



世纪

高等学校数学辅导教材

NEW

- 本科学习同考研复习的有机对接
- 同步训练与应试模拟的紧密配合

高等数学 (下册)

全程

(同济大学·高等数学第五版)

学 → 练 → 考

谢崇远 曾 冰 张秀华 编著

- ★ 本科生：同步训练的良师益友
- ★ 考研者：全程复习的首选读本
- ★ 自学者：学习提高的最佳选择



NEUPRESS
东北大学出版社

21 世纪高等学校数学辅导教材

高等数学

全程学·练·考

(同济大学·高等数学 下册 第五版)

谢崇远 曾 冰 张秀华 编著

东北大学出版社

• 沈 阳 •

© 谢崇远等 2004

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 (下册) 全程学·练·考 / 谢崇远, 曾冰, 张秀华编著.

— 沈阳: 东北大学出版社, 2004

(21 世纪高等学校数学辅导教材)

ISBN 7-81054-847-6

I. 高… II. ①谢… ②曾… ③张… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 104664 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 沈阳市政二公司印刷厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

幅面尺寸: 140mm × 203mm

印 张: 12.625

字 数: 410 千字

出版时间: 2004 年 2 月第 1 版

印刷时间: 2004 年 2 月第 1 次印刷

印 数: 5000 册

责任编辑: 郭爱民 张德喜

责任校对: 文 韬

封面设计: 唐敏智

责任出版: 杨华宁

定 价: 16.80 元

前 言

《高等数学全程学·练·考》(同济大学·第五版)是一本学习与复习大学高等数学的辅导教材.主要是为大学非数学专业本科生与全国硕士研究生入学统一考试应试者系统地复习“高等数学”内容,以求巩固提高所学知识,取得良好的考试成绩而编写的.在选材原则与教学要求上,该书根据原国家教委(现教育部)组织制定的《全国普通高等学校工科本科专业教学计划》中的“高等数学课程教学基本要求”以及教育部制定的2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中“高等数学”部分的考试要求确定编写内容.

本书是编著者根据多年的教学经验,依据对课程内容的研究和理解,并在综合分析学生认识规律的基础上编写而成.本书共分5章.第八章由张秀华编著,第九章,第十章由谢崇远编著,第十一章,第十二章由曾冰编著.车向凯教授对本书进行了认真的审阅,并提出了许多宝贵的意见,在此谨向他表示衷心的感谢.

本书的结构特点是,首先指出各章节教学要求、考研要求以及各章节内容的重要知识点、难点和考点,然后就高等数学的基本概念和基本方法,向读者提供大量有价值 and 具有典型性的例题、练习题以及

考试模拟题。

本书从国内外多种有关高等数学的教材及参考书中选取了众多具有代表性的典型例题，并精选了近十年来全国硕士研究生入学统考试题（包括数学一和数学二），对这些典型例题进行详尽的解题思路分析和方法技巧上的指导，对容易出现错误的地方给予提醒，这对于读者深刻理解有关的基本概念，灵活运用基本方法，培养和提高综合分析问题和解决问题的能力诸多方面定会有极大的裨益。

同步练习题部分是对教材（同济大学·第五版）各章节后面的部分习题及每章的总习题的解答，便于读者学习教材时分析、对照和检查。

全书汇集了各部分章节的典型例题、练习题、全真模拟试题共近千道题。

本书的编写工作得到东北大学出版社有关同志的大力支持，他们为本书的编写提出了许多好的建议，并为全书的编审作出了大量出色的工作，这里向他们表示衷心的感谢。

限于编著者水平及撰稿时间仓促，书中如有疏漏之处，敬请读者批评指正，以便在本书再版时修改，使其更臻完善。

作 者

2003 年 10 月

目 录

前 言

第八章 多元函数微分法及其应用	1
一 教学要求·考研要求	1
二 知识点·难点·考点	2
三 全程典型例题精析	10
四 教材同步习题选解	46
五 全真模拟试题检测	62
全真模拟试题答案或提示	67
第九章 重积分	69
一 教学要求·考研要求	69
二 知识点·难点·考点	70
三 全程典型例题精析	79
四 教材同步习题选解	114
五 全真模拟试题检测	149
全真模拟试题答案或提示	155
第十章 曲线积分与曲面积分	158
一 教学要求·考研要求	158

二	知识点·难点·考点	159
三	全程典型例题精析	174
四	教材同步习题选解	209
五	全真模拟试题检测	237
	全真模拟试题答案或提示	245
第十一章 无穷级数		249
一	教学要求·考研要求	249
二	知识点·难点·考点	250
三	全程典型例题精析	257
四	教材同步习题选解	273
五	全真模拟试题检测	304
	全真模拟试题答案或提示	310
第十二章 常微分方程		314
一	教学要求·考研要求	314
二	知识点·难点·考点	315
三	全程典型例题精析	320
四	教材同步习题选解	336
五	全真模拟试题检测	390
	全真模拟试题答案或提示	394

第八章 多元函数微分法 及其应用

很多实际问题往往涉及多个变量相互联系、相互依赖、相互制约的情形,抽象为数学上的概念,就是多元函数。本章在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分法及其应用。讨论中以二元函数的微分法为主,这些结果不难推广到 $n(>2)$ 元函数。



● 一 教学要求·考研要求 ●



(一) 大学本科教学基本要求

1. 理解多元函数的概念。
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念,以及有界闭区域上连续函数的性质。
3. 理解偏导数和全微分的概念,了解全微分存在的必要条件和充分条件。
4. 了解方向导数与梯度的概念及其计算方法。
5. 掌握复合函数一阶偏导数的求法,会求复合函数的二阶偏导数。
6. 会求隐函数的偏导数。
7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面与法线,并会求出它们的方程。
8. 理解多元函数极值和条件极值的概念,会求二元函数的极值。了解求条件极值的拉格朗日乘数法,会求解一些较简单的最大值和最小值的应用问题。



(二) 全国硕士研究生入学统一考试数学中 高等数学部分(数学一)的考试要求

1. 理解多元函数的概念, 理解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念, 以及有界闭区域上连续函数的性质.
3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念, 会求全微分, 了解全微分存在的必要条件和充分条件, 了解全微分形式的不变性.
4. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.
5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.
6. 会用隐函数的求导法则.
7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念, 会求它们的方程.
8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.
9. 理解多元函数极值和条件极值的概念, 掌握多元函数极值存在的必要条件, 了解二元函数极值存在的充分条件, 会求二元函数的极值, 会用拉格朗日乘数法求条件极值, 会求简单多元函数的最大值和最小值, 并会解决一些简单的应用问题.



● 二 知识点·难点·考点 ●



(一) 知 识 点

⇒ 1. 二元函数的定义

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集, 称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数, 通常记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

或

$$z = f(P), \quad P \in D,$$

其中 x, y 称为自变量, z 称为因变量, 点集 D 称为该函数的定义域.

⇨ 2. 二元函数的几何意义

二元函数在几何上通常表示空间曲面.

⇨ 3. 二元函数的极限

设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 δ , 使得当点 $P(x, y) \in D \cap \dot{U}(P_0, \delta)$ 时, 都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \epsilon$$

成立, 那么就称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限, 记做

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \text{ 或 } f(x, y) \rightarrow A ((x, y) \rightarrow (x_0, y_0)),$$

也记做

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \text{ 或 } f(P) \rightarrow A (P \rightarrow P_0).$$

二元函数的极限也叫做二重极限.

⇨ 4. 多元函数的连续性

定义 设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点, 且 $P_0 \in D$, 如果

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续.

该定义也可以写成 $\epsilon-\delta$ 语言的形式.

定理(有界性与最大值最小值定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 必定在 D 上有界, 且能取得它的最大值和最小值.

定理(介值定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

⇨ 5. 偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数. 记做

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z_x(x_0, y_0) \text{ 或 } f_x(x_0, y_0).$$

同样可以定义函数 $z = f(x, y)$ 关于 y 的偏导数

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

⇒ 6. 混合偏导数与求导次序无关条件

如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续, 那么在该区域 D 内, 必有 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

⇒ 7. 函数的可微性

定义 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$ 而仅与 x, y 有关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分, 而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分, 记作 dz , 即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

定理(必要条件) 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分, 则该函数在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在, 且函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

定理(充分条件) 如果函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 连续, 则函数在该点可微分.

一般记 $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, 则函数 $z = f(x, y)$ 的全微分可写为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

⇒ 8. 多元复合函数的求导法则

(1) 如果函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 处有偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 处有连续偏导数, 那么复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 处有关于 x 或 y 偏导数, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2) 设函数 $z = f(u, v, w)$ 有连续偏导数, 而函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y), w = \zeta(x, y)$ 偏导数存在, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y), \zeta(x, y)]$ 偏导数存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

(3) 设函数 $z = f(u, x, y)$ 具有连续偏导数, 函数 $u = \varphi(x, y)$ 偏导数存在, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), x, y]$ 的偏导数存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

(4) 设 $z = f(u, v, w)$ 具有连续偏导数, 函数 $u = \varphi(t), v = \psi(t), w = \zeta(t)$ 可微, 则复合函数 $z = f[\varphi(t), \psi(t), \zeta(t)]$ 可微, 且

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dt}.$$

通常称它为全导数.

⇨ 9. 隐函数求导公式

由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = f(x)$, 且 $F(x, y)$ 有连续的偏导数, $F_y(x, y) \neq 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定隐函数 $z = f(x, y)$, 且 $F(x, y, z)$ 有连续的偏导数, $F_z(x, y, z) \neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

⇨ 10. 空间曲线的切线与法平面

(1) 曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = w(t) \end{cases}$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 切线与法平面方程分别为

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{w'(t_0)},$$

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + w'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

(2) 曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 在 M_0 点切线的方向向量为:

$$s = \{F_x(M_0) F_y(M_0) F_z(M_0)\} \times \{G_x(M_0) G_y(M_0) G_z(M_0)\}.$$

⇒ 11. 曲面的切平面与法线

(1) 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面与法线方程分别为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面与法线方程分别为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

⇒ 12. 方向导数

(1) 定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内有定义, 自点 P_0 引射线 l , $P(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ 为 l 上另一点, 且 $P \in U(P_0)$, $|PP_0| = t$.

如果

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 沿方向 l 的方向导数, 记做

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)}.$$

(2) 计算公式

函数 $z = f(x, y)$ (或 $u = f(x, y, z)$) 在可微点处沿任何方向 l 的方向导数都存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin\alpha.$$

$$\left(\text{或 } \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right).$$

其中 α 为 l 与 x 轴正向的夹角 (α, β, γ 为方向 l 的方向角).

⇒ 13. 梯 度

设函数 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 则对于每一点

$P_0(x_0, y_0) \in D$, 向量

$$f_x(x_0, y_0)i + f_y(x_0, y_0)j$$

称为函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的梯度, 记做 $\text{grad}f(x_0, y_0)$.

⇨ 14. 多元函数的极值

(1) 定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义, 对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 的点 (x, y) , 都有 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, 则称函数在点 (x_0, y_0) 有极大值 $f(x_0, y_0)$; 若都有 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, 则称函数在点 (x_0, y_0) 有极小值 $f(x_0, y_0)$. 极大值、极小值统称为极值, 使函数取得极值的点 (x_0, y_0) 称为极值点.

(2) 函数在点 (x_0, y_0) 取极值的条件

定理(必要条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数, 且在点 (x_0, y_0) 处有极值, 则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

定理(充分条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数, 又 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$, 记

$$f_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处

① 当 $AC - B^2 > 0$ 时具有极值, 且当 $A < 0$ 时有极大值, 当 $A > 0$ 时有极小值;

② 当 $AC - B^2 < 0$ 时没有极值;

③ 当 $AC - B^2 = 0$ 时不能确定.

⇨ 15. 多元函数极值的求法

(1) 无条件极值

① 求驻点, 即求方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 的一切实数解.

② 对所得到的每一个驻点 (x_0, y_0) , 求出相应的 A, B, C .

③ 判定 $AC - B^2$ 的符号, 由充分条件定理判定 $f(x_0, y_0)$ 是否为极值、是极大值还是极小值.

(2) 条件极值(拉格朗日乘数法)

求 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值.

① 作辅助函数(拉格朗日函数)

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

其中 λ (称拉格朗日乘数) 是待定常数.

② 求可能极值点, 解方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0 \\ L_y = f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

消去 λ 解出 x, y , 则 (x, y) 是可能的极值点.

③ 判定上述点是否为极值点.

【注】 用拉格朗日乘数法解条件极值可推广到 n 元函数的情形. 例如

求 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 下的极值. 可以作辅助函数

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi(x, y, z) + \lambda_2 \psi(x, y, z),$$

其中 λ_1, λ_2 是待定常数. 求其一阶偏导数, 并使之为零, 然后与

$$\varphi(x, y, z) = 0 \text{ 及 } \psi(x, y, z) = 0$$

联立求解, 这样得出的方程组的解 x, y, z 就是可能为极值点的坐标.

如何确定所求点是否为极值点, 在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定.

⇨ 16. 极限、连续、可微、可导、方向导数的关系图

极限 $\nrightarrow$ 连续 $\nrightarrow$ 可微 $\nrightarrow$ 方向导数存在

$\nearrow \searrow$

可偏导 $\nrightarrow$ 偏导数连续

【注】 “ $\rightarrow$ ”表示“一定成立”, “ $\nrightarrow$ ”表示“不一定成立”.



(二) 难 点

⇨ 1. 重极限与特殊方式极限的区别与联系

(1) 当动点 P 以某一特殊方式趋于 P_0 时, 函数无极限, 可断定函数当 P 趋于 P_0 时, 重极限不存在.

(2) 当动点 P 以两个不同方式趋于 P_0 时, 函数有不同的极限值, 可断定函数当 P 趋于 P_0 时, 重极限不存在.

(3) 若先证明当 P 趋于 P_0 时函数的重极限存在, 再按某一特殊方式让 P 趋于 P_0 求出函数的极限, 则所求极限就是函数的重极限.

⇒ 2. 极限、连续、可导、可微之间的关系及计算

参见(知识点)的第16条的关系图,具体可以见后面的例题部分.

⇒ 3. 带有抽象函数的复合函数偏导数的计算

(1) 在求“抽象”的复合函数的偏导数时,采用记号 f'_i , f''_{ij} , 其中 i, j 均为正整数. f'_i 表示函数 f 对它的第 i 个中间变量(即 f 的第 i 个“位置”的变量)的偏导数. f''_{ij} 表示函数 f'_i 对它的第 j 个中间变量(即 f'_i 的第 j 个“位置”的变量)的偏导数.

(2) 在求“抽象”的复合函数的二阶偏导数时,函数 f'_i 的变量关系图与函数 f 的变量关系图完全一致(即 f'_i 与 f 的中间变量形式完全相同).

⇒ 4. 求隐函数的导数或偏导数

求隐函数的导数或偏导数,一般采用公式法和直接法.使用公式法时,应注意下面两点:

(1) 所取的 F 应满足 $F=0$;

(2) 不论是求导数,还是求偏导数,公式均可归结成一句话:“负倒数”.例

$$\text{如: } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}.$$

利用直接法求隐函数偏导数的步骤如下:

(1) 把函数看成是中间变量,将方程两端分别对自变量求偏导数;

(2) 从已求偏导数的方程中解出偏导数.

⇒ 5. 求多元函数条件极值(拉格朗日乘数法)

依题意列出目标函数 f , 参见(知识点)15条(2).



(三) 考 点

1. 多元函数表达式及定义域的求法

2. 极限、连续、可导、可微概念与计算

3. 偏导数 全微分

(1) 显函数给出的函数的偏导数或全微分.

(2) 隐函数给出的函数的偏导数或全微分.

(3) 复合函数的偏导数或全微分.

(4) 求抽象函数的偏导数、二阶偏导数.

4. 复合函数、隐函数的求导运算

5. 方向导数、梯度概念与计算

6. 几何应用

- (1) 空间曲线的切线与法平面方程.
- (2) 曲面的切平面与法线方程.
- (3) 利用相关知识的证明问题.

7. 极 值

- (1) 求函数的极值点、最大值点、最小值点.
- (2) 求函数的无条件极值.
- (3) 求条件极值(分析、构造目标函数).
- (4) 利用条件极值证明不等式.



● 三 全程典型例题精析 ●



(一) 多元函数概念题

【例 8-1】 若 $f\left(x-y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 试求 $f(x, y)$ 的表达式.

【分析】 为了求出 $f(x, y)$, 只要将已知等式的右端化成 $x-y$ 与 $\frac{y}{x}$ 的因式, 故可做变量代换.

【解】 设 $u = x - y$, $v = \frac{y}{x}$, 得 $x = \frac{u}{1-v}$, $y = \frac{uv}{1-v}$.

$$\text{则} \quad f(u, v) = \left(\frac{u}{1-v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1-v}\right)^2 = \frac{u^2(1+v)}{1-v},$$

$$\text{因此} \quad f(x, y) = \frac{x^2(1+y)}{1-y} \quad (y \neq 1).$$

【例 8-2】 设 $u(x, y) = y^2 \Phi(3x+2y)$, 若 $u\left(x, \frac{1}{2}\right) = x^2$, 求 $u(x, y)$ 的表达式.

【解】 由 $u\left(x, \frac{1}{2}\right) = x^2$ 得 $\Phi(3x+1) = 4x^2$.

设 $3x+1=w$, 则 $x = \frac{w-1}{3}$, 于是 $\Phi(w) = \frac{4}{9}(w-1)^2$

$$\text{所以} \quad \Phi(3x+2y) = \frac{4}{9}(3x+2y-1)^2,$$