现代数学

泛函分析及其应用

（第二卷）

P. 罗 曼 著

张元林 吉联芳 陈浩球 史玉清 译

江苏科学技术出版社

现代数学

泛函分析及其应用

（第二卷）

P. 罗曼 著

张元林 吉联芳
陈浩球 史玉清 译

江苏科学技术出版社

Paul Roman

Some Modern Mathematics Forphysicists and Other Outsiders

根据美国《Pergamon》出版有限公司1975年版翻译

现代数学

泛函分析及其应用

（第二卷）

P. 罗曼 著

张元林、古英芳 陈浩球 史玉清 译

出版：江苏科学技术出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：沭阳县印刷厂

开本787×1092毫米 1/32 印张12.875 字数273,000

1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷

印数1—2,680册

书号 13196·213 定价 2.45元

责任编辑 沈绍绪

译 序

本书作者P.罗曼(匈牙利人)是当代著名物理学家.1960年起在美国Boston大学任物理学教授，从事基本粒子、量子理论、场论以及数学物理等方面的研究．他曾写过《基本粒子理论》、《高等量子理论》、《量子场论》等公认的名著．他根据研究的需要写成本书，作为理论物理学家(特别是从事量子理论、高能物理、相对论以及近代统计物理等方面的工作者)、研究工程师以及某些从事结构研究(例如系统分析)的科学工作者必须掌握的一些现代数学内容.作者站在物理学家的角度，从抽象集合的结构与变换的统一观点出发，把现代数学中的重要内容，如近世代数、拓扑学、测度与积分理论、泛函分析等基本理论作了深入浅出的介绍．书中附有大量的有启发性的习题，书末不仅列出有关参考文献，而且附有作者对这些文献的评论．全书文笔流畅，说理清楚，脉络分明，直观性强，便于阅读.阅读本书只需具有微积分的基础和一定的数学素养.

本书可作为综合性大学和师范院校数学系高年级学生、物理系研究生、工科院校的有关研究生、应用数学专业某些课程的教材或教学参考书.

全书分两卷译出．第二卷由张元林、吉联芳、陈浩球、史玉清四同志翻译．其中第十章、第十一章由张元林同志翻译，第九章、第十二章由吉联芳同志翻译，第十三章陈浩球同志翻译，附录Ⅱ由史玉清同志翻译，在互校的基础上，最后由高金衡同志总校．译文力求符合原意，注意译文的准确性与文字的简明易懂.但由于水平所限，谬误之处在所难免.欢迎读者批评指正.

译　者

1982年12月

目　　录

附录

9

巴拿赫空间

在本书的第二部分，我们已经介绍了数学的基本结构．原则上讲，数学的整体不会比把这些基本结构有目的地、有系统地组合起来大多少．事实上，我们学过了“怎样产生代数”（代数结构），怎样表达几何问题以及怎样论述收敛性和连续性问题（拓扑体系），并且我们也学过怎样处理几何与微积分的“其余部分”（测度论和积分法）．值得指出的是，要记住所有这些概念都是作为实数性质的推广而来的．

总之，每个给定的系统都可以用指明其代数的、拓扑的和测度论的性质来加以刻划．例如，实数系统可以描述如下①：

（a）代数学上：是一个可换的实有序可除代数．

（b）拓扑学上：是一个局部紧的、单连通的、局部连通的、可分的、完备的度量空间（实际上是一维欧氏空间）．

（c）测度论上：是一个全σ-有限完备测度空间．

凡要知道关于“一维”代数、几何及实变量函数微积分的

---

① 我们假定，通常的、传统的结构都是在参考集上给定的．

一切，都可直接从这些基本结构推得.

留心的读者将会注意到，实轴上的三种类型的结构彼此并不是完全无关的.事实上，在它们之间存在着重要的相互联系，当人们注意到这些关系时，就可得到大量的知识，如果只单独注意一个或另一个类型的基本结构，是不能得出这些知识的.

这个简单的观察指出近代数学家实际上做的什么工作.他们把精力用于按照特殊观点去详细研究基本结构的重要组合上.基本数学结构的组合使得无穷无尽的越来越令人振奋的体系不断涌出，并且实际导致无限的新发现的财富.

对于组合不同的结构有几种可能的基本方法.在本书中，我们将注意这样的过程，即把一个拓扑结构叠加在一个已知代数结构上①.用这种方法得到的我们可以称之为"拓扑代数"，但是更一般地却称之为"泛函分析".应该指出，从历史上讲，"泛函分析"这个术语有时在略有不同的意义下使用，指的不是一个数学分支，而是一种观点，一种具有巨大统一威力的方法.从这个角度讲，泛函分析的基本特征就是研究映射，其中定义域和值域两者都具有一个或几个有意义的结构(代数的，拓扑的，和(或)测度论的).基于这一观点，我们可以说，我们已经论及了这个本质的问题.例如，压缩映射原理就是一个好的例证.但在以后的工作中，我们将以上述较精确的意义来理解"泛函分析"这一术语.

可以认为，泛函分析应从把拓扑结构叠合在已知的群结

① 测度论概念也将起重要作用，最初通过度量来构造拓扑，该度量反过来又借助于积分而得出.在详细研究几个具体构造时，积分理论也是一种必不可少的工具.

构上开始．这样便得到拓扑群的概念．但这些系统都十分复杂，因而从一个线性空间赋以拓扑结构开始较好[1]．这就得出了所谓拓扑线性空间的系统．在本章和下一章，我们就研究这种系统的结构．按照我们的标准步骤，将从最一般类型的拓扑线性空间开始，然后提出越来越多的特别要求，以对特殊类型的系统进行研究．

9.1 拓扑线性空间的一般概念

我们的目标是要把线性空间与迭合的拓扑结构组合起来．为了保证所得的组合结构不全然是平庸的，我们将不采用完全任意的拓扑，而宁可采用一个“与给定线性空间结构相容的”且和它有密切关系的拓扑．按照这个精神，我们从下面的基本定义开始．

定义9.1(1) 设$\mathscr{L}$是一个线性空间(用x，y，…表示其元素)．设K是和$\mathscr{L}$相关的数域[2]（用$\alpha,\beta,\cdots$表示其元素)．假设

(i)向量和$x+y$是$\mathscr{L}\times\mathscr{L}$上的连续函数；

(ii)数积αx是$K\times\mathscr{L}$上的连续函数．

那末我们称$\mathscr{L}$是一个拓扑线性空间．

为弄清本定义，需说明几点．首先，注意拓扑线性空间是一个有序三元组$(X,\mathscr{L},\tau)$，它由一个参考集X、一个在X上的线性空间结构$\mathscr{L}$及X上的一个拓扑τ所组成．然而，依照一

① 实际上，拓扑群的研究是把拓扑线性空间理论作为最重要工具来使用的．

② 正如我们在纯代数中所做的，我们只限于K为实数域或复数域的情况，相应地，就说成是实的或复的拓扑线性空间．

般的习惯和在不致引起混淆的情况下，我们将不把参考集X明显地表示出来，并且对于集合和对于其代数结构两者都采用同一记号$\mathscr{L}$．其次，我们回忆向量和乃是由$(x, y)\to x+y$所给定的映射$\mathscr{L}\times\mathscr{L}\to\mathscr{L}$．现在假定$\mathscr{L}$(或更确切地，它的参考集$X$)有一个拓扑$\tau$．于是，我们约定对$\mathscr{L}\times\mathscr{L}$(更确切地：$X\times X$)赋予乘积拓扑$\tau\times\tau$(参看第5.2节)．因此，现在讨论向量和映射$\mathscr{L}\times\mathscr{L}\to\mathscr{L}$的连续性是有意义的．类似地，数积是由$(\alpha, x)\to\alpha x$给定的映射．我们假定对数集(正如在上页脚注中指出的，取定它是实数或复数)赋予通常的度量拓扑τ_K，并且我们也考虑赋予乘积拓扑$\tau_K\times\tau$的$K\times\mathscr{L}$(更确切地，$K\times X$)．这样，讨论数积映射$K\times\mathscr{L}\to\mathscr{L}$的连续性是有意义的．于是拓扑线性空间的定义就要求$x+y$和$\alpha x$关于相应定义域和值域的相关拓扑是连续的．

应该很明显的是，已知一个线性空间$\mathscr{L}$，就可以在$\mathscr{L}$上确定几个(甚至是无穷多个)拓扑，关于这些拓扑，和与数积都是连续的．每个这样的拓扑都产生一个不同的拓扑线性空间．

略加考察可知，$x+y$和αx的连续性要求，可以详细说明如下：

(i)对于任意给定的一对$x, y\in\mathscr{L}$及$\mathscr{L}$中$x+y$的任意给定的邻域U，存在x的邻域V和y的邻域W，使得对任何给定的$v\in V$和$w\in W$，都有$v+w\in U$．

(ii)对任意给定的$x\in\mathscr{L}$，$\alpha\in K$及任意给定的$\mathscr{L}$中αx的邻域U，在$\mathscr{L}$中存在x的邻域V且在K中存在α的邻域S①，使得对于任何$v\in V$和任何$\beta\in K$，都有$\beta v\in U$．

① 因为此K是实数或复数的集合，邻域S实际上是包含α的一个开球，即分别为包含α的一个区间或圆盘．

为了阐明这些概念，我们考察两个非常简单的例子.

例α 设$\mathscr{L}$为任一线性空间并给它一个非离散的拓扑$\tau=\{\varnothing,\mathscr{L}\}$. 任意向量$x+y$的仅有的邻域$U$是$\mathscr{L}$本身. 类似地，$x$和$y$只有邻域$V=\mathscr{L}$和$W=\mathscr{L}$. 因此，对于任何一对$v$、$w$，和$v+w$一定在$U=\mathscr{L}$之中. 类似地，$\alpha x$具有的唯一邻域是$U=\mathscr{L}$，而$x$的唯一邻域是$V=\mathscr{L}$，所以对于任何$\beta$(不管是否在$\alpha$的邻域$S$中)，都有$\beta x\in U=\mathscr{L}$. 因此我们得到一个拓扑线性空间.

例β 设$\mathscr{L}$是一个任意的线性空间，而设τ是离散拓扑(一切开集). 设$x\neq 0$并取$\alpha=0$，使$\alpha x=0$. 选取单点集$\{0\}$作为αx的邻域U. 注意包含数$\alpha=0$的任何开球必定包含一个非零数β. 因此，不管考虑x的什么邻域V都至少包含一个非零向量(即x本身)，于是$\beta x\neq 0$，所以$\beta x\notin U$. 因此，数积的连续性准则不成立，于是没有得到拓扑线性空间；就我们的拓扑线性空间的定义而论，所取的拓扑与线性空间结构是“不相容的”.

最重要的拓扑线性空间总是那些从度量d引出的拓扑. 这样，我们可以定义一个度量线性空间作为三元组$(X,\mathscr{L},d)$，其中从d(通过开球)得来的拓扑，在定义9.1(1)的意义下与线性空间结构是相容的. 关于度量线性空间，连续性条件可以用下述较简单的方法表示：

(i)若$x_n\to x$，$y_n\to y$，必有$x_n+y_n\to x+y$.

(ii)若$x_n\to x$，$\alpha_n\to\alpha$，必有$\alpha_n x_n\to\alpha x$.

不用说，这里$x_n\to x$是指$d(x_n,x)\to 0$，即当$n\geqslant N$时$d(x_n,x)<\varepsilon$，等等；而$\alpha_n\to\alpha$只是指$|\alpha_n-\alpha|\to 0$，即当$n\geqslant M$时$|\alpha_n-\alpha|<\eta$. 此外，按照准则(ii)，(x_n)和(y_n)两个序列都

是独立收敛，但是两种情形都具有特殊的重要性．这些就是

(a)若α被固定，$x_n\to x$；则$\alpha x_n\to\alpha x$．

(b)若x被固定，$\alpha_n\to\alpha$；则$\alpha_n x\to\alpha x$．

在大多数情形，度量线性空间的度量具有一个特殊的性质①：它是一个不变度量．我们说一个度量是不变的，当且仅当对于$\mathscr{L}$的任意三个向量x、y、a，有

$$d(x+a,y+a)=d(x,y).$$

(即，“不变性”意指在任意平移下度量的不变性．)关于具有不变度量的度量空间，对于它是不是拓扑线性空间，检验其连续性大为简化，因为我们有下述定理．

定理9.1(1) 设d为线性空间$\mathscr{L}$上的一个不变度量．假设

(a)$x_n\to 0$和$y_n\to 0$意味着$x_n+y_n\to 0$，

(b)$x_n\to 0$和②$\alpha_n\to\alpha$意味着$\alpha_n x_n\to 0$．

那末$\mathscr{L}$是拓扑线性空间．

对于度量线性空间我们常常使用这个准则，它把连续性的检验简化为在零向量处的检验．该证明留给读者，参看问题9.1-4．现在我们举两个度量线性空间的例子．

例Y 具有通常线性空间结构及通常度量的实直线是一个度量线性空间．事实上，$d(x,y)=|x-y|$是一个不变度量；并且$x_n\to 0$，$y_n\to 0$意味着$|x_n+y_n-0|=|x_n+y_n|\leqslant|x_n|+|y_n|\to 0$；类似地，$x_n\to 0$和$\alpha_n\to\alpha$意味着$|\alpha_n x_n|=|\alpha_n|\,|x_n|\to 0$．用相似的方法，容易看出(问题9.1-5)，具有通常毕达哥

① 对于这种特别情形，许多作者使用“度量线性空间”这一名词．

② 在这里，$\alpha_n\to\alpha$不过是指(α_n)是收敛的数列．

拉斯(Pythagoras)度量的n-维向量空间R^n(即用标准度量把它作成欧氏n-空间E^n)就是一个度量线性空间.对于度量的各种推广及对无穷维空间同样正确.然而,这些空间都具有特殊的性质(内积和(或)范数),并在以下几节中详细加以考察.

例6 一个相当复杂的例子[①]以下列方式给出.设$(X,\mathscr{B},\mu)$是一个测度空间,而设E为具有有限测度的子集.考虑E上的所有实(或复)值可测函数类$\{\cdots, f, \cdots\}$.很明显,关于逐点和与数积,我们得到一个函数的线性空间$\mathscr{L}$.在此空间中定义

$$d(f, g)=\int_E \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|} d\mu.$$

即使f和g没有假定是可积的(甚至不是有界的),被积函数

$$\psi=\frac{|f-g|}{1+|f-g|}$$

仍可积.(这可从注意到ψ是可测的[②]与有界的,$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1$,因而根据定理8.3(9)可知$\psi$为可积.)因而,$d(f,g)$存在且对任意$f,g\in\mathscr{L}$为有限;而且它是非负的.对称性$d(f,g)=d(g,f)$是明显的.为了证明三角形不等式成立,注意对任何两个实数α和β,有

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\leqslant\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|},$$

所以对任意三个函数f、g、h,有

① 不愿阅读技术细节的读者,可以跳过讨论的第二部分.

② 注意到$|f-g|$为可测,$1+|f-g|$为可测且为正,因此$(1+|f-g|)^{-1}$为可测.

$$\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\leqslant\frac{|f-h|}{1+|f-h|}+\frac{|h-g|}{1+|h-g|}.$$

然后利用关于积分的定理8.3(4)，可知$d(f,g)\leqslant d(f,h)+d(h,g)$. 证毕. 但是我们仍然不能说$d$是$\mathscr{L}$上的度量.我们还应证明$d(f,g)=0$当且仅当$f=g$；但情况并非如此,因为$d(f,g)=0$即使$f\neq g$而仅要求$f\doteq g$.(其所以如此,是因为在零集上改变函数时积分值不变.)为了克服这一困难，首先注意$f\doteq g$在具有公共定义域的函数集合上是一种等价关系Q.因此,可以定义E上函数的等价类

$$[f]=\{h\mid h\doteq f\}$$

并构造商集$\mathscr{L}/Q$.如果定义 $[f]+[g]=[f+g]$和$\alpha[f]=[\alpha f]$,容易看出$\mathscr{L}/Q$是一线性空间. 然后我们在$\mathscr{L}/Q$上按照规定

$$\hat{d}([f],[g])=d(f,g)=\int_E\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}d\mu$$

定义一个度量$\hat{d}$,其中在等式右边的f与g分别是等价类$[f]$和$[g]$的代表元素[2].于是这是$\mathscr{L}/Q$上的一个真正度量，因为它显然具有已建立的一切性质,而且当$[f]\neq[g]$时,等式右边也不会为零,因为我们在积分一个正函数(且根据自然的假定$\mu(E)\neq 0$).于是我们可以从商空间$\mathscr{L}/Q$开始,它既是线性空间又是度量空间.然而,有一种较方便的方法，它使我们能够保留空间$\mathscr{L}$.这种方法在于把$\mathscr{L}$上的仅在一个零集上

① 可以验证，这些定义与代表元素的选择无关.

②很明显，积分的值不依赖于代表元素的选择.

不同的所有函数看做相等.于是,如果 $f \doteq g$,则认为这两个函数是$\mathscr{L}$上的同一个元素,而原来的度量 $d(f, g)$就变成$\mathscr{L}$上的可接受的度量.为了方便起见,我们就采用这一观点.下面要证明($\mathscr{L}, d$)为度量线性空间,即和与数积的必要的连续性质要成立.为此,需要下面的引理①.

引理 设(f_n)是E上的可测函数序列.则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,d\mu = 0$$

当且仅当任给$\delta > 0$,对于$|f_n(x)| < \delta$的可测集序列B_n②具有性质$\lim_{n\to\infty}\mu(B_n) = \mu(E)$.

引理的证明 (a)充分性.记$E = B_n \cup B_n^c$,并假定在B_n上有$|f_n(x)| < \delta$,因而在B_n^c上有$|f_n(x)| \geqslant \delta$;并假定当$n\to\infty$时$\mu(B_n)\to\mu(E)$.那末很明显,$\mu(B_n^c)\to 0$.于是可得

$$\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,d\mu < \int_{B_n}\frac{\delta}{1+\delta}\,d\mu + \int_{B_n^c}\max(\psi_n)\,d\mu$$

$$\leqslant \delta\mu(B_n) + \max(\psi_n)\cdot\mu(B_n^c)$$

$\left[\text{其中为了简单,记}\psi_n = \dfrac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\right]$,所以当$n$足够大时,不等式的右边就变成$\delta\cdot\mu(E)$,当$\delta$被选得足够小时,$\delta\cdot\mu(E)$要多小就多小.于是,当$n$充分大时左边的积分就变得要多小就多小.证毕.

---

①这个引理有一个以"测度收敛"的概念为基础的更一般的表达方法,参看Halmos[11],第90页,但我们不打算超过目前问题的范围.

② 很明显,序列(B_n)依赖于任意给定的δ.

(b)必要性. 假设[①] $\int_E \psi_n d\mu < \varepsilon$，只要 n 足够大. 设在 B_n 上 $|f_n(x)| < \delta$，因此在 B_n^c 上 $|f_n(x)| \geqslant \delta$. 可写作($n$ 足够大)

$$\varepsilon > \int_E \psi_n d\mu \geqslant \int_{B_n^c} \psi_n d\mu \geqslant \int_{B_n^c} \frac{\delta}{1+\delta} d\mu = \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \mu(B_n^c).$$

于是，对任何固定的 δ，$\mu(B_n^c) < \dfrac{1+\delta}{\delta} \cdot \varepsilon$，因此当 $n \to \infty$ 时 $\mu(B_n^c) \to 0$ 所以，$\mu(B_n) \to \mu(E)$. 证毕.

现在来证明空间$(\mathscr{L}, d)$服从于定理9.1(1)的准则. 明显地，d 是一个不变度量. 现在，用 o 表示零函数并 取 两个序列 $f_n \to o$, $g_n \to o$(即 $d(f_n, o) \to 0$, $d(g_n, o) \to 0$). 那就是

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu = 0 \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|g_n|}{1+|g_n|} d\mu = 0.$$

因此，根据引理的必要性部分，对任意给定的 δ_1 将存在一个序列 (B_n)，使得

$$在 B_n 上 |f_n(x)| < \delta_1 \quad 及 \mu(B_n) \to \mu(E);$$

而且对任意给定的 δ_2 将存在一个序列 $(\hat{B}_n)$，使得

$$在 \hat{B}_n 上 |g_n(x)| < \delta_2 \quad 及 \mu(\hat{B}_n) \to \mu(E).$$

现在设 $C_n = B_n \cup \hat{B}_n$. 如果回忆问题7.2a-1，我们知道

$$\mu(C_n) = \mu(B_n \cap \hat{B}_n) = \mu(B_n) + \mu(\hat{B}_n) - \mu(B_n \cup \hat{B}_n).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(E) + \mu(E) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n \cup \hat{B}_n).$$

---

① 我们再一次使用记号 $\psi_n = \dfrac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}$.

这里 $B_n \subset B_n \cup \hat{B}_n \subset E$，所以

$$\mu(B_n) \leqslant \mu(B_n \cup \hat{B}_n) \leqslant \mu(E),$$

而从 $\mu(B_n) \to \mu(E)$，即可推得

$$\lim_{n \to \infty} \mu(C_n) = \mu(E).$$

由于 $|f_n + g_n| \leqslant |f_n| + |g_n|$，在上述讨论中通过适当选择 δ_1 和 δ_2，在 C_n 上一定可以得到 $|f_n + g_n| < \delta$（其中 δ 如所希望的那样小），而且刚才已证明 $\mu(C_n) \to \mu(E)$. 所以，引理的充分性部分告诉我们

$$\lim_{n \to \infty} \int_E \frac{|f_n + g_n|}{1 + |f_n + g_n|} d\mu = 0, \text{ 或者 } d(f_n + g_n, o) \to 0.$$

从而 $f_n + g_n \to o$，这表明定理9.1(1)的准则(a)得到满足. 准则(b)可以类似地证明，甚至可更简单地进行，只要注意当 $|f_n(x)| < \delta$ 及 α_n 是收敛的，则 $|\alpha_n f_n(x)| = |\alpha_n| |f_n(x)| < |\alpha_n| \delta$，适当选择 δ，可使它要多小有多小. 总之，通过有意使用测度和积分理论，我们已经证明空间（$\mathscr{L}$，d）是拓扑（度量）线性空间.

现在我们转而研究拓扑线性空间的某些一般特点.

设 $\mathscr{L}$ 是拓扑线性空间，并设 $\mathscr{M}$ 是线性流形(即在向量和与数积下它是代数封闭的子集). 假设集合 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}$ 的闭子集(关于使 $\mathscr{L}$ 成为拓扑线性空间的拓扑). 则称 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个子空间①. 容易看出，由于和与数积的连续性，任意流形的(拓扑)

① 正如已经在第四章所提到的，许多作者对于任一线性流形使用"子空间"这一术语. 而我们称为子空间的则被称为"闭子空间". 我们将始终使用我们的名词，"拓扑线性空间的子空间"包含了拓扑闭性.