龚冬保教授考研数学

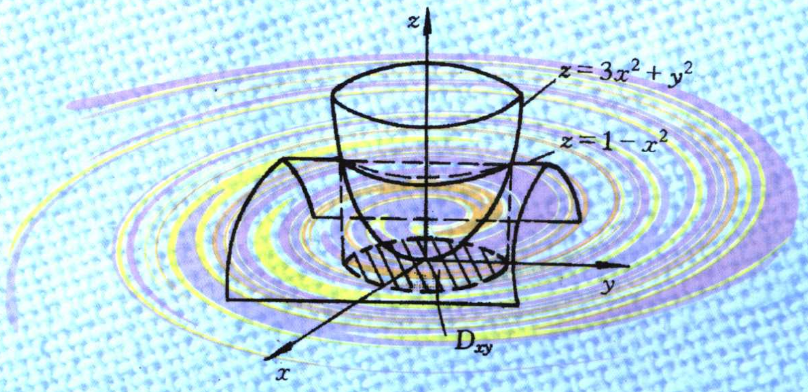
(2003版)

数学考研典型题

考卷分析 • 应试对策 • 全真模拟

龚冬保

魏战线　张永怀　魏立线



西安交通大学出版社

数学考研典型题

考卷分析·应试对策·全真模拟

（2003 版）

龚冬保　　魏战线
张永怀　　魏立线

西安交通大学出版社
·西安·

内 容 简 介

本书自1999年问世以来，在2000年考研中，书中36道题命中考题中非客观题(大题)27道(次)(数学一，8题49分；数学二，7题44分；数学三，6题41分；数学四，5题44分)；2000年修订后的第2版中相似题覆盖2001年考题66道(次)332分(数学一，68分；数学二，90分；数学三，83分；数学四，91分)；2001年修订后的2002版中覆盖2002年考题338分(数学一，87分；数学二，91分；数学三，81分；数学四，79分).2003版是最新的修订版。

本书由四部分组成：第一部分是考卷分析：对新"考试大纲"问世后2000～2002年的数学考研考卷作了列表分析，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了；第二部分是应试对策：讲的是复习备考及身临考场的策略；第三部分是典型题选讲与练习：选了1500余道题，其中500多道例题(包含了往届的考题)，讲解采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了答案与提示；第四部分是模拟题：数学一至数学四各一套，可供临考前热身。另外，附录中收录了2000～2002年考研试卷，并做了解答。

本书可供准备考研的读者使用，也可供大学数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研典型题：2003版/龚冬保等编著.—4版(修订版).
—西安：西安交通大学出版社，2002.5
ISBN 7-5605-1127-9

Ⅰ.数… Ⅱ.龚… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第13559号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路25号 邮政编码：710049 电话：(029)2668315)
陕西省轻工印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：26.75 字数：713千字
2002年4月第4版 2002年5月第1次印刷
定价：42.00元

2003 版前言

这已是本书的第 4 版了，前三版“典型题”经受了三年考研的检验，说明我们在认真研究考试大纲、把握主要的解题方法、以及认真分析近几年考卷的基础上，编制的例题与习题的针对性是很强的．当然，读者如果能反复作本书的“典型题”，练好扎实的基本功，特别是从练习中学会解题的思路、技巧和方法．这本书将能发挥更好的作用．

总结前三版的经验，并参考了广大读者的意见，这一版，我们对全部内容作了较大的修改：在第 1 章试卷分析中增加了“微观分析”一节；充实和加强了线性代数与概率统计的内容，删去了一些已考过且不太典型的题，线性代数例题增补到 110 题，概率论与数理统计例题增补到 77 题；模拟试卷做了很大的调整．

本书前三版受到读者的热爱，尤其许多人指出本书的不少错处，经我们检查，作了修正、在此，深表谢意！希望我们的书越改越好，对立志考上研究生的广大读者有益，是我们最大的心愿．

编者

2002.4 于西安交大

2002 版前言

本书出版已是第 3 个年头了。前两版经过 2000 年和 2001 年考研的检验，说明我们对历年考卷的分析，我们讲的复习与考试的策略，以及我们的典型题、模拟题的针对性是很强的。比如在 2000 年的第 2 版中，我们曾指出：在内容考点上，2000 年数学三、数学四未考矩阵——2001 年便出现了 6 分矩阵的题；在数学能力上，综合题将是一个重点——2001 年各套试卷中这一类的题都在 40 分以上。2001 年各试卷的选择题更加强了概念性的考核，题显得更难，但解起来更灵活，这正是我们在分析历年考卷后所强调的。例如我们的例 1.4 所强调的方法，正是今年数学一的填空题(4)所要用的方法……。至于在考试策略上，我们指出考研大纲规定的内容都会考到，且历年很少考的内容，考到的可能性将逐年增大，我们以曲率公式的一道题为例，今年数学二又一次出现此公式，而数学一也考到斯托克斯公式。当然，我们考试策略中更重要是启发读者能根据自己的实际情况来制订适合于自己实际的复习与考试策略。我们强调考生应通过复习，进一步提高自己的数学素养，提高分析问题与解决问题的数学解题能力，从而考出理想成绩。

通过两年考研题的对比，我们立足“典型题”的思路得到了检验。在本书所给出的 1 500 余道各种典型题及其他题目中，两年来在数学一至数学四的各套考研试卷中，都可找到 70 分以上的相似题；每年甚至都有一模一样的题！又如在第 2 版中我们精心设计了一套数学一至数学四各一份模拟试题，结果有近十道题次与 2001 年的考题相似，其中仅有的两道经济数学的题，全部扣中今年数学三、数学四的经济数学试题。因此，我们有信心这样说：认真阅读本书，定能在数学考研中取得理想成绩。

今年的 2002 版在第 1 章中增加了对 2001 年四套试卷的分析；增加了对 2001 年一些典型题的分析与解答；从第 2 章开始做了一些新的修改；重新出了数学一至数学四各一份模拟题；增加了 2001 年的四套试卷及答案；并附了一篇发表在《高等数学研究》上分析 2001 年数学一、数学二考题的文章。

希望本书能很好帮助准备考研的同学取得理想成绩，希望广大读者喜欢本书，更希望读者们不断提出批评与建议，以便使本书越编越好。

编者

2001.2 于西安交大

第2版前言

2000年元月23日中午，在西安交大教工餐厅，一位年轻人高兴地与本书主编打招呼，原来他参加了今年的考研，上午刚考完数学。他说今年数学一的题难，但多亏用了我们的"典型题"一书，而且他发现试题中有一道题，与我们书中的一道完全一样……。

待拿到今年的考研试卷后，我们惊奇地发现，数学一的试题中有两道题在本书中出现过，而且那道线积分的题在书中例题、练习题和模拟题中三度出现；此外与数学二的第六题基本相同的题也在本书的例题和练习题中两度出现。于是，我们作了个不完全的统计：2000年四套数学考研试卷中，有25道(次)6分以上的大题均可在本书中找到相似的题，至于从内容覆盖、解题方法和技巧去看，那更可以说，每份试题均在我们的预料之中！

有几道题一样，这是偶然的现象，但正如本书在应试对策中所说，我们是在熟悉考研大纲，认真分析历年考研试卷的基础之上，再根据编者多年的教学经验来编写本书的。由于我们不主张"题海"，所以精选了800多道典型的例题，经过与2000年考研试卷的对比，说明本书编写方向是对的。本书第1版问世半年多，也收到不少读者来信，对我们的书给予了充分的肯定，也指出了书中一些疏漏和错误，使编者深受鼓舞，并在此向广大读者致以衷心的感谢。

本书第2版在考虑了一些读者意见，参考2000年的数学考研试卷后，对第一版进行了修改，其中"试卷分析"、"应试对策"两章作了较大修改，提供了四套新的模拟试卷，对例题则只作了小的调整与增删。希望像第1版一样，本书能得到广大读者的关爱，也希望本书能成为准备投考硕士研究生的读者的好朋友。

编者

2000.4. 于西安交大

第1版前言

每当我们上了数学考研辅导课后，总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书。在考生朋友不断地鼓励和期盼下，我们终于写成了此书，希望它能成为众多考生的一个好朋友，陪伴着他们去数学考场"潇洒走一回"。

通过目录，读者可以了解到本书的特点：第一部分(第1章)是考卷分析。新的"考试大纲"是1997年开始执行的，数学一是工学类代表，数学三是经济类的代表。我们对1997至1999三年的六份考卷一一作了列表分析。通过这些表格，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了。只要看看六张表格中的数字，就能知道每套考卷主要考些什么。比如在数学能力方面，计算题基本上要占50分以上；在认知水平上，要求"理解"水平的题在一半左右；在难易程度上，中档题占一半左右，等等。这样，您看了本书第1章应当对数学考试"心中有数"了。进一步，如果您藉助我们设计的表格，按照自己的水平，去独立分析一两套试卷，那么就知道应当如何去准备这场考试了。因此，第1章是作复习前准备必不可少的。第二部分(第2章)是应试对策，讲的是复习迎考及身临考场的策略。在有一定数学水平的基础上，能不能考出理想成绩，就要看您的发挥了，如何能发挥好，应试策略是关键。而"策略"又是最容易被人们忽视的。"考试又不是打仗，讲什么策略"？岂不闻考场如战场，策略往往是成败的关键。我们写这一章也是个尝试，希望能引起考生对策略问题的重视。其实，对策是人们干什么事都应考虑的，所谓"优化运筹"不就是要寻找最优对策吗？有了好的复习迎考对策，在此基础上，订一个切实可行的计划，就可以帮助你以高效率和好效果较轻松地争取好成绩。第三部分(第3～12章)是典型题的选讲与练习，这是本书的主要部分。我们选了1 500多道题，其中500道例题，采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了答案与提示。要想考个好成绩，关键是提高解题能力。我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的。我们不主张单纯"猜题"，认为只要内容覆盖面全，主要方法都练到了，就能考好，比"猜题"更稳妥，而且有利于提高数学素养；第四部分(第13章)是模拟题，数学一和数学三各两套。在复习时，请先不要看模拟题，复习完临考前再用这两套题来进行两次"热身"。用三小时做一套题，看看自己究竟如何，最后找找差距。值得说明的是，本书中模拟题也有特色，它是以"从难、从严、从实战"出发设计的。每套试卷比正式考卷更难些，综合题、应用题多些，读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成，并能获得60分以上的平均成绩，那么，上了考场，正常发挥也一定能考60分以上。但您如果提前看过了题目，再去做效果就不好了。

以上是我们编写本书的主要想法，但总觉得编写仓促，书中可能会有不少的问题和漏洞，恳切地希望读者多多批评指正。

感谢西安交通大学出版社的支持，使这本书能以面世，感谢关心与鼓励我们的朋友们！

编者

1999.5 于西安交大

龚冬保 西安交通大学数学教授，全国优秀教师，多次获得国家、省、校级优秀教学成果奖，国家级工科高等数学、线性代数和概率统计试题库题库组骨干专家，多次参加考研及各类数学竞赛命题工作，长期担任考研辅导、数学竞赛教练工作，是经验丰富的教学、命题专家。

数学考研

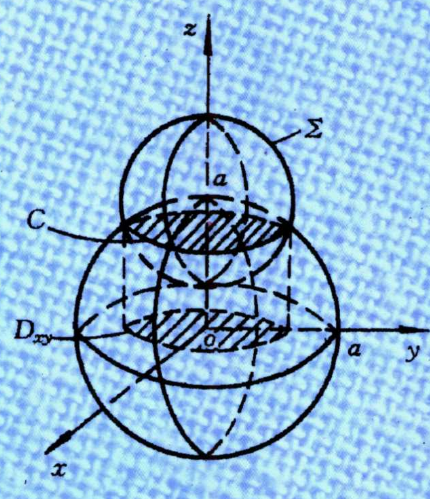
典型题

典型题例

考卷分析

应试对策

全真模拟



目　录

第1章 考卷分析

依据教育测量学理论,本章对2000年、2001年及2002年的全部四套考卷共12份进行了定量分析,以使考研同学较深入了解考研试卷的主要特征.

1.1 分析的必要性

为什么要分析已考过的试卷?不少考生甚至觉得刚考过的题肯定不会再考了,对分析已考过试卷的必要性持怀疑态度,因此,我们先简单说一下分析的必要性.

考试是一种心理测量,一份考卷好比一杆"秤".比如您上集市买菜,总要先看看秤一样,您准备考研究生,就得先分析考卷,看看在考试内容、考试难度、考题份量、认知和能力层次等等在每份考卷中是如何体现的,摸一摸近几年考卷的底,然后再制订适合自己的应试策略,从而减少复习迎考的盲目性.

对于考研试卷分析的方法,我们分为"微观分析"和"宏观分析"两种.首先作"微观分析",就是对试卷中每道试题都要认真作,边作边分析这道题的考点,解这个题的思路及主要方法是什么,这一类题在考研中的地位等等.在"微观分析"的基础上进一步作"宏观分析",我们的做法是,给每份试卷有一个表格,将这份试卷中的每道题的属性同数量表示在相应的空格之中,一份试卷一张表,只要看到表格中的数据,不必看具体的试卷本身,就可以了解这份试卷的考点分布、题型结构及整卷难度等等.

分析好,大有益.我们在本书中对12份试卷的分析,不仅仅是将分析结果告诉读者,更重要是希望读者学会本书介绍的分析方法,结合自己的实际,针对性更强地去独立分析自己准备投考的那一类考卷.以便作到对数学考研"心中有数".

1.2 微观分析举例

上面提到,微观分析就是对每份考卷的每道试题都要作,作一道分析一道.由于篇幅,我们不能将12份考卷中的每题都这样作,只是举几个例题,作为示范.

例1.1 (2002,Ⅲ、Ⅳ) 设$f(x)$在$[a,b]$上有定义,在(a,b)内可导,则

(A) 当$f(a)f(b)<0$时,存在$\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=0$.

(B) 对任意$\xi\in(a,b)$,有$\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.

(C) 当$f(a)=f(b)$时,存在$\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$.

(D) 存在$\xi\in(a,b)$,使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解 选(B)是十分明显的.$f(x)$在(a,b)内可导必在其内任何ξ处连续.故(B)成立.作为选择题,考概念理解能力的题较多.比如平时练习时,应会排除不正确的选项.如(A)、(B)、(C)成立只是差了$f(x)$在$[a,b]$上连续的假设,如设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则(A)成立的根据是介值定理;(C)成立的根据是罗尔中值定理;(D)成立的根据是拉氏中值定理.因此,要举

反例就很容易了：设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1\\ -1, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)\cdot f(1)=-1<0$，但 $f(x)\neq 0(x\in(0,1))$．请读者自己举出否定(C)、(D)选项的例子．

例 1.2 （2001，Ⅰ） 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在． (B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在．

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\sin h)$ 存在． (D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在．

解 选(B)．本题是概念性较强的题．只要对导数的定义有透彻理解，就能容易用排除法排除不正确选项．如，由定义知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$．而选项(A)、(C)中，相当于 x 的因式是 h^2，只能取正数趋于 0，不能作导数存在充要条件；而选项(D)中的极限存在与 $f(0)$ 的取值无关．也不能作可导充要条件．因而只有(B)是正确的选项．不必举反例，也不要会证明选项(B)的正确性．

作为平时的练习，深入分析本题，则可以有许多启发．首先，我们来举反例否定三个不正确选项．对(A)、(C)，可用同一反例：$f(x)=|x|$，满足 $f(0)=0$，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\dfrac{1}{2}$ 存在及 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=0$ 存在，但 $f(x)$ 在 0 点不可导，说明(A)、(C)选项均不对；对于(D)，令 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 也有 $f(0)=0$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在，而 $f(x)$ 在 0 点间断，故不可导．因此(D)也被排除．仿此，读者还可自己举出与上面不同的反例．顺便提及，本书的第 4 章之例 4.3、4.4、4.5 及其注释，与本题的考点及分析问题方法以及在那里我们列举的反例，均与本题是一致的．由于导数概念的重要性，此书的每一版都保留了这几个题．读者可对比着看，以加深对导数概念及其存在的充分条件．必要条件及充要条件的理解．

其次，我们来证明选项(B)的正确性．

必要性．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}=-f'(0)$ 存在．

充分性．对任意 $x\to 0$，取 $|x|<1$，令 $1-e^h=x$．或 $h=\ln(1-x)$．则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1-x)}$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在即 $f'(0)$ 存在．

细心的读者会问 由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}$ 令 $1-\cos h=x$，则 $x\to 0$．不是也有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{2}$ 存在吗．不是同样证明了选项(A)也是正确的吗?! 问题在哪里?! 原来，令 $1-\cos h=x$，由 $h\to 0$，只能有 $x\to 0^+$．因此，我们知道，选项(A)是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右导数存在的充要条件，因此，我们举反例只要举 $f(x)$ 在 $x=0$ 点右导数存在而导数不存在的例子；进一步看选项(C)，我们知道当 $h\to 0$ 时，$h-\sin h$ 是与 h^3 同阶的无穷小，因而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h-\sin h}{h^2}$．只要当 $h\to 0$ 时，$h\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 的极限

存在. $f'(0)$可以是无穷大量. 于是令 $f(x)=x^{2/3}$. 显然 $f(0)=0$, $f'(0)=\infty$不存在. 但 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(h-\sin h)^{2/3}}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{h-\sin h}{h^3}\right)^{2/3}=(\dfrac{1}{6})^{2/3}$存在.

至于选项(D), 如果我们令 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是有理数}\\ 1, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$, 那么, 总有 $f(0)=0$, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在,但 $f(x)$处处间断!

像这样去分析一道题,必定能作到举一反三、触类旁通，做一个题胜似做一类题.

例 1.3 (2002, Ⅰ). 设 $u_n\neq0(n=1,2,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}})$ (　　)

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 收敛性由所给条件不能判定.

解 选(C). 本题值的分析之处在于不少考生以为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}})$ 是交错级数,且$\dfrac{1}{u_n}$ 与$\dfrac{1}{n}$ 是等价无穷小,由莱布尼茨判别法它收敛,如加绝对值则发散. 故选(C). 这是不对的,理由是设 $a_n=\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}$, 由已知条件,无法证明 a_n 单调减. 而用莱布尼茨法则这一条是不可少的. 沿这个思路去想这个题,反倒是学习好的学生会选(D),因为他无法证明 a_n 的单调性.

其实要证明此级数收敛,应当用部分和:

$$S_n=(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2})-(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3})+(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4})\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_n}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}$$

故$\lim\limits_{h\to\infty}S_n=\dfrac{1}{u_1}$存在,从而级数收敛,且其和为$\dfrac{1}{u_1}$.

因此,此题如改成下面两种题更好.

其一, 仍是选择题, 只要改为“设 $u_n\neq0(n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{u_n}$(　　)”仍为原题的 4 个选项. 那么正确答案是(D),而不是(C).

为了排除选项(C), 我们可令$\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\ln(n+3)}$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u}{u_{n+1}}=1$, 但

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+3)},$$

前一个和式收敛,后和式一个发散,故发散. 这样一改对学习好的学生有利. 而且选项(C)有迷惑性.

其二. “设 $u_n\neq0(n=1,2,\cdots)$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}})$ 条件收敛,并求其和.

改为这样的非客观题,应当是较有水平的一道好题.

顺便指出,2002 年数学一这个题本身很好,但出成选择题不好;而 2002 年数学三的选择题二(2)小题则是一道出错了的题,即 4 个选项无一是对的. 关于这两道题的详细分析可参看本书的附录 C(将发表在《高等数学研究》杂志 2002 年第 2 期上的一篇文章).

例 1.4 (2002,Ⅱ). 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵,且 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$.

(1) 证明:$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆;

(2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由于逆矩阵来源于矩阵乘法的逆运算. 故求逆矩阵的一种方法是:求 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵,便设法去分解 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的因式,于是由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$,在等式两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$,并移项整理得

$$\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$$

得
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-4(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E}.$$

从而
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E},\ (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}).$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}$.

$$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

用分块矩阵求逆得

$$8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

分析 此题使我们想到 2000 年数学二的一道填空题:

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, 则$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$__________.

这个题的考点、思路与方法与 2002 年的题完全相同:为求$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$,先从 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$来分解 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 的因式: $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\Rightarrow\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$.

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$$

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

再联系 2001 年数学一的一道填空题:

设 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$, 则$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$__________.

解 还是分解 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的因式. $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})-2\boldsymbol{E}=0$. 故$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$

$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$.

这样分析,我们发现同样考点、思路和解法的题,连续三年分别在数学一和数学二中考到.那种认为考过的题不可能再考的说法显然是幼稚的.从表面上看,这三道题是不同的,但是经过分析,它们考点、解法思路均相同,这三道题属于“一样的”题型.再进一步想,在线性代数中,矩阵是重要的一章,而用分解因式方法求逆矩阵,几乎用遍了矩阵的代数运算及其性质,因此,这一类的题必定是考研的热点,值得考生注意.

以上是三道线性代数题,下来我们再看三道高数题.

例 1.5 (2001,Ⅲ、Ⅳ与 1991,Ⅰ、Ⅱ)

(1)(2001 Ⅲ). 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)dx\ (k>1)$,证明存在 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

(2)(2001 Ⅳ).设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(1)=3\int_0^{1/3}e^{1-x^2}f(x)dx$,证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

(3)(1991,Ⅰ、Ⅱ). 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,且 $3\int_{2/3}^1 f(x)dx=f(0)$.证明存在 $c\in(0,1)$ 使 $f'(c)=0$.

解 这三道题从考点、思路、解法上也是一样的题.我们只要解其中一题,其余两题读者一定能做.

(1)由 $f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)dx$,便知其第一步用积分中值定理.由积分中值定理得,存在 $\eta\in[0,\frac{1}{k}]$.使 $f(1)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$.再从要证明的结果知,将用罗尔定理,区间是$[\eta,1]\subseteq[0,1]$,辅助函数便是 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$. $F(x)$ 显然在$[\eta,1]$上连续,在$(\eta,1)$可导,且 $F(1)=f(1)=F(\eta)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$.故由罗尔定理知.存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,使 $F'(\xi)=0$.而

$$F'(x)=e^{1-x}f(x)-xe^{1-x}f(x)+xe^{1-x}f'(x)$$

于是 $F'(\xi)=0$ 即 $\xi f'(\xi)-(\xi-1)f(\xi)=0$,也就是

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$$

1991 年的数学一、二相当于现在的数学一.当年这套试卷的题所考的内容、思路、方法,10 年后在考经济类的数学三、四中出现了.可见将工学类的数学与经济类的数学截然分开是无必要的.另外,比较起来 2001 年经济数学的两道考题明显比工学类的“难”.因此,应当说,考试大纲中“考试内容与要求”提法一样的考点,不论是数学一、二或数学三、四的深度是相同的.由此,2000 年数学一、二、三、四共同考了一道高等数学的难题,也就不奇怪了.

1.3 宏观分析

我们用下面的表格,将考卷的一些特征数量化,通过一些数字的简单计算,就可以了解每套考卷的特点和各套考卷的共性.值得说明的是,我们这种分析不是考后的统计分析,考后的统计分析能评价试卷的“好与差”,主要提供考试管理人员、命题教师参考,当然,也可以提供考

生参考.但那种分析要有足够的样本,才可以作到分析的客观性.我们的这种分析是根据自己的教学经验,对考生水平的估计而作出的.虽说主观,却能结合考生实际,来解释客观事实,读者如能将这种分析和相应的统计分析参照对比,就更完美了.

先对数据各项目作个简单说明.

各课程的章目是按考研大纲所列内容的次序排列的,我们将章名限制在四个字以内,有的章的内容不能用四个字概括则略写.现在把略写的章名用括号说明如下:

函数极限(连续);(向量代数)空间解几;随机事件(和概率);随机变量(概率分布);二维(随机变量及其概率)分布;其余的章目估计不会引起误会,就不作说明了.如大数定律一章自然也包含中心极限定律等等.读者如有不清楚的可参考“考研大纲”.

认知层次一栏中的“简用”是指简单应用,表示能将有关知识在另一个新环境中进行应用;“应用”是指复杂应用,表示能将有关知识在两个以上新环境中进行应用.

“期望”是指整卷的难度期望分,其计算方法见表 1.1 后面的难度分析.表格中的“分值”填写的是试题中各章内容在各个类别中所占的分数.

(1) 2000 年数学一试卷

表 1.1　2000 年数学一分析统计表

课程	章目 \ 分值 \ 类别	数学能力					认知层次					难度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
高等数学	函数极限		5					5						5			5
	一元微分	3		2					3	2					3	2	5
	一元积分		3	4			3			4		3				4	7
	空间解几																
	多元微分		8				3	5				3	5				8
	多元积分	3	6		2	7		3	15				3		15		18
	无穷级数	3	6					9						3	6		9
	微分方程		3		5		3		5				3		5		8
线性代数	行列式																
	矩　阵		6			3		6		3				6		3	9
	向　量	3						3							3		3
	方程组		3					3					3				3
	特征向量					5				5						5	5
	二次型																
概率统计	随机事件		3					3					3				3
	随机变量																
	二维分布																
	数字特征	3	8						11				3		8		11
	大数定律																
	统计概念																
	参数估计		6				6						6				6
	假设检验																
	合计	15	57	6	7	15	15	37	34	14		6	26	14	40	14	期望50.8