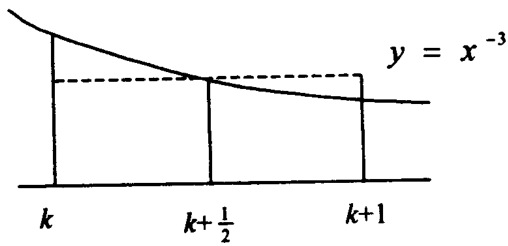


图 2

因此，有

$$R_n - \gamma < \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{\infty}(x+\frac{1}{2})^{-4}dx = \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}(k+\frac{1}{2})^{-3}$$

$$< \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1} x^{-3}dx = \frac{1}{24n^2}$$

同样，可得

$$R_n - \gamma > \frac{1}{24(n+1)^2}$$

总之有

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < R_n - \gamma < \frac{1}{24n^2} \tag{4}$$

注 1 (3) 可改进到(参见[8])

$$\frac{1}{2n+\frac{2}{5}} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n+\frac{1}{3}}$$

注 2 若令

$$r_n = R_n - \gamma - \frac{1}{24(n+\frac{1}{2})^2}$$

则同样的方法可将(4)的估计提高到

$$\frac{1}{960(n+1)^4} < r_n < \frac{1}{960n^4}$$

进一步的讨论可参见[8]。

注 3 包那[3]将(3)精确到

$$D_n - \gamma = \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O(\frac{1}{n^6})$$

随后，张南岳[16]与吴福朝[17]应用 Euler – Maclaurin 公式和 Bernoulli 数分别精确到

$$D_n - \gamma = \sum_{k+1}^{q} \frac{B_k}{kn^k} + O(\frac{1}{n^q}),$$

$$D_n - \gamma = \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{q} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + O(\frac{1}{n^{2(q+1)}})。$$

其中，B_k 为 Bernoulli 数。

1.3 广义欧拉常数以及余项的估计

考虑广义欧拉常数问题

设 $f:[1,\infty) \to (0,\infty)$ 为严格单调递减函数，定义

$$\gamma_f = \lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x] \tag{5}$$

γ_f 称为广义欧拉常数(若其存在)。特别，当 $f(x) = x^{-1}$ 时，γ_f 即为通常的欧拉常数 γ。先证 γ_f 存在，随后给出余项的估计。同(1)的证明一样，仍用单调有界原理。为此，令

$$B_n = [\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x] \tag{6}$$

$$C_n = [\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x] \tag{7}$$

明显地，$B_n > C_n$。另外注意到

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x < f(k)$$

因此，得到

$$C_n = [\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x] > 0,$$

$$B_{n+1} - B_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < 0,$$

$$C_{n+1} - C_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)\mathrm{d}x > 0,$$

即

$$0 < f(1) - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = C_1 < C_2 < \cdots < C_n$$
$$< B_n < \cdots < B_2 < B_1 = f(1)$$

由单调有界原理可知，$\{B_n\}$ 收敛，即 γ_f 存在。为使 $\{C_n\}$ 亦收敛于 γ_f 和估计余项的需要，我们假定

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

即

$$0 < B_n - \gamma_f < B_n - C_n = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \tag{8}$$

特别。若 $f(x) = x^{-1}$，则

$$0 < B_n - \gamma = D_n - \gamma < \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \ln(1+\frac{1}{n}) \tag{9}$$

显然，(9) 式要比(3) 式差。

为得到较精细的估计，还需附加一定的条件。下面几节中我们将继续讨论这个问题。现在介绍孙燮华的文章[5]。

设

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a^2 + \cdots + a_k + \tag{10}$$

是一正项级数，可以收敛，也可以发散。称

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

为级数(10) 的部分和，又假定

$$a_k = f(k), (k = 1,2,\cdots)$$

这里 $f(x)$ 是在$[1,\infty)$ 上定义的正值连续函数，用

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t \quad (x \geqslant 1)$$

表示 $f(x)$ 的一个原函数.

我们证明如下的

定理 1 假定函数 $f(x)$ 是区间$[1,\infty)$ 上的正值连续函数且单调递减，$a_n = f(n) \to 0 (n \to \infty)$，那末，存在常数 c 使得级数(10) 的部分和 S_n 满足

$$S_n = c + F(n) + \theta_n a_n \tag{11}$$

这里 $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$

由(11) 立即得到部分和 S_n 的估计式：

$$|S_n - c - F(n)| \leqslant a_n$$

证明 因为 $f(x)$ 是连续的，所以

$$F'(x) = \left(\int_1^x f(t)dt\right)' = f(x), \ (x \geqslant 1)$$

利用微分中值定理，并注意函数 $f(x)$ 的单调递减性，我们有

$$\begin{aligned} F(k+1) - F(k) &= F'(k+\theta') = f(k+\theta') \\ &\leqslant f(k), (0 < \theta' < 1) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} F(k) - F(k-1) &= F'(k-\theta'') = f(k-\theta'') \\ &\geqslant f(k), (0 < \theta'' < 1) \end{aligned} \tag{13}$$

由(12) 和(13) 得

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant f(k) - [F(k+1) - F(k)] \\ &\leqslant [F(k) - F(k-1)] - [F(k+1) - F(k)] \end{aligned} \tag{14}$$

对于(14) 式的右边，令 $k = 2,3,\cdots,n$，然后相加得

$$\sum_{k=2}^{n}\{[F(k)-F(k-1)]-[F(k+1)-F(k)]\}$$
$$=F(n)-F(n+1)+F(2) \tag{15}$$

在(12)中，令 $k=n$，我们有

$$|F(n)-F(n+1)|=f(n+\theta)\leqslant f(n)=a_n\to 0$$
$$(n\to\infty),(0<\theta<1) \tag{16}$$

于是，由(14)和(15)推得正项级数

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{[F(k)-F(k-1)]-[F(k+1)-F(k)]\}$$

收敛。由(14)和正项级数的比较判别法知道，存在常数 c，使得

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-[F(k+1)-F(k)]\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f(k)-F(n+1)\to c(n\to\infty) \tag{17}$$

记

$$r_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-F(n)-c=S_n-F(n)-c \tag{18}$$

由(17)和(18)得

$$r_n\to 0(n\to\infty)$$

这样(18)可以写成

$$S_n=c+F(n)+r_n,r_n\to 0(n\to\infty) \tag{19}$$

下面进一步估计 r_n 的阶，记

$$\triangle_k=f(k)-\int_k^{k+1}f(t)\mathrm{d}t,(k=1,2,\cdots)$$

则由 $f(x)$ 的单调性得

$$0=f(k)-f(k)\leqslant\triangle_k\leqslant f(k)-f(k+1) \tag{20}$$

考虑

$$S_n-F(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(t)\mathrm{d}t$$

$$= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} [f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t]$$

$$= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \triangle_k \tag{21}$$

由(19) 和 $f(n) \to 0(n \to \infty)$，从上式推得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \triangle_k = c \tag{22}$$

(21) 式减(22) 式得到

$$r_n = S_n - F(n) - c = f(n) - \sum_{k=n}^{\infty} \triangle_k \tag{23}$$

由(21) 得

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \triangle_k \leqslant f(n) \tag{24}$$

最后，由(23) 和(24) 得到

$$0 \leqslant r_n \leqslant f(n) = a_n$$

记

$$\theta_n = \frac{r_n}{a_n}$$

则 $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$，由上式和(19) 得到(11) 式，定理证毕。

为了对公式(11) 的余项作出更为精确的估计，我们需要应用凸函数的一些性质。

凸函数具有如下的性质：

1° 凸函数的图形(弧) 上所有的点都在相应弦的下面，或位于弦上。

2° 假定函数 $f(x)$ 和它的导数 $f'(x)$ 在区间 $\mathscr{X}$ 内有定义且连续，而且 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 的内部存在二阶导数。要使 $f(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 内的凸函数，必要而且充分条件是在 $\mathscr{X}$ 的内部恒成立

$$f''(x) \geqslant 0(\text{或 } f''(x) \leqslant 0)。$$

3° 假定函数 $f(x)$ 在区间 $\mathscr{X}$ 内有定义而且可导。要使函数