大学课程教学同步练丛书

DAXUE KECHENG JIAOXUE TONGBULIAN CONGSHU

概率论与数理统计

同步学习辅导

西北工业大学《概率论与数理统计》编写组 编

西北工业大学出版社

概率论与数理统计
同步学习辅导

西北工业大学《概率论与数理统计》编写组　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是概率论与数理统计的同步学习辅导书，对概率论与数理统计的主要知识点进行了归总；对有代表性的典型例题进行分析和求解；最后配以大量的练习题并加以求解，以提高读者基本运算、推理及应试的能力。书后附有模拟试题及答案，供读者自测。

本书可作为本科生学习概率论与数理统计课程的同步学习辅导书，也可作为考研的强化训练指导书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步学习辅导/西北工业大学《概率论与数理统计》编写组编．—西安：西北工业大学出版社，2002.3

ISBN 7-5612-1444-8

Ⅰ．概… Ⅱ．西… Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第007116号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路127号 邮编：710072 电话：029-8493844

网 址：http://www.nwpup.com

印 刷 者：长安县第二印刷厂

开 本：850 mm×1 168 mm 1/32

印 张：11.5

字 数：280千字

版 次：2002年3月第1版 2002年3月第1次印刷

印 数：1~5 000册

定 价：15.00元

前　　言

概率论与数理统计属于随机数学的重要基础课。初学这门课做习题时常会有不少的困惑，缺乏思路，难以下手，有时想好了却表达不清楚，有时做完习题也不敢断言做对了。因此，我们编写本书的目的，就是为了帮助读者总结、思考，以解答做题时遇到的难点，提高学习效率。

西北工业大学应用数学系周晓莉编写了第一章和第二章；刘华平编写了第三章和第四章；肖华勇编写了第五章和第六章；唐亚宁编写了第七章和第八章，他们均是多年从事概率论与数理统计课教学的第一线教师。徐伟、赵选民、师义民和秦超英参加了部分编写工作和模拟试题的编写。本书最后由徐伟教授编纂、定稿。

由于水平有限，错误和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编者

2002 年 2 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

一、知识网络图

- 随机事件及其概率
  - 事件及关系和运算
    - 样本空间，事件的定义
    - 事件之间的关系（$\subset$，$=$，$\cup$，$\cap$，$-$，互斥，对立）
    - 关系运算律
  - 概率的定义和性质
    - 定义
      - 统计定义
      - 古典定义
      - 公理化定义
    - 性质（可加性，单调性，连续性等）
  - 概率的计算
    - 古典概率　$P(A)=\dfrac{m}{n}$
    - 几何概率　$P(A)=\dfrac{\text{事件 }A\text{ 的子区域的度量 }S_A}{\text{样本空间的度量 }S}$
    - 条件概率　$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$
      - 乘法公式：$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B)$
    - 全概率公式　$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$
    - 逆概率公式　$P(A_k\mid B)=\dfrac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$　$(k=1, 2, \cdots, n)$
  - 独立试验序列概型
    - 事件的独立性　$P(AB)=P(A)P(B)$
    - 贝努里概型　$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-K}$　$(k=0, 1, \cdots, n)$

附：概率的计算方法简图

- 随机事件的概率
  - 直接计算法 $P(A)=\frac{m}{n}$
  - 间接计算法
    - 条件概率 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$
    - 积事件概率 $P(AB)=\begin{cases}P(A)P(B\mid A)\\P(B)P(A\mid B)\end{cases}$
      若 A 与 B 独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$
    - 全概率公式 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$
    - Bayes 公式 $P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$
    - 贝努里公式 $P(A\text{ 发生 }k\text{ 次})=C_n^kP^kq^{n-k}$
    - 加法公式
      (1) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
      (2) $P(A+B)=P(A)+P(B)$（若 A 与 B 互斥）
    - 差事件概率 $P(B-A)=P(B)-P(A)$
      （当 $A\subset B$ 时）

二、知识点、考点

（一）随机事件的概念

1. 随机试验

概率论中把满足下列 3 个条件的试验称为随机试验，简称为

试验:① 允许在相同条件下重复地进行;② 每次试验结果不一定相同; ③ 在试验之前不知道会出现哪种结果.

2. 基本事件(样本点)

随机试验中,每一个可能出现的结果,称为基本事件(或称样本点).

3. 基本事件空间(或称样本空间)

把所有可能的试验结果(所有基本事件)的全体所构成的集合称为必然事件或基本空间或称为样本空间,记作 Ω.

4. 随机事件(简称事件)

基本空间的子集,即由某些样本点构成的集合称为随机事件简称事件. 记为 $A,B,\cdots$, 等.

5. 不可能事件

规定不含任何元素的空集也为事件,称为不可能事件,记为 Φ.

6. 事件间的关系与运算

(1) 事件之间的四种关系,如表 1-1 所示.

表 1-1

关系	符号	概率论	集合论
包含关系	$A\subset B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
相等关系	$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
对立关系	$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集
互斥关系	$AB=\Phi$	事件 A 与事件 B 不能同时发生(或互不相容)	A 与 B 无公共元素

(2) 事件之间的三种运算，如表 1－2 所示．

表　1－2

运　算	符　号	概率论	集合论
事件的和(并)	$A\cup B$ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	事件“A 与 B 至少有一个发生” 事件“$A_1, \cdots, A_n$ 至少有一个发生”	A 与 B 的并集 $A_1, \cdots, A_n$ 的并集
事件的积(交)	$A\cap B$ (或 AB) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$	事件“A 与 B 同时发生” 事件“$A_1, \cdots, A_n$ 同时发生”	A 与 B 的交集 $A_1, \cdots, A_n$ 的交集
事件的差	$A-B$	事件“A 发生时 B 不发生”	A 与 B 的差集

7. 一些常用的事件间的关系式

(1) $A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$，(交换律).

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(AB)C=A(BC)$，(结合律).

(3) $(A\cup B)C=AC\cup BC$; $(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$，(分配律).

(4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$，(对偶律).

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i;\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i.$$

(5) $\Phi\subset A\subset\Omega$.

(6) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$, $AB=A$.

(7) $A+\Phi=A$, $A+\Omega=\Omega$, $A\Phi=\Phi$, $A\Omega=A$.

(8) $A\subset A\cup B$; $B\subset A\cup B$, $A\supset AB$, $B\supset AB$.

(9) $A\cup B=A+(B-AB)=B+(A-B)=$

$$B+A\overline{B}=A+B\overline{A}$$

(10) $\overline{A}=\Omega-A$, $\overline{\overline{A}}=A$, $A-B=A\overline{B}$.

（二）概率的概念

对于一个随机事件 A 发生的可能性的大小，用一个数 $P(A)$ 来表示，这个数通常就称为随机事件 A 发生的概率，简称为事件 A 的概率．

1．概率的统计定义

在一个随机试验中，如果事件 A 出现的频率 $\frac{m}{n}$ 随着试验次数 n 的增大，它在区间 $[0, 1]$ 上的某个常数 p 附近摆动，那么定义事件 A 的概率为

$$P(A) = p$$

概率的这种定义，称为概率的统计定义．

2．概率的古典定义

随机现象的每一个基本结果称为样本点．样本点的全体称为样本空间。若随机现象满足：① 只有有限个样本点；② 每个样本点的发生都是等可能的；③ 每次试验有且仅有一个样本点发生，则称这类现象为古典概型。在古典概型情况下，事件 A 的概率定义为

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点个数}}{\text{样本点总数}}$$

3．概率的几何定义

当随机试验的样本空间是某一个区域，并且任意一点落在度量（长度面积和体积）相同的子区间是等可能的，则事件 A 的概率可定义为

$$P(A) = \frac{S_A}{S}$$

式中 S 是样本空间的度量，S_A 是构成事件 A 的子区域的度量。

4．概率的公理化定义及概率的性质

Ω 为样本空间，$\mathscr{F}$ 为 Ω 的某些子集组成的集类，满足：① Ω

$\in \mathscr{F}$;② 若 $A_n \in \mathscr{F}(n=1, 2, \cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$; ③ 若 $A \in \mathscr{F}$,则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$,称 $\mathscr{F}$ 为 σ-域,$\mathscr{F}$ 中的元素就表示随机事件．

定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个非负函数 $P(A)$,若满足:① 对任意 $A \in \mathscr{F}$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; ② $P(\Omega)=1$;③ 若 $A_n \in \mathscr{F}(n=1, 2, \cdots)$ 且 $A_i \cap A_j = \Phi(i \neq j)$,则 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$,就称 $P(A)$ 为事件 A 的概率,称$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间．

概率的基本性质:

(1) $P(\Phi)=0$.

(2) 若 $A_1, \cdots, A_n$ 满足 $A_iA_j = \Phi(i \neq j)$; 则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$ (有限可加性).

(3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(4) 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leqslant P(B)$.

(5) 若 $B_n \in \mathscr{F}\ (n=1, 2, \cdots) B_n \supset B_{n+1}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \Phi$,则

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0 \text{ ,(连续性)}$$

(6) $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i \neq j} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^n P(A_1 \cdots A_n)$.

性质(6) 称为概率的一般加法公式,概率的基本性质是概率论学习的必要基础,务必要牢固掌握,并能灵活应用这些性质进行概率计算．

(三) 条件概率

(1) 若 $P(B) > 0$ 时,称 $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为“在已知事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率” 条件概率是概率论中另一重

要概念，它与独立性有密切的关系，在不具有独立性的场合，它将扮演主要角色，条件概率也是概率，它具有概率的一切性质．

(2) 将条件概率公式变形，就得到概率的乘法公式：

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) \quad (P(A) > 0,\ P(B) > 0)$$

一般地，设 $A_1, \cdots, A_n$ 为任意 n 个事件，则有

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1})$$

(3) 全概率公式：设 $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，且 $A_i A_j = \Phi (i \neq j)$，则

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

(4) 贝叶斯公式：设 $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，且 $A_i A_j = \Phi (i \neq j)$，$P(B) \neq 0$，则

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

(四) 独立性，贝努里概型

1. 称事件 A 与 B 独立，若 $P(AB) = P(A)P(B)$；称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，若对任意 $k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 任意 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(i_{i_k})$$

称事件 $A_1, \cdots, A_n$ 两两独立，若对任意 $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$，有 $P(A_{i_1} A_{i_2}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})$. 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立一定两两独立，两两独立不一定相互独立．

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

用此公式计算概率 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ 比用一般加法公式简单得多.

2. 做 n 次随机试验,每次试验的结果是 A 或 $\overline{A}$,且 $P(A)=p$,各次试验的结果相互独立,这种概型称为贝努里概型,n 次试验中事件 A 发生 k 次的概率 $P_n(k)$ 为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

这个公式称为二项式概率计算公式.

三、典型例题分析

例 1.1 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$,则事件 A,B,C 全不发生的概率为多少?(1992 年攻读硕士学位研究生入学考试试题,以后简称试题)

解 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P\,\overline{(A\cup B\cup C)}=$

$$1-P(A\cup B\cup C)=$$

$$1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-$$

$$P(BC)-P(AC)+P(ABC)]$$

因 $ABC\subset AB$,所以

$$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$$

故 $P(ABC)=0$,从而

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{16}\right)=\frac{3}{8}$$

例 1.2 在某城市发行 3 种报纸 A,B,C,经调查,订阅 A 报的有 45%,订阅 B 报的有 35%,订阅 C 报的有 30%,同时订阅 A 及 B 报的有 10%,同时订阅 A 及 C 报的有 8%,同时订阅 B 及 C 报的有 5%,同时订阅 A,B,C 报的有 3%,试求下列事件的概率.

(1) 只订 A 报的;

(2) 只订 A 报及 B 报的；

(3) 只订一种报纸的；

(4) 正好订两种报纸的；

(5) 至少订阅一种报纸的；

(6) 不订阅任何报纸的；

(7) 至多订阅一种报纸的.

解　本题主要考查学生利用事件之间的关系及运算规律计算事件概率的能力，在这里正确利用已知事件表示所求事件是非常重要的.

(1) $P(A\bar{B}\,\bar{C}) = P(A-B-C) = P(A-(B\cup U) =$

$P(A-A(B\cup C)) =$

$P(A)-P(A(B\cup C)) =$

$P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC) =$

$0.45-0.10-0.08+0.03=0.30$

(2) $P(AB\bar{C}) = P(AB-C) = P(AB-ABC) =$

$P(AB)-P(ABC) = 0.10 = 0.03 = 0.07$

(3) $P(A\bar{B}\,\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\,\bar{B}C) =$

$P(A\bar{B}\,\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\,\bar{B}\,C) =$

$0.30+P(B-B(A\cup C))+P(C-C(A\cup B)) =$

$0.3+P(B)-P(BA)-P(BC)+P(ABC)+$

$P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) =$

$0.3+0.35-0.10-0.05+0.03+0.3-$

$0.08-0.05+0.03=0.73$

(4) $P(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC) =$

$P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC) =$

$P(AB)-P(ABC)+P(AC)-$

$P(ABC)+P(BC)-P(ABC) =$

$$P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)=$$

$$0.10+0.08+0.05-3\times 0.03=0.14$$

(5) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-$

$P(AB)-P(AC)P(BC)+P(ABC)=$

$0.45+0.35+0.3-0.1-0.08-$

$0.05+0.03=0.90$

(6) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.9=0.1$

(7) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)=$

$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)=$

$0.1+0.73=0.83$

例 1.3 从 0,1,2,…,9 等 10 个数字中任选出 3 个不同的数字,试求下列事件的概率.

$A_1=\{3$ 个数字中不含 0 和 $5\}$;

$A_2=\{3$ 个数字中含 0 但不含 $5\}$;

$A_3=\{3$ 个数字中不含 0 或 $5\}$.(1990 年试题)

解 随机试验是从 10 个数字中任取 3 个数字,样本空间 Ω 的样本点总数为 C_{10}^3.

如果取到的 3 个数字不含 0 和 5,则这 3 个数字必须在其余 8 个数字中取得,故事件 A_1 所包含的样本点数为 C_8^3,从而

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$

如果取得的 3 个数字中含 0,则需取到 0,再在其余 9 个数字中取 2 个数字,这样有可能取到 5,所以再将取到 5 有 $C_2^2C_8^1$ 种情况去掉,得事件 A_2 所包含的样本点数为 $C_1^1C_9^2-C_2^2C_8^1$,从而

$$P(A_2)=\frac{C_1^1C_9^2-C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{30}$$

如果记 B 事件"取得 3 个数字中不含 0",C 为事件"取得 3 个数字中不含 5",则 $A_3=B\cup C$,从而