科学史全集

第九卷

9

辽宁教育出版社


9

李俨 钱宝琮 科学史全集

9

辽宁教育出版社

第九卷说明

本卷收入钱宝琮先生的科学史论文41篇，内容涉及中国数学史、天文学史、力学史、科学家传记以及科学史理论等几个方面，反映了钱宝琮科学史研究的主要成就及思想历程。1982年，杜石然、梅荣照、何绍庚、郭书春、薄树人等曾编辑过一部《钱宝琮科学史论文选集》(科学出版社1983年出版)，收入论文33篇。今将原收入《古算考源》的6篇论文(《选集》收5篇)及《校正与增补》仍以《古算考源》为题植入本全集第一卷，而以《选集》为基础，另补充《选集》未收的论文13篇，是为本卷。所有论文以发表或撰写先后为序排列，付梓前都依原印本作了校订，并核对了所引古文。《选集》的编者曾对有的论文作过少量注释，今均标以“《选集》编者”字样。重写的解题及注释则标以“*”。

目　　录

中国算书中之周率研究*

古代及两汉之周率研究

圆周率起于圆之量法。圆径一则周三有余。所谓“径一周三”，殆举成数言之耳。其畸零不尽之义，昧而难譬。虽有才智，不能究其毫芒。故世传此法，莫肯精核。考之古代传本算书，知两汉以前，除径一周三($\pi=3$)外，实无它率可言。

吾国最古算书之流传者，允推《周髀算经》与《九章算术》二种。《周髀》首述周公商高问答之辞，《九章》为《周官·保氏》九数之遗法，俱似属周初作品。但二书内容，在在有汉人或汉以后人增改之迹，可为证实①。今传本《周髀》为赵君卿注本，《九章》为刘徽注本。君卿汉人，其序文有论盖天浑天② 之说，当在东汉末年。刘徽为三国魏景元间人。吾人于二书宁视为两汉人作品，未可擅以为秦火以前物也。

---

* 原载《科学》第八卷第二期和第三期(1923年2月、3月)。1983年收入《钱宝琮科学史论文选集》第50～74页。

① 参观陈杰《算法大成》上篇卷二论勾股，及《学艺》三卷一期拙著《九章问题分类考》(*见本书第一卷《古算考源》)。

② “浑天”一说为汉安帝时张衡所创。

《周髀算经》算法遇圆周径相与之比皆取古率径一周三($\pi=3$)。篇首言“数之法出于圆方”,又云“方属地,圆属天”,附会《易》理以言数理。赵君卿注虽在张衡之后,亦笃守旧率,无所发明,以为圆径一而周三,方径一而匝四,圆方者天地之形,阴阳之数,数理之自然也。但吾侪当知径一周三之率,当始于太古,而阴阳奇耦之说,则为汉代方士谈《易》之故技。以奇耦研究圆方,非特于理无当,且与古率之成立无涉焉。南北朝时周率约数为$\frac{22}{7}$,后世亦以大衍之数解之①,亦穿凿附会之谈也。

《九章算术》方田、商功二章凡圆周径互求,圆及圆环之面积,圆柱,圆锥及圆锥截体之体积,应用周径之比,皆取古率 3。惟弧田面积(area of circular segment)算法,及畹田面积(area of spherical segment)算法,皆用经验公式得近似数,少广章球积求径术,数理乖误,皆未得形学旨要,不可以古率 3 一概论之。

《九章算术》方田章弧田面积算法用公式

$$弧田面积=\frac{1}{2}(弦\times矢+矢^2)。$$

案此式得面积,常嫌太小,其误差百分比(proportional error)实较古率圆积算法为尤多。若弧度愈小,其面积之误差百分比亦愈大。弧度为钝角者,面积差 4.7%至 12%,弧度小于九十度则差大于 12%,弧度在三十度之内则差大于 20%。刘徽注此术,以为弧田若为半圆形,是以周率为 3,失之于少,若不满半圆,则此术益复疏阔。所见极是。畹田面积算法用弧长乘下周,以四除之,得面积。得值亦为近似数,刘徽亦知其不验。然刘徽而后,千余年中,畴人用此二术以求面积,莫能究其得失,且均视之与古率 3 无异,则不思之甚者也。

① 见清屈曾发《九数通考》。

东汉时，球积算法尚未发明，误以为球积与外切圆柱体积之比，等于圆柱体积与外切立方积之比，并为$\frac{3}{4}$。故球积V为径D立方积之$\frac{9}{16}$倍$\left(V=\frac{9}{16}D^3\right)$。少广章开立圆术（球积求径术）$D=\sqrt[3]{\frac{16V}{9}}$，得径为太小。张衡（78—139）注《九章》此术① 亦未知其数理之误，然以为球积与外切立方积之比，不为$\frac{9}{16}$，而为$\frac{5}{8}$，得$V=\frac{5}{8}D^3$，或$D=\sqrt[3]{\frac{8V}{5}}$，得径值益复疏远。惟衡由此推论得平圆面积与外切平方面积之比，当为$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$，得周率$\pi=\sqrt{10}=3.1622$，虽增周微多，较古率 3 未始非略进一筹矣。此率与印度 Brahmagupta（598～?）所创率，正合。又据《开元占经》所载，张衡《灵宪》天周地广之比为$\frac{736}{232}=\frac{92}{29}=3.1724$。

张衡之前，西汉末刘歆为王莽造律嘉量斛。其铭曰："律嘉量斛，内方尺，而圆其外，庣旁九厘五毫，冪一百六十二寸，深一尺，积一千六百二十寸。"自此推之，斛径$=\sqrt{2}+2\times0.0095=1.4332$尺，面积$=1.62$方尺。周率应为$\frac{4\times1.62}{1.4332^2}=3.154$。歆算草未传于后，且未必有发明新率之意。故刘徽《九章注》等未为征引。南朝祖冲之在晋武库中，见是斛，心知其误，曾与戴法兴辩难天算，有曰"立圆旧误，张衡述而弗改；汉时斛铭，刘歆诡谬其数"。《隋书·律历志》言祖冲之以率考之，此斛当径 1.436192 尺（冲之用率为$\frac{355}{113}$），歆斛径嫌少，数术不精之所致也。《九章》李淳风注引祖氏

① 见刘徽《九章注》所引。

语，议嘉量斛制之未精，并及刘徽周率之尚嫌微少，谓周率当以$\frac{3927}{1250}$(3.1416)为近似数，后人不察，以二文连读之，竟以$\frac{3927}{1250}$一率① 为歆所创造②，误也。

汉末吴陆绩、王蕃(217～257)并为天算大家。绩以π为3，蕃则云“径一不啻周三，率，周一百四十二，而径四十五”$\left(\pi=\frac{142}{45}=3.15\right)$③。明朱载堉以$\pi$为$\frac{\sqrt{2}}{0.45}$，与此相仿，其理、法均未详。

刘　　徽

刘徽注《九章算术》九卷。又自撰《重差术》一卷，自序成于魏景元四年(263)。徽不泥古法，不涉《易》理，事事视其力之所逮，详为解析，与赵君卿《周髀注》迥异。创始以几何理求周率真数。虽得数只3.14三位，然理法确当，解释详明，开后世数学界之新纪元。其所用术与阿基米德(Archimedes，前287～前212)相仿，得数亦复相同。徽注《九章》圆田求积，凡一千四百余言。其逐步演算盖引用下列五原理以成之。

1. 圆内正六边形，每边长与半径相等。
2. 两尖形④ 之面积为二对角线相乘积之半。
3. 直角三角形，弦之平方等于直角旁两边平方之和。

---

① 参观本篇第三节。

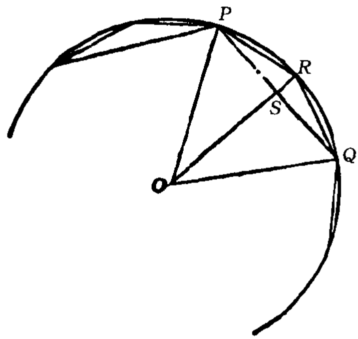
② 见岑建功《割圆密率捷法》序及茅以升《中国圆周率略史》。

③ 见《晋书》及《开元占经》。

④ 两尖形为二等腰三角形合成之形。其公有之底，为形之对角线。“两尖”之名，见秦九韶《数书九章》田域类。西文为 Trapezion，或称 Kite。

4. 圆内正多边形之边数愈增，其面积与圆积愈近。至边数增至无穷时，积与圆积合。

5. S_n，S_{2n}若为圆内容正 n 边形及正 $2n$ 边形之面积，S 为圆面积，则 $S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$。（证见第五节图）



徽先以原理一证径一周三为内容六边形之周率，以原理二证内容十二边形之面积为 $3r^2$（r 为圆半径）。乃知以 3 为周率，无论求周，求积，皆嫌太少。次释若以圆周割之为六等分，十二等分，二十四等分，递求其边周面积。割之弥细与圆积相差弥少。割至于不可割，则与圆合体，而无所失矣（原理四）。遂证明《九章》术文“半周半径相乘得积步”为确当有据。终附其演算次第法则。

设 PQ 为内容 n 边形之一边，PR，RQ 为内容 $2n$ 边形之边，用原理三得

$$OS=\sqrt{OP^2-PS^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{PQ}{2}\right)^2},$$

$$RS=OR-OS,$$

$$PR=\sqrt{PS^2+RS^2},$$

得 $2n$ 边形周 $P_{2n}=2nPR$。

如是递求单位圆内容 12，24，48，96 边形之边长及其全周，更以原理二得

$$\text{两尖形 } OPRQ \text{ 面积}=\frac{1}{2}PQ\times OR$$

$$\therefore\ 2n \text{ 边形面积 } S_{2n}=n\left(\frac{1}{2}PQ\times OR\right)=\frac{1}{2}P_n r。$$

如是递求24,48,96,192边形之面积。兹以徽所求得之数补为表式如下。

边数	每边长	周 P_n	面积 S_n	积差 $S_{2n}-S_n$
6	1	6		
12	0.517638	6.211656	3	
24	0.261052	6.265248	3.105828	0.105828
48	0.130806	6.278688	3.132624	0.026796
96	0.065438	6.282048	3.139344	0.006720
192			3.141024	0.000680

由上表知一百九十二边形面积为3.141024;若以0.000680加之得3.141704。因原理五得

$$3.141024<\pi<3.141704,$$

$$\text{或 } 3.14\frac{64}{625}<\pi<3.14\frac{169}{625}。$$

故知周率准至第二位小数,当为3.14强。或周得157为率,径得50为率,或 $\pi=\frac{157}{50}$,刘徽自知其率为微少也。

张衡周率 $\sqrt{10}$,及《九章》球积术之谬误,刘徽知之甚审,然云"欲陋形措意,惧失正理。敢不阙疑,以俟能言者",未敢遂为更正。至南齐时祖冲之父子始正其谬误焉。

祖冲之及其同时人

《隋书·律历志》曰:"圆率周三径一。其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒,各设新率,未臻折衷。祖冲之更开密法,以

圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽。正数在盈朒二数之间$(3.1415926<\pi<3.1415927)$；密率圆径一百十三，圆周三百五十五$\left(\frac{355}{113}\right)$；约率，圆径七，周二十二$\left(\frac{22}{7}\right)$。"

皮延宗为刘宋元嘉时(424～453)员外散骑郎，曾与太子率更令何承天问难天算。其周率若何，已不可考。何承天为当代天算大家，尝谓"周天$365\frac{75}{304}$度，天常西转，一日一夜过周一度，南北二极相去$116\frac{65}{304}$度强，即天径也"。以径除周返求其所取周率，得$\frac{365\times304+75}{116\times304+65}=\frac{111035}{35329}=3.1428$强①。与$\frac{22}{7}$之率相近。以$\frac{22}{7}$除111035，适得35329强。此率承天未言其为自创。或即为皮延宗率亦未可知。抑隋史卤灭，误承天为延宗也。按徽率$3\frac{7}{50}$，已知其为微少。若从分母50减去1，作49。周率得$3\frac{7}{49}=3\frac{1}{7}$，增周略多，即以为定率，亦数理之自然也。由上言之，周率$\frac{22}{7}$，无论为延宗或承天所创。均在祖冲之之前，冲之不过引前人率以为约率耳。

祖冲之(429～500)为宋末南徐州从事。造《缀术》数十篇。其周率盈朒数，及约密二率，当并载《缀术》中。其子暅之亦精数学，删定父稿，唐代立于学官。惜《缀术》书早于北宋末失传，难以确考其造率法意；唐李淳风注《九章算术》，周径求圆积术云："攈摭诸家，考其是非，冲之为密，故显于徽术之后。"今此术徽注之后，有后人论圆率二百三十二言，似即为冲之语。首述晋武库中汉时王莽作铜

---

① 日人三上义夫据 Muramatsu's Sanso，1664。说何承天率为3.1432+，当有舛误。

斛,铭语之误。次论徽率得值太小,宜于192边形之面积 $3.14\frac{64}{365}$ 方尺内,以 $\frac{36}{365}$ 增之,作 $3.14\frac{100}{625}$ 或 $\pi=\frac{3927}{1250}$,于率较确。又言上率仍为约数。当求1536边之一边,得3072边形之面积,更为密合。按3072边形面积,当得3.14159046方尺①,周率可准至小数五位。

冲之盈朒二限之得法,已不可详。今假定其推算步骤与刘徽相同,则以半径为一亿,递求 6×2^n 边形之边、周、面积,俱算至单位止,余分弃之。应得 6×2^{11} 边形面积3.14159251,6×2^{12} 边形面积3.14159261,俱为九位数。(刘徽算至忽位,只为七位数。)面积相差10,故依原理五,圆积应大于3.14159261而小于3.14159261+10,故知 $3.1415926<\pi<3.1415927$。由上考之,冲之盈朒二数,或即由演算 6×2^{12} 或24576边形面积得之,决非仅从3072边形面积所得之结果也。

至其密率 $\frac{355}{113}$ 之发明,尤为空前杰作②。《缀术》失传,千余年来见此率者,莫不惊其精妙,独于其造成之法,鲜有推究。近代习中算者,颇有以六朝时应早有连分数术为说。然连分数术发明者何人,传者何人,应用于何种算术,均无征验。中国不定方程解法与西法迥异,亦不需连分数术③,上说似不可靠。冲之密率,岂文章本天成,妙手偶得之欤?抑博学旁通,勉强而成之欤?案古代算法,遇数有畸零者,辄以计算不便,化为分数值。不特于周率为然,凡天文历算皆采用是制。如月绕地球之周期,多于二十九日之残余小数,在

---

① 见《数理精蕴》下篇卷十五,及李潢《九章算术细草图说》。

② 西洋于1527年,Peter Medius亦得此率。然在冲之之后一千有余年。日人三上义夫尝有建议,拟命为"祖冲之率",以尊重其发明者。

③ 见拙著《求一术源流考》(*见本书第一卷《古算考源》)。

古代为$\frac{43}{81}$，$\frac{499}{940}$，$\frac{773}{1457}$，$\frac{399}{752}$等分数。前几数不知所本。其最后分数值$\frac{399}{752}$为宋何承天术。承天先造二分数，一稍大，一稍小，谓之“强率”“弱率”。于此术以$\frac{26}{49}$为强率，$\frac{9}{17}$为弱率，于强弱之间，以求定率。实测得一月日数为29.5305851，其残余小数在强弱率之间。以强弱率子母各各相加，以取折衷[①]。$\frac{26+9}{49+17}=\frac{35}{66}$与0.5305851相较分数，俱尚嫌太弱，即取$\frac{35}{66}$与强率$\frac{26}{49}$求折衷，得$\frac{61}{115}$仍为太弱。如是递求至十五次，得$\frac{9+26\times15}{17+49\times15}=\frac{399}{752}$与0.5305851相近，取为定率，谓之“调日法”。后之治天算者，咸知用承天强弱率，及其调日法，以定朔余零数[②]。冲之在承天后采用其术以造圆周密率，亦意中事也。设以徽率$\frac{157}{50}$为弱率，约率$\frac{22}{7}$为强率，周率正数当在强弱二限之间，屡试$\frac{179}{57}$，$\frac{201}{64}$，$\frac{223}{71}$等折衷分数，得商，与正数3.1415926强相较，俱嫌太弱。终得第九次$\frac{157+22\times9}{50+7\times9}=\frac{355}{113}=3.1415929$，与正数最能相近，取为密率。冲之原术，未知是否如此，未敢以为定论，愿与治算学者共商榷之。

《九章》球积术据李淳风注所引祖暅之术为$D=\sqrt[3]{\frac{21V}{11}}$。暅之于此术，校正前人之误。惟以约率$\frac{22}{7}$为圆率，岂以约率入算较易欤？

---

① “折衷”二字，即用《隋书·律历志》语意，与平均二字有别。

② 参看《畴人传》何承天传，及李锐《日法朔余强弱考》。

两晋、南北朝算学述作甚富，传者亦有多种。于周率多取古率3入算。对于《九章》球积术之谬误，及弧田术等等，只能得近似数，诸家除冲之父子外，皆未有异议。按刘徽《九章注》在当时不当失传，北周甄鸾等更于冲之诸率有所传授，然皆未为采用。吾国文人因陋就简，于此可见一斑。

唐、宋、元、明之周率研究

唐贞观初，太史命李淳风等奉敕注释《周髀》、《九章》等古算籍。其《九章注》于周率研究，辄抑刘徽而扬祖冲之。顾其所取以入算者，乃$\frac{22}{7}$，而非冲之周率正数或其密率$\frac{355}{113}$。遇《九章》题问涉周径者，均附注"密率"算术于后，以约率$\frac{22}{7}$为"密率"，与《隋书·律历志》相出入，不知何据。岂以$\frac{22}{7}$一率，较徽率$\frac{157}{50}$为尤密，故称"密率"欤①？同时，通直郎太史丞王孝通撰《缉古算经》一卷，亦用$\frac{22}{7}$为圆率。然未有约率或密率之称。刘孝孙《张邱建算经细草》于球积术之谬误，以祖暅之球积术校正之，题曰"密率术草"，亦当为同时出品。按$\frac{22}{7}$一率，经王孝通、李淳风等提倡后，后世畴人用此率以为"密率"者甚多。而冲之周率正数，及其密率$\frac{355}{113}$于一千余年中，知者甚少，能理而董之者更属凤毛麟角。祖氏《缀术》至于失传，中国学术进步之迟滞类皆如是。于圆率发达史又奚怪焉。

宋沈括（1030～1094）造"会圆术"，以圆径及所割之矢求圆弧

① 说见梅启照《学强恕斋笔算》卷四。

之长。设弧长为 a,所割之矢为 b,通弦为 c,圆径为 d,其会圆术可以代数式表之如下。

$$c=2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}-b\right)^2},$$

$$a=c+\frac{2b^2}{d},$$

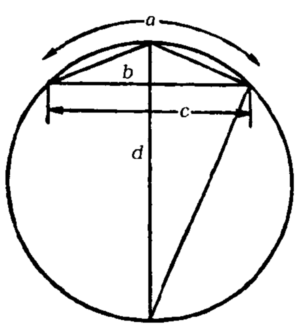
此术载其自撰之《梦溪笔谈》卷十八,有术文而无证明。按

$$\text{弧形面积}=\frac{ad}{4}-\frac{c\left(\frac{d}{2}-b\right)}{2}=\frac{(a-c)d+2cb}{4}。$$

据《九章》弧田术,弧形面积$=\frac{cb+b^2}{2}$。

二式相等,故知$(a-c)d=2b^2$ 或 $a=c+\frac{2b^2}{d}$。

“会圆术”后有沈氏自注,且设数演草。圆径以十步为单位,故计算时 $2b^2$ 用“退一位”入算,以替十除。今传本术文中亦有“退一位”三字,殊为费解,当是涉其自注之误而衍。近人颇有沈括用圆率 $\sqrt{10}$ 之说①,且有解“退一位”三字,即为沈用张衡率之证者②,皆为衍文所误也。此术求圆弧之长,弧度为九十度或一百八十度时,得值与用古率 3 算得者无异;弧度为钝角时,其误差百分比约为 5%;若为锐角,则得值较古率 3 为精密,弧度在三十度内者,误差百分比小



① 罗汝怀《重刻徐壮愍公算书》序,李俨《中国数学源流考略》。

② 茅以升《中国圆周率略史》。