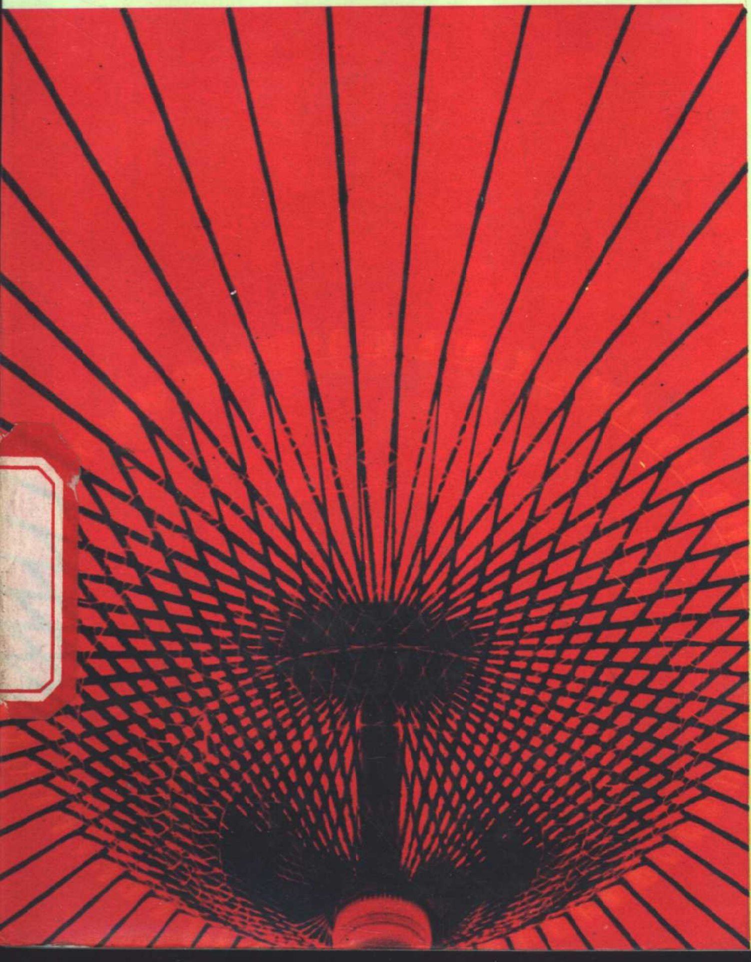
数学·计算·逻辑

MATHEMATICS · COMPUTATION · LOGIC

走向数学丛书

陆汝钤 著



走向数学丛书

数学·计算·逻辑

陆汝钤　著

湖南教育出版社

数学·计算·逻辑

Mathematics · Computation · Logic

陆汝钤 著

Lu Ruqian

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行（东风路附1号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

787×1092毫米　32开　印张：4.375　字数：90000

1993年4月第1版　1993年4月第1次印刷

ISBN 7－5355－1580－0/G·1575

定价：3.25元

本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换

《走向数学》丛书编委会

“走向数学”丛書

陳省身題

作 者 简 介

陆汝钤，江苏苏州人，1935年生。1959年毕业于前民主德国耶拿大学数学系。同年起在中国科学院数学研究所工作，从事多复变数函数论的研究。1972年起转入计算机科学领域，1983年晋升为研究员，次年起任博士生导师，发表科研论文近60篇。出版的著作有《人工智能》，《软件移植——原理和技术》，《计算机语言的形式语义》等。

前　言

王　元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学. 一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三、四年有数学课. 可见数学之重要与其应用之广泛.

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏. 我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的. 近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握. 我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质. 显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到. 若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解. 这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量用深入浅出

的语言来讲述数学的某一问题或方面，使工程技术人员，非数学专业的大学生，甚至具有中学数学水平的人，亦能懂得书中全部或部分含义与内容.这对提高我国人民的数学修养与水平，可能会起些作用.显然要将一门数学深入浅出地讲出来，决非易事.首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解.从整体上说，我国的数学水平还不高，能否较好地完成这一任务还难说.但我了解很多数学家的积极性很高，他们愿意为“走向数学”撰稿.这很值得高兴与欢迎.

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持，得以出版这套“走向数学”丛书，谨致以感谢.

目　录

第一章 计　　算

——它不仅仅是一位匠人

数学不等于计算，但数学的最早来源是计算．它诞生于人类生产实践中对计算的需要，数字本身就是这样产生的．有人考证过数字“二”的出现，据说这表示了双手各拿一件物品．为了表示“三”，除双手拿物品之外，还要把第三件物品放在自己的脚边，“三”的特征就是举起双手和指定一只脚．“四”可以用两只手和两只脚表示，等等．此外，手指也是表示数量的最早工具．为什么世界最通用的是十进制，而不是九进制或十一进制？据说这和人有十个指头有关．在长期的发展中，人们逐渐抛弃了以具体物件表示数的做法，慢慢地抽象出数的概念．

记数术可以说是最早的数学，从屈指记数，结绳计数，到在木棍或骨片上刻符记数，以及书写文字记数，经历了漫长的年代．据史书记载，世界上几个最早的记数系统的出现年代大致如下：

1. 古埃及象形数字（公元前 3400 年左右）．
2. 巴比伦楔形数字（公元前 2400 年左右）．
3. 中国甲骨文数字（公元前 1600 年左右）．

4. 中国算筹(公元前 500 年左右).

十进制数的出现是一个伟大的事件,它是一种位置记数法,其中每个数字的含义与数字所处的位置有关,19≠91. 十进制技术的核心是使用数字零,不然,91 和 901,910 等就无法区分了. 一般认为公元 600 年前后在古印度数学中明确形成了方便的十进制记数,包括零的使用. 这套方法后来传到阿拉伯地区,以致一直以阿拉伯数字的称呼流传后世. 实际上,世界上最早的十进制数表示法是中国的算筹记数法,其中包括了零的应用. 用算筹表示数字,有纵横两种方式:

纵式:	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨	空格
横式:	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱	空格
含义:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

使用时规定个位数用纵式表示,十位数以上交叉使用,例如,314159265 表示为

𝍢 𝍩 𝍣 𝍩 𝍤 𝍱 𝍡 𝍮 𝍤

几何计算也来自生产实践. 古埃及的尼罗河水每年都要泛滥,淹没庄稼,冲毁土地,这给土地的管理带来一些问题. 据史书记载,埃及第十九王朝的法老拉美西斯第二(约公元前 1300 年),把土地划分成同样大小的正方形,并分配给居民,按分配土地的面积收租. 如果河水泛滥时冲毁了部分土地,便要重新丈量土地,根据土地损失情况核减租赋,有时甚至还要重新分配土地,这样. 以面积测量为特征的最早的几何学就诞生了.

由于计算是生产实践的需要,因而在它发展的早期主要是一种技术. 例如对圆周率 π,一开始没有明确的计算公式,π 的值

能算到多精确，全凭数学家的本事. 在古巴比伦数学中，只知道 π 近似于 3. 公元前 6 世纪，印度数学家算到 π 近似于3.162. 公元 300 年左右，中国数学家刘徽用割圆术把 π 的近似值改进为 3.1416. 一百多年以后，祖冲之又算得 π 的值在 3.1415926 与 3.1415927 之间. 西方数学家得到同样精确的结果则已是一千年以后的事了.

作为一种技术，有时难免要发生保密、泄密和窃密的问题. 三次代数方程式的解法是 16 世纪的意大利数学家塔尔塔利亚发明的. 另一位意大利数学家菲奥尔声称自己也找到了三次方程的解法，两人相约在米兰公开比赛，结果菲奥尔大败. 不久，卡尔达诺向塔尔塔利亚请教该法，遭到拒绝. 卡尔达诺遂许愿推荐他担任西班牙炮兵顾问，并发誓永不泄密，以此骗取了三次方程式解法，并在六年后违约公布于自己写的书中. 后世传称三次方程式的解法为卡尔达诺算法，这是不公正的. 然而这件事也反映了古代某些计算技术正像我国的祖传秘方那样，属于个人的秘密.

重视实际的计算方法是我国古代数学的一大特点，在古籍中往往称之以"术". 如上面提到的以极限方法求圆周率的割圆术；在解算术问题时使用变元方法的天元术；以及求解一次同余方程组的大衍求一术等. 与我国的传统不同，古希腊的数学家们发展出一套严密的逻辑演绎方法，不但有亚里斯多德的形式逻辑，还有欧几里德的几何体系，这是数学史上另一条重要的发展线索. 当然，逻辑方法本身还不是计算，我们在以后将会讲到，只有当数理逻辑问世以后，才有了以计算方法处理逻辑问题的手段.

也正是从希腊人开始，出现了对计算的根本问题——什么是可计算的，什么是不可计算的——的研究，其成果往往是某些

问题类的不可计算性，由此又导出一些新的、更富有意义的研究领域. 要知道，指出某些问题是不可计算的，其意义决不亚于给出可计算问题的计算方法，这在数学史上屡见不鲜. 一个著名的事件是公元前 400 年希腊数学家希帕索斯发现直角三角形的直角边与斜边之长是不可通约的，也就是说，这两条边的商不能用有理数表示. 虽然希帕索斯因此而被抛进大海处死，但由此而产生的无理数概念却为数学带来了新的繁荣. 另一个著名的例子是用根式求解一般五次方程的问题，挪威数学家阿贝尔在 1824 年指出这是不可能的. 阿贝尔的卓越成果推动人们去寻求五次以上方程有根式解的一般条件. 五年以后，这个问题被法国数学家伽罗瓦解决，从而又导致一门新的数学分支——群论的产生. 作为伽罗瓦的发现的一个推论，人们知道了用直尺和圆规三等分任意角是不可能的.

但这些都是关于某类具体问题求解的可能性或不可能性的研究. 至于最一般的问题类的可计算性研究，则直到 20 世纪 30 年代才结出硕果. 图灵、丘奇、哥德尔、波斯特等人陆续提出了一批计算模型，并称这些模型为用算法方法解决问题的极限. 即：凡是能用算法方法解决的问题，也一定能用这些计算模型解决. 反之，这些计算模型解决不了的问题，任何算法也休想解决. 本书第二至第六章列出了五种这样的计算模型，实际的计算模型体现于现代的电子计算机及其程序设计语言上，第七章对此作了简要介绍.

这里说到了算法，需要解释一下什么是算法. 算法一词来自古代阿拉伯一本数学名著的书名，它指的是一种计算过程，具有如下的性质：

1. 通用性. 即适用于某一类问题中的所有个体，而不是只用来解决一个具体问题.

2. 能行性. 即应有明确的步骤一步一步地引导计算的进行.

3. 机械性. 即每个步骤都是机械的、定死的,不需要计算者临时动脑筋.

4. 有限性. 至少对某些输入数据,算法应在有限多步内结束,并给出计算结果. 我们称算法对这些输入数据是有定义的.

5. 离散性. 算法的输入数据及输出数据都应是离散的符号(或称字母,其中也包括数字).

虽然人们已经相信,在上述算法定义的意义上,不存在第二到第七章的计算模型不能计算、而其它模型能计算的问题,但是人们也已了解到,确实存在着任何计算模型都计算不了的问题,第八章讨论这个十分重要的不可计算性和不可判定性问题. 就像告诫人们三等分角不可能一样,这方面的研究成果可使人们避免无效的劳动. 与此相关的问题是形式系统的一致性和完备性问题,这在第九章中探讨. 总之,第八、九两章说的是现实世界计算能力的极限.

计算模型的计算能力还受着另一个因素的限制,那就是计算的复杂性. 通俗地说,可称之为计算的繁复程度. 对此,人们首先想到的是计算所需的步数,但这只是复杂性的一种,称为时间复杂性. 通常用计算所需的各种开销之大小衡量计算复杂性,时间是一种开销,空间(可想象为算题用的草稿纸)也是一种开销,还可以定义其它的开销. 第十章研究抽象计算模型的计算复杂性,第十一章研究具体的算法类中被认为最难的一类——NP完备类的复杂性,这两方面都已有极丰富的研究成果.

有关计算的另一个大问题是计算的语义问题. 通俗地讲即是:怎样保证计算的结果是我们所需要的?即如果一个算法用两种形式表示出来,一种是说明性的(例如求两个数的最大公约数),另一种是过程性的(例如欧几里德辗转相除法),如何才能

判断:过程性的算法达到了说明性算法的要求?计算的语义问题是一个极大的问题,本书只能在最后一章触及它的很小一点皮毛,供读者品味.

第二章　图灵机

——跳不出的如来佛手心

计算的能行性和可构造性研究的最著名产物，也许是图灵机了．图灵是一位英国数学家，生于1912年6月23日，卒于1954年6月7日，只活了42岁，然而却在数学和计算理论方面作出了卓越的贡献．他在1937年发表的《关于可计算的数及其对判定问题的应用》一文中提出了一个非常重要的关于计算的数学模型，后世称之为图灵机．其重要性在于：这是一个能行的计算模型，它的原理非常之简单，然而却能计算一切能行可计算的问题类，因此它的功能不会弱于任何其它的能行计算模型．当然，这个结论从未被严格证明过，而且，它是证明不了的．因为图灵机是一个严格的数学模型，而所谓可计算的问题类则是一个用语言描述的模糊概念．我们只能证明一个精确的数学概念等价于另一个精确的数学概念，却无法"证明"一个模糊的概念等价于一个精确的概念．不过，从图灵机创立以来的无数事实使人们相信这一点是对的．还从未有人发现过一个为图灵机计算不了的问题类，就像孙悟空跳不出如来佛的手心一样．现在，数学家们不但不怀疑这一点，而且把"图灵机可计算"作为能行可计