现代调节技术导论

龚乐年 编

东南大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了多变量控制系统分析与综合中经常遇到的十个方面的基本内容及其典型例解：状态空间方程的建立和导出，状态方程的解、系统特征方程与特征值及状态变量转换、可控性与可观性、极点配置、模态调节、有限时间调节、最优控制、李雅普诺夫稳定性理论、状态观测器。本书取材精练，深入浅出，且具一定深度。

本书可作为大学本科生、研究生、大专、职大等院校自动化、过程控制及其它机电专业现代控制理论课的教材或教学参考书，也可供有关科技人员参考。

现代调节技术导论

龚乐年　编

东南大学出版社出版

（南京四牌楼2号）

江苏省新华书店发行　武进县第三印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张：$13\frac{5}{16}$　字数：299千字

1991年2月第1版　1991年2月第1次印刷

印数：1—1500册

ISBN　7-81023-223-1

TP·16　定价：3.50元

责任编辑：王小然

前　　言

本书是编者在消化和吸收联邦德国部分调节理论教材、专著、资料、题解、实验指导书和多年从事自控理论教学与科研实践基础上编写而成的。目的在于为我国高校相应专业的本科生、研究生以及有关科技人员提供一本深入浅出、通俗易懂且具一定深度，又能在某种程度上反映联邦德国部分教材特点、风格及相应科研成果的多变量控制系统基础理论教材与读物，以实现自己多年的心愿。

借本书出版之机，对联邦德国斯图加特大学系统动力学与调节技术研究所所长、教授Gilles先生，博士Knöpp先生以及教授Zeitz先生多年来给予的帮助表示衷心谢忱。我校史维教授审阅了本书稿并提出宝贵意见，亦特此致谢。

由于编者业务与德语水平有限，书中不妥与谬误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者　1990年1月

于东南大学电气工程系

目　录

第一章　状态空间方程的建立和导出

本章主要介绍如何建立和导出调节对象或系统的状态空间方程。

自动控制过程总是同时间相联系的，因此描述它们的基本方法是微分方程及其时域解。但采用经典法解微分方程，特别是高阶微分方程较困难，有时甚至不可能，因此就出现了拉氏变换求解法，并相应地引出了传递函数概念及其一整套研究方法，这就是人们熟知的自控理论中的“频域法”，不过它只适用于线性定常系统。随着空间技术和现代化大生产的发展，特别是电子计算机的应用，从本世纪60年代起，自控理论已相应发展到第二阶段，即现代控制理论阶段。状态空间方程的导出及其求解逐渐成为描述和分析系统或调节对象，特别是多输入多输出系统（又称多变量系统）的基础，这就是所谓的状态空间法，即“时域法”。自控理论发展到现代控制理论阶段所以仍要采用“时域法”进行研究，其主要原因在于：对于非线性或时变系统，因与时间有关，频域法无能为力，只能采用时域法分析。即使是线性定常系统，也由于下述四方面的原因，采用时域法分析仍有其重要意义。

由于实际系统往往是一个复杂的高阶系统，因此利用状态微分方程组较利用传递函数描述可更好地了解系统控制过程的全貌。

一个实际系统的与时间有关的控制过程总是在计算机上求得的。特别是在进行控制运算时，人们常常要求出系统对初

始条件的反应，并且为配合分析与计算还常需改变这些初始条件。另外初始值问题的数值计算原则上要在时域中进行，并且如果系统用一阶微分方程组即状态方程描述的话，将会使这种计算变得十分容易。因此，状态空间法就成为系统数值计算的良好基础。

任何一个自控系统在分析时必须首先判断其可控性与可观性，而这两个重要概念只有在时域中才能定义和研究。

系统的结构最优分析必须在时域中进行，因为它的全部理论都是以矢量微分方程为基础的。

由于上述四方面的原因使自控理论的重点开始从频域法重新转移到本质上是时域法的状态空间法。状态空间法首先要解决的问题是建立和导出调节对象的状态（空间）方程，其中常采用下述四种不同处理方法：①由物理定律建立系统的状态空间方程，这是最原始的方法。②由高阶微分方程转换成状态空间方程。其实质在于通过采用中间变量（即状态变量），使描述系统的原高阶微分方程转换成一个一阶微分方程组，且方程数等于系统原微分方程阶数。③由已知系统的传递函数导出对应的状态空间方程。④由系统结构图导出对应的状态空间方程。

方法③、④意味着系统分析由频域法过渡到时域法，这在实际中常被采用。因为在许多情况下，一个动力学系统在频域中的数学描述往往是已知的。

1.1 由物理定律建立系统的状态空间方程

设某集中参数R-L-C网络如图 1.1 示。图中，u表示输入量（输入电压，系时间t的函数，下同），y_1，y_2表示输

出量（两个输出空载电压），各元件参数已知且为定值。

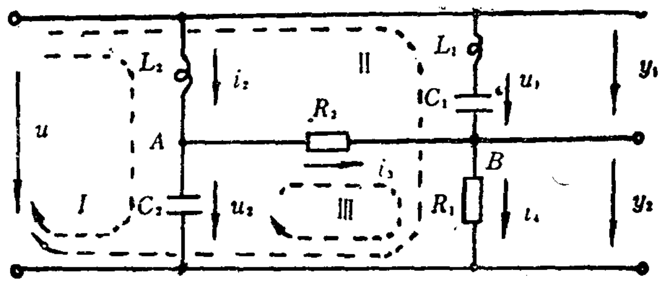

图 1.1

在状态变量尚未确定的情况下，可先任意选择如图示的五个变量：电容器上的两个电压u_1、u_2和三个支路电流i_2、i_3、i_4进行分析。后续分析将表明，五个变量中只有三个是独立的，另外两个变量可由三个独立变量确定。

由基尔霍夫第一定律（节点定律）有

节点 A　　$i_2 = i_3 + C_2\dot{u}_2$　　(1.1)

节点 B　　$i_4 = i_3 + C_1\dot{u}_1$　　(1.2)

由基尔霍夫第二定律（回路定律，假定的三个闭合回路如图1.1示）有

回路 I　　$L_2\dot{i}_2 + u_2 = u$　　(1.3)

回路 II　　$L_1C_1\ddot{u}_1 + u_1 + R_1 i_4 = u$　　(1.4)

回路 III　　$R_2 i_3 + R_1 i_4 - u_2 = 0$　　(1.5)

方程（1.1）～(1.5)中，五个变量只有i_3，i_4没有出现其一阶导数，因此i_3，i_4可不考虑用作为状态变量。因为在状态方程即一阶微分方程组中需用到状态变量的一阶导数。为此，可在上述方程中消去i_3、i_4。

由式(1.1)得

$$i_3 = i_2 - C_2\dot{u}_2 \tag{1.6}$$

代入式(1.2)有

$$i_4 = i_2 - C_2\dot{u}_2 + C_1\dot{u}_1 \tag{1.7}$$

又将式(1.6)、(1.7)代入式(1.5)有

$$i_2 = \frac{u_2 - R_1C_1\dot{u}_1}{R_1 + R_2} + C_2\dot{u}_2 \tag{1.8}$$

以及将式(1.7)代入式(1.4)有

$$L_1C_1\ddot{u}_1 + u_1 + R_1\ (i_2 - C_2\dot{u}_2 + C_1\dot{u}_1) = u \tag{1.9}$$

最后将式(1.8)代入式(1.9)得

$$L_1C_1\ddot{u}_1 + u_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2}(u_2 + R_2C_1\dot{u}_1) = u \tag{1.10}$$

方程(1.3)、(1.8)和(1.10)描述的就是系统的三个变量i_2、u_1和u_2与输入量u之间的关系。下面进一步分析输出量y_1、y_2与u之间的关系。由图1.1知

$$y_2 = R_1i_4 = R_1 \cdot \frac{1}{R_1 + R_2}\ (u_2 + R_2C_1\dot{u}_1) \tag{1.11}$$

$$y_1 = u - y_2 \tag{1.12}$$

注 式中$i_4 = \frac{1}{R_1 + R_2}(u_2 + R_2C_1\dot{u}_1)$可由式(1.4)与(1.10)比较后直接确定。

由以上分析知，消去i_3、i_4后，剩下的三个变量i_2、u_1和u_2将是独立变量，可选作为系统的状态变量。但上述获得五个方程(1.3)、(1.8)、(1.10)以及(1.11)、(1.12)还不能认为就是所需的状态空间方程的标准形式，这是因为：

① 在方程(1.10)中出现(状态)变量u_1的两阶导数，这在一阶状态微分方程中是不允许的。

② 在方程(1.8)中包含着两个不同（状态）变量u_1和

u_2的导数，这在一阶微分方程中也是不允许的。

③ 输出方程(1.11)和(1.12)不是代数方程（因y_2中包含$\dot{u}_1$），而在状态空间法分析中要求输出方程为代数方程。

④ 直观看，此R-L-C网络共有四个独立的储能元件L_1、L_2、C_1和C_2，故可用一个四阶微分方程描述，写成状态方程后，则应为一个具有四个状态变量并由四个一阶微分方程组成的方程组。现在只选择到三个独立变量，还差一个。为此可再选择一个与导数$\dot{u}_1$成正比的量作为第四个状态变量（理由见后述）。至此可定义并确定如下四个状态变量

$$x_1=u_1,\qquad x_2=C_1\dot{u}_1,$$
$$x_3=u_2,\qquad x_4=i_2 \tag{1.13}$$

并有

$$\text{由}x_1=u_1\text{有}\qquad \dot{x}_1=\dot{u}_1=\frac{1}{C_1}x_2 \tag{1.14}$$

$$\text{由}x_2=C_1\dot{u}_1\text{有}\quad \dot{x}_2=C_1\ddot{u}_1.$$

再将式(1.10)代入又有

$$\dot{x}_2=-\frac{1}{L_1}x_1-\frac{R_1R_2}{L_1(R_1+R_2)}x_2-\frac{R_1}{L_1(R_1+R_2)}x_3+\frac{1}{L_1}u \tag{1.15}$$

将式(1.13)代入(1.8)有

$$\dot{x}_3=\frac{R_1}{(R_1+R_2)C_2}x_2-\frac{1}{(R_1+R_2)C_2}x_3+\frac{1}{C_2}x_4 \tag{1.16}$$

以及将式(1.13)代入(1.3)又有

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{L_2}x_3 + \frac{1}{L_2}u \tag{1.17}$$

最后将式(1.13)代入两个输出方程(1.11)和(1.12)又可得

$$y_1 = -\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}x_2 - \frac{R_1}{R_1+R_2}x_3 + u \tag{1.18}$$

$$y_2 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}x_2 + \frac{R_1}{R_1+R_2}x_3 \tag{1.19}$$

至此，由式(1.14)～(1.19)可分别得到用矩阵形式表示的系统状态方程和输出方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1.21}$$

式中　$\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4]^T$，$\boldsymbol{u} = u$，$\boldsymbol{y} = [y_1,\ y_2]^T$。

以及

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1R_2}{L_1(R_1+R_2)} & -\frac{R_1}{L_1(R_1+R_2)} & 0 \\ 0 & \frac{R_1}{(R_1+R_2)C_2} & -\frac{1}{(R_1+R_2)C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1}{R_1+R_2} & 0\\ 0 & \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} & \dfrac{R_1}{R_1+R_2} & 0\end{pmatrix}\quad D=d=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

我们称由状态变量x_1、x_2、x_3、x_4及其一阶导数表示的一阶微分方程(1.14)～(1.17)为系统的状态微分方程；称用矩阵形式表示的方程(1.20)为系统的矢量状态方程并简称为状态方程，它表示一个一阶微分方程组；称方程(1.21)为系统的输出方程，又称观测方程。方程(1.20)和(1.21)合起来称为系统状态空间方程或状态空间表达式，并常假设：$\boldsymbol{x}$为n维（即n个分量）状态向量（列矢量），本例$n=4$；$\boldsymbol{u}$为p维控制向量（列矢量，又称输入向量），本例$p=1$（即标量）；$\boldsymbol{y}$为q维输出向量（列矢量），本例$q=2$。四个矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$统称为系数矩阵，其中各元素可以是常数（线性定常系统），也可以是时间的函数（线性时变系统，通常用$\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$、$\boldsymbol{C}(t)$、$\boldsymbol{D}(t)$表示）。本例四个系数矩阵系常数矩阵并可进一步表示为

$\boldsymbol{A}$：$(n\times n)$矩阵，称为系统矩阵，它往往是四个矩阵中唯一的一个方阵（本例为4×4方阵），由它可以确定系统内部的动力学特性，特别是它的稳定性。

$\boldsymbol{B}$：$(n\times p)$矩阵，称为控制矩阵或输入矩阵，本例为4×1矩阵即4维列矢量。

$\boldsymbol{C}$：$(q\times n)$矩阵，称为输出矩阵或观测矩阵，本例为2×4矩阵。

$\boldsymbol{D}$：$(q\times p)$矩阵，称为直联矩阵，本例为2×1矩阵即2维列矢量，它表示控制即输入量直接作用于输出。

由状态空间方程(1.20)、(1.21)可画出图1.2所示系统