

# 数学发现的艺术

数学探索中的合情推理

杨世明 王雪芹 著

青岛海洋大学出版社

# 数学发现的艺术

——数学探索中的合情推理

杨世明 王雪琴 著

青岛海洋大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

数学发现的艺术:数学探索中的合情推理/杨世明,王雪芹  
著. —青岛:青岛海洋大学出版社,1998.8

ISBN 7-81026-924-0

I. 数… II. ①杨… ②王… III. 数学-归纳推理 IV. O  
1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 16590 号

\*

青岛海洋大学出版社出版发行

青岛市鱼山路5号

邮政编码 266003

新华书店经销

济南新华印刷厂印刷

\*

1998年8月第1版            1998年8月第1次印刷

开本 850×1168 1/32 印张 22.75 字数 511千

印数 1—4000

ISBN 7-81026-924-0

O·80 定价: 32.50 元

## 实践波利亚数学教育思想的结晶

——就本书的出版致作者<sup>①</sup>

(代序)

杨之先生：

您好！

当我看完最后一页清样时，心头有说不出的高兴。先生与雪琴老师的大作即将付梓，向您表示诚挚的祝贺！

只是先生执意要我写序的事，着实给我出了一道不小的难题，却之再三，迟迟不敢动笔。我有“三怕”：

一怕才疏识短，有损先生英名。在我国初等数学教育界，先生是一位名符其实的大家。您育才有方，桃李满天下，是全国著名的中学特级教师；您博学多才，著述颇丰，仅一部《初等数学研究的问题与课题》，就足以树起一座中国化的初等数学研究的丰碑；您深藏若虚，在同行中可谓口碑载道；您与挚友共同主持的“两会”<sup>(1)</sup>，在推动我国初等数学研究、深化数学教学

---

<sup>①</sup> 这是本书特邀编辑写给本书作者之一的一封信，权作序。标题为编者所加。

改革等方面，意义重大；您倡导的“MM 数学教育方式”<sup>(2)</sup>，深受广大中学数学教师欢迎，更为有识之士称道。

1996 年夏，在庐山召开的“全国初等数学研究及数学教学研讨会”上有幸与先生相识。您的朴实、豁达、敏捷、儒雅，给我留下了极深的印象。论学识，无愧吾师；论年龄，敬为兄长。这次大作出版，当请一位名家或前辈作序，方为常理。让一名普普通通的教师、编辑、读者作序，我自感底气不足，难以胜任。仅此，又一次令我体味到先生的大家风范。

二怕千系重大，误使大作减辉。本书是先生与雪琴老师数十年潜心研究、实践波利亚数学教育思想的结晶。她大气磅礴，兼容并包，融会众多中外数学名家、名篇之精华，耗去你们 8 年的心血而铸成；她结构严谨，论述细密，全面而系统地阐释了“合情推理”在数学研究、发现、解题过程中的意义和应用，是一部有较高学术价值的数学方法论专著；她深入浅出，文笔优美，学术性与通俗性完美地相结合，引导读者兴味昂然地走进一个个“数学发现”的乐园，春雨润物般地感悟到“数学”原来是这样被“发现”的，因而也是一部可读性很强的数学启蒙教科书。

我读先生的书稿，很像在欣赏一件精巧的艺术品，是一种难得的精神享受。但一想到写“序”，立又惶恐不安起来。“序言”是一本书映入读者眼帘的“第一道风景线”，是书与读者“对视”的“眼睛”。从这个意义上说，为书作序，犹如画龙点睛，在我看来，是件很神圣的事，惟恐不慎，使这件“数学教育精品”蒙受那怕丁点儿玷污。

三怕画蛇添足，令读者生厌。读者打开一本书，急切希望知道：这是一部怎样的书？主要内容是什么？作者为什么要写

这本书？它有什么特点？而所有这些读者关心的问题，先生都在《前言》、《后记》中条分缕析，讲得一清二楚了，我再絮絮不休，岂不大煞风景！

最后，我还有一句心里话。承蒙青岛海洋大学出版社的信任，聘我为此书的特邀编辑，使我有幸成为书稿的第一位读者。请先生以后不要再说谢我的话。作者，编者，读者，到底应该谁谢谁？作为一名从事数学教育工作的编辑，发现并尽力使一本好书早日与读者见面，是我的天职，也是一种幸福。相信众多从中受益的读者会和我一样，由衷地向您道一声：谢谢！

恭颂

春安！

贾庆祥<sup>(3)</sup>

1998年3月28于泉城

---

注：（1）指“全国初等数学研究学术交流会”和“全国波利亚数学教育思想研讨会”。

（2）见本书第十七章§5。

（3）本文作者系山东教育社副社长、副总编、编审。

## 前 言

这是一部什么书？

是一部用波利亚风格写成的数学方法论专著。它寓数学的思想方法于数学研究、发现、探索和解题之中，既是严肃的数学书、方法书，又是妙趣横生的科普作品；它运用从数学史、数学课本、众多数学家的著作和手稿里采集的丰富素材，归纳、研究合情推理方法，对在数学学习、解题、教学和研究中广泛应用的观察、实验、归纳、类比、联想、猜测、检验、推广、限定以及抽象、概括、演绎和证明等典型思维方法，进行了探讨。

全书共 17 章。除“正文”外，在“注释、问题与课题”中，一方面补述正文中的言犹未尽，提供相关历史知识和背景材料；另一方面则提供适于读者求解的问题和研究的课题，创造动手动脑的良机，使读者自己研究、学习，而不是作者赐予。

为什么要写这本书？其背景如何？

这要涉及到波利亚。波利亚 (G. po'lya, 1887.12 ~ 1985.9) 是美籍匈牙利数学家、教育家。一生致力于数学、数学方法论和数学教育的研究，在把数学方法论用于数学教育的

## · 数学发现的艺术——数学探索中的合情推理 ·

研究和实践中，成就非凡。其成果集中反映在《怎样解题》、《数学发现》、《数学与合情推理》（有一种中译本译作《数学与猜想》）这三部著作之中。这些著作早已风靡全球，并于80年代相继译介到我国。在知名数学家徐利治教授的大力倡导下，我国掀起了数学方法论和波利亚数学教育思想研究的热潮。

1989年在北京召开的“全国首届波利亚数学教育思想研讨会”，倡导“把数学方法论用于数学教学”。同年，无锡市教研中心的特级教师徐沥泉设计了“贯彻数学方法论的教育方式，全面提高学生素质”的数学教育实验（MM课题）。该实验的成功，证实了“MM教育方式”是一种以素质教育为目标，充分体现现代数学教育思想的数学教育方式。它高效低耗，具有可行性，深受广大师生的欢迎。我们有幸参加了MM教育方式实验研究和推广工作，深感数学方法论对数学教育工作者，特别是对跨世纪的数学教育工作者，具有十分重要的意义。

数学方法论的知识从哪里来？渠道很多，但最好是去读波利亚的著作。可是，他的三部著作的中文译本，印数有限，早已脱销，又难于再版。而且老实说，这些经典名著好是好，但《怎样解题》出版于40年代，《数学发现》二卷出版于1967年。试想三四十年前波利亚针对当时美国数学教育状况而写的东西，对于今天中国的数学教育，虽仍有重要参考价值，但毕竟已时日久远；当今世界特别是中国数学教育的巨大变化，无法在书中反映出来。再者，波利亚著作中使用的例子，多采自高等数学和外国数学史，中国五千年的数学成就和数学思想方法，在书中毫无反映，这自然不能责怪波利亚，但我们有责任改变这种状况。

凡此种种，促使我们动笔写这部书，一是为了作为“MM教



育方式”研究和应用的理论基础；二是为了帮助读者掌握对数学思维至关重要的合情推理；三是为了帮助跨世纪的数学教师做好“观念、知识和能力”三方面的更新。

本书是写给中小学数学教师，初中、高中学生和大学生（不限于数学系的），大专院校的教师和数学爱好者看的。为了读者鉴赏和研究的方便，我们采用了深入浅出的表达方法，尽量降低引用的数学内容的“高度”，使其尽可能限制在初等数学的范围之内，并特别从中小学教材中摘取了大量的例子。然而，本书是以研究数学中的“探索发现”为己任的，应用中小学数学那点“浅显”的知识，怎能担负“剖析数学发现的曲折过程”的重任？波利亚无奈，当年写他的三部曲的时候，除了初等数学之外，还选用了微积分、级数和数论中相当艰深的内容。我们则不然，虽历尽周折，仍坚持“降低高度”。令人欣喜的是，我们发现，在中小学数学这潭“浅水”中，并非无蛟龙，以初等数学为素材讲述数学发现，同样令人神往；讲数学思维，往往更加生动透彻。因为“通常”中的奇巧，“平凡”中的不凡，往往显示着数学的秀美，让人赏心悦目。当然，作为补充，我们采集了不少民间算题和数学名著中的精巧例证。引用了欧氏《原本》，我国的《周易》、《周髀算经》、《九章算术》以及刘徽、祖氏父子、杨辉、秦九韶、程大位、李冶、欧拉、希尔伯特、波利亚、华罗庚等数十位数学家的著作，引用了中国80年代以来初等数学研究的丰硕成果。事实表明，中国古今数学，在数学思想方法和数学方法论方面的“蕴藏量”也是极为丰富的。

杨世明 王雪琴

1997年9月于天津

# 目 录

第一章 归纳	(1)
§ 1 观察和归纳	(2)
§ 2 探索接触	(4)
§ 3 检验接触	(6)
§ 4 归纳的态度	(9)
§ 5 归纳的作用·归纳认识	(11)
§ 6 归纳的作用·归纳发现	(14)
注释、问题与课题	(17)
1. 多边形对角线的计数 2. 数表	
3. 数串(1) 4. 数串(2) 5. 式子串 6. 费马数	
7. 反面解决的得失 8. 最大边一定的整边三角形个数	
9. 归纳的哲学根据 10. 是与否 11. 经验和行为	
12. 专家戏语 13. 算律溯源 14. 素数筛选法	
15. 一个数阵 16. 哥德巴赫猜想研究历史概观	
17. 有利的征兆	
18. 引文	

**第二章 推广·限定·类比** ..... (30)

§ 1 一个例子..... (31)

§ 2 推广..... (31)

§ 3 限定..... (32)

§ 4 类比..... (32)

§ 5 推广、限定和类比..... (35)

§ 6 用类比来发现..... (38)

§ 7 类比和归纳..... (41)

注释、问题与课题 ..... (43)

1. 正规推广 2. 等边三角形定值

3. 方程 4. 关于勾股定理 5. 极特殊

的情况 6. 基本的特殊情况 7. 具有代

表性的特殊情况 8. 类似情况 9. 意义

重大的类比 10. 精确的类似 11. 引文

12. 类比的风险

**第三章 平面几何中的归纳法** ..... (63)

§ 1 中国古算..... (64)

§ 2 归纳中的演绎..... (67)

§ 3 洞渊九容..... (68)

§ 4 类比、归纳和演绎..... (72)

§ 5 公理的诞生..... (74)

§ 6 演绎中的归纳..... (79)

§ 7 类比、演绎和数学问题..... (80)

§ 8 全等与运动..... (82)

§ 9 从全等到相似..... (87)

§ 10 完全的归纳与组合 ..... (90)

注释、问题与课题 .....	(91)
1. 三角函数 2. 一般容圆问题 3. 三段论式或演绎推理 4. “平行公设”案 5. 通过部分判定整体 6. 平行四边形判定法研究 7. 几何四大概念 8. 命题的“补救” 9. 剖析“ $\cong$ ”所得的命题	
<b>第四章 从平面到空间 .....</b>	<b>(99)</b>
§ 1 类比与推广 .....	(100)
§ 2 一个惊人的发现 .....	(100)
§ 3 检验 .....	(103)
§ 4 空间的分划 .....	(108)
§ 5 归纳法提示演绎法, 部分情况提示一般的证明 .....	(114)
注释、问题与课题 .....	(116)
1. 欧拉定理的研究 2. 欧拉定理证明的研究 3. 点划分直线与直线划分平面的关系 4. 直线划分平面研究 5. 球面划分问题 6. 归纳法: 思想的符合与语言的符合 7. 笛卡儿关于多面体的著作 8. 推广的尽头, 类比的限度	
<b>第五章 面积和体积 .....</b>	<b>(123)</b>
§ 1 面积纵横 .....	(124)
§ 2 面积组成问题 .....	(126)
§ 3 归纳中的线索 .....	(131)
§ 4 “面积”开发 .....	(133)
§ 5 $\pi$ 的奥妙 .....	(137)
§ 6 $\pi$ 的启示 .....	(146)

§ 7 体积问题 .....	(149)
§ 8 化归 .....	(153)
§ 9 归纳、类比与化归 .....	(156)
注释、问题与课题 .....	(156)
1. 三斜求积 2. 六棱求积公式 3. 面积证题术的应用 4. 体积证题术的应用 5. $\pi$ 是个常数吗 6. 类比的一次失败 7. 直棱四面体与直角四面体 8. 类比和推广的应用 9. 引文 10. “卡瓦列利原理”辨析 11. 参照体设计 12. 密率的小数值	

## 第六章 算术中的归纳法..... (170)

§ 1 深入地观察 .....	(171)
§ 2 形同实异的问题 .....	(177)
§ 3 沙里淘金：兔子问题研究 .....	(183)
§ 4 一个民间算题 .....	(185)
§ 5 确定型问题 .....	(189)
§ 6 数学模型 .....	(192)
注释、问题与课题 .....	(196)
1. 对自然数列的继续观察 2. $2^4$ 的故事 3. $P$ 进制数的运算 4. 形数间的关系 5. 来自《九章算术》的问题 6. 孙子问题别解 7. 如果双方都懂必胜策略 8. 小数问题 9. 斐波那契数初步研究 10. 一个歌诀算题的补正 11. 小数的结构	

**第七章 代数中的归纳法**…………… (214)

§ 1 历史回顾 …………… (215)

§ 2 字母代数 …………… (216)

§ 3 意想不到的事情 …………… (218)

§ 4 归纳与数学习惯 …………… (222)

§ 5 从贾宪到杨辉 …………… (226)

§ 6 从牛顿到华罗庚 …………… (229)

§ 7 孤立观察 …………… (233)

§ 8 四个二次 …………… (235)

§ 9 配方法 …………… (238)

§ 10 根与系数的关系…………… (240)

注释、问题与课题…………… (245)

1. 代换 2. 数学式的分类 3. 等式·

天平·桥 4. 怎样提取“副产品” 5. 杨辉

三角的推广 6. 二项式定理的推广 7. 一

个恒等式 8. 对称多项式 9. 二次函数的

初等性质

**第八章 抽象——精致的类比**…………… (261)

§ 1 欧拉“过桥”的故事 …… (262)

§ 2 抽象 …………… (264)

§ 3 类比、推广与抽象 …… (266)

§ 4 直觉与抽象 …………… (268)

§ 5 思想实验 …………… (271)

§ 6 抽象的层次 …………… (273)

§ 7 数学模型(续) …………… (276)

注释、问题与课题…………… (278)

1. 图的种类 2. 奇顶点个数必为偶数  
 3. “抽象”溯源 4. 引文 5. 对初等数学的内容进行抽象程度的分析 6. 爱因斯坦的一个实验 7. 反证法和思想实验 8. 初等数学中的思想实验 9. 数学抽象 10. 引文: 数学的特点

**第九章 极大与极小**…………… (289)

§ 1 极值问题 …………… (290)

§ 2 思路分析 …………… (291)

§ 3 等值切线模式 …………… (295)

§ 4 最大多边形和异面直线问题  
 …………… (298)

§ 5 部分改变模型 …………… (301)

§ 6 生活中的极值问题 …………… (305)

§ 7 二次模型 …………… (309)

§ 8 运输中心问题 …………… (313)

§ 9 定值模型 …………… (321)

注释、问题与课题…………… (323)

1. 平面几何中的最大、最小距离 2. 立体几何中的最大、最小距离 3. 平面上的等值线 4. 空间中的等值线 5. 空间中的等值面 6. 三角形最大面积 7. 等值线相交原则 8. 地形图上的等高线 9. 局部调整原则 10. 磨光变换 11. 平均不等式的磨光证明 12. 异面直线公垂线的存在性 13. 贪小(有时)失大 14. 判别式

**第十章 等周问题**…………… (334)

§ 1 观察、实验和猜想 .....	(335)
§ 2 考查推论 .....	(338)
§ 3 确证推论 .....	(341)
§ 4 非常切近 .....	(345)
§ 5 等周定理的三种形式 .....	(347)
§ 6 副产品 .....	(348)
§ 7 应用和问题 .....	(350)
§ 8 向空间类推 .....	(352)
注释、问题与课题 .....	(353)

1. 动手做 2. 计算 3. 四边形等周问题 4. 凸图形与凹图形 5. 等周定理对偶形式等价性的直接证明 6. 等周定理的加强形式 7. 一个作图题 8. 比较两个问题 9. 棍子和绳子 10. 两根棍子和两条绳子 11. 推广 12. 限定 13. 空间等周定理 14. 空间等周商 15. 曲面围出最大体积 16. 空间几何中的吉冬问题 17. 三种特殊情形 18. 平面区域的平分线 19. 正方形两条平分线 20. 最短平分线 21. 封闭曲面的平分线 22. 多面体表面的最短平分线 23. 隔膜问题 24. 空间等周定理的一个证明 25. 韵味无穷 26. 类似情况 27. 空间等周商的归纳论据

## **第十一章 最优化问题**..... (365)

§ 1 自然书 .....	(366)
§ 2 优选问题 .....	(371)



§ 3 两点创新 .....	(376)
§ 4 统筹方法 .....	(378)
§ 5 简单性 .....	(383)
§ 6 中国邮递员问题 .....	(385)
§ 7 最优化问题 .....	(387)
注释、问题与课题 .....	(388)

1. 自然书的读法 2~5. 解答问题  
 6. 0.618 的来历 7. 优选法中分数串的奥妙  
 8. 单峰函数与信息定理 9. 奇偶点图上作业法  
 10. 第二种邮递员问题  
 11. 最短路问题 12. 工序流程图计算  
 13. 数学规划 14. 引文

## 第十二章 计数..... (397)

§ 1 枚举计数法 .....	(398)
§ 2 由法则到公式 .....	(403)
§ 3 格图中的计数问题 .....	(408)
§ 4 游戏中的数学 .....	(414)
§ 5 整边三角形的计数 .....	(420)
§ 6 计数问题综观 .....	(427)

### 注释、问题与课题..... (427)

1. 在集合语言下的加法原理和容斥原理  
 2.  $P$  进制下数的个数 3. 一些数列的和  
 4. 整数分拆 5.  $n$ -正三角形网络中的一些计数问题  
 6. 凸  $n$  边形内三角形的计数 7. 移盘次数与九连环着数的确定  
 8. 关于符号  $\Sigma$  9. 取整符号的性质 10. 化某些移盘局势为标准局势  
 11. 集合的分