天利38套专题

2004高考总复习教程

38套专题训练

全国高考命题研究组
北京天利考试信息网 编

数学

联考名题
活页可拆

西藏人民出版社

编 写 说 明

据专家研究表明，高考要取得好成绩，做好第一轮复习、掌握和巩固各单元、专题知识要点是十分必要的。实践中，各地教师多采用往年高考试题和全国各地模拟试题供学生练习，帮助学生通过单元专题达标检测，其效果是十分明显的。为此，我们组织北京和其他省市特级、高级教师在充分研究 2003 年考试说明、分析预测 2004 年高考命题的基础上编写了本书，供全国各地考生总复习和查缺补漏时使用。

本书有以下一些特点，读者使用时注意：

1.本书依照新考试说明和新教材编写，适合于全国各地考生使用；

2.试题的编排参照考试说明考核要求，但为了符合教学顺序，并不完全依照考试说明的顺序编排，读者可按照自己的复习顺序选用试题；

3.本书试题主要选自近两年全国高考试题和各省市大联考模拟试题中的常考、易错、典型试题，试题前标有出处，'01 代表 2001 年，'02 代表 2002 年，'03 代表 2003 年，年份后为地名，表明出自该地的模拟试题或高考试题；

4.本书设计为可撕可拆、即拆即用，答案及解题思路附在书后，可供读者参考。但是，我们建议读者应先做题后对答案；

5.2003 年高考命题范围相对缩小，这不表明 2003 年不考的内容 2004 年也不考，本书选用的一些试题超出了 2003 年考试说明范围，在此我们以"*"号作出标注，考生仍应认真复习；

6.个别试题的选材可能过时(如政治科试题)，但考核的内容仍需要掌握，不会影响使用。本书的"38 套"只是一个概念，并不表示一定为 38 套试题。

本书包含语文、英语、数学、物理、化学、政治、历史、生物、地理九个科目，参加本书编审的有范国平、刘卓、范亚平、李占坤、彭文刚、李梅、陈同振、常艳玲、张淑娟、齐海潮、侯志玲、方雅丽、徐庆岩、滕瑞梅，在本书的编写过程中，得到了北京海淀区、东城区、西城区和各教研所的大力支持和帮助，在此一并致谢。本书倘有错误和不足，敬请批评指正，意见和建议请寄：100027 北京 4717 信箱 38 套专题编委会收或通过北京天利考试信息网(www.TL100.com)留言。

衷心祝愿读者考出好成绩，考上自己理想中的大学。

编 者

2003 年 7 月于北京

目　　录

专题一　集合与简易逻辑

高考要求▶目标

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，了解空集、全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合.

理解集合的交、并、补的定义及运算法则，并能进行一些简单的集合运算.

简易逻辑核心内容是真假识别与命题的等价，理解逻辑联结词的含义，会用它们构造相应的复合命题.

理解"充要条件"、"充分条件"、"必要条件"并能进行推理与判断.

例题与点评

【例 1】 集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+a-1=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，若 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a、m 的值.

【解析】 当 $a-1=1$，即 $a=2$ 时，$B=\{1\}$；

当 $a-1=2$，即 $a=3$ 时，$B=\{1,2\}$.

$\therefore a$ 的值为 2 或 3.

再考虑条件：$C\subseteq A$，则集合 C 有三种情况：

(1)当 $C=A$ 时，$m=3$；

(2)当 C 为单元素集时，即方程 $x^2-mx+2=0$ 有等根. 由 $\Delta=m^2-8=0$，得 $m=\pm2\sqrt{2}$.

此时，必须再求出 C 中的元素，看是否符合题设要求，否则会导致错误结论.

当 $m=\pm2\sqrt{2}$时，$C=\{\sqrt{2}\}$或$\{-\sqrt{2}\}$，不合条件 $C\subseteq A$. 故 $m=\pm2\sqrt{2}$舍去.

(3)当 $C=\varnothing$ 时，方程 $x^2-mx+2=0$ 无实根，$\Delta=m^2-8<0$，

$\therefore -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

综上所述，$m=3$ 或 $m\in(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

【点评】 以上讨论中，C 的分类，实际上是将 C 中元素个数进行分类：C 中有 2 个元素，1 个元素，0 个元素.

另外，不能将集合 B 写为 $B=\{a-1,1\}$，因为当 $a-1=1$ 时，$B=\{1\}$.

解题时，当一种集合的表达式不好入手时，可将其转化为另一种形式，如此题 $A\cup B=A$ 转化

为 $B\subseteq A$.

【例 2】 如图 1-1,小圆圈表示网络的结点,结点之间的连线表示它们有网线相联.连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量.现从结点 A 向结点 B 传递信息,信息可以分开沿不同的路线同时传递.则单位时间内传递的最大信息量是 ( )

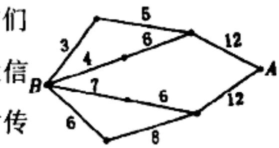


图 1-1

A. 26 B. 24 C. 20 D. 19

【解析】 我们用直接法.如图 1-2.

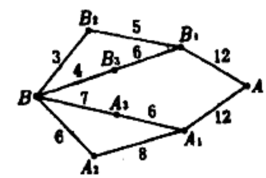


图 1-2

由 $A\to B$ 有 4 条路线,每条路线单位时间内传递的最大信息量是:

(1) $A\to B_1\to B_2\to B$: 3

(2) $A\to B_1\to B_3\to B$: 4

(3) $A\to A_1\to A_2\to B$: 6

(4) $A\to A_1\to A_3\to B$: 6

故 4 条线路在单位时间内传递的最大信息量总共是: $3+4+6+6=19$.

故应选 D.

【点评】本题主要考查结合网络图形观察图形、分析问题和逻辑推理能力以及解决问题的能力.在解题时,容易进入误区,得到 $A\to A_1\to A_2\to B$: $12+8+6=26$,误选 A.错因是没有看懂题中要求"从 A 向 B 单位时间内传递的最大信息量"的含义.

专题训练

一、选择题

1. ('99 全国)如图 1-3 所示,I 是全集,M、P、S 是 I 的 3 个子集,则阴影部分所表示的集合是 ( )

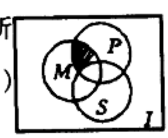


图 1-3

A. $(M\cap P)\cap S$ B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap \bar{S}$ D. $(M\cap P)\cup \bar{S}$

2. ('97 全国)设集合 $M=\{x|0\leqslant x<2\}$,集合 $N=\{x|x^2-2x-3<0\}$,集合 $M\cap N$ 等于 ( )

A. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$ B. $\{x|0\leqslant x<2\}$ C. $\{x|0\leqslant x<1\}$ D. $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

3. ('02 成都)已知集合 I、P、Q 满足 $I=P\cup Q=\{0,1,2,3,4\}$,$P\cap Q=\{1,3\}$,则 $(\bar{P}\cup\bar{Q})\cap(P\cup Q)=$ ( )

A. $\{0,1,3\}$ B. $\{1,2,4\}$ C. $\{0,2,4\}$ D. $\{1,3,4\}$

4.('02 杭州)若 $x>0$,则由 $x,-x,|x|,-|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3},\sqrt[3]{-x^3}$组成的集合中的元素有(　　)

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.7 个

5.('93 三南)集合 $M=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$,$N=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$,则(　　)

A.$M=N$　　B.$M\supset N$　　C.$M\subset N$　　D.$M\cap N=\varnothing$

6.('90 全国)设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in R\}$,集合 $M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$,$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$,那么$\overline{M\cup N}$等于(　　)

A.$\varnothing$　　B.$\{(2,3)\}$　　C.$(2,3)$　　D.$\{(x,y)|y=x+1\}$

7.('02 武汉)已知集合 $M=\{a^2,a+1,-3\}$,$N=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,若 $M\cap N=\{-3\}$,则 a 的值是(　　)

A.-1　　B.0　　C.1　　D.2

8.('00 上海)若集合 $S=\{y|y=3^x,x\in R\}$,$T=\{y|y=x^2-1,x\in R\}$,则 $S\cap T$ 是(　　)

A.S　　B.T　　C.$\varnothing$　　D. 有限集

9.('00 全国)设全集 $I=\{a,b,c,d,e\}$,集合 $M=\{a,c,d\}$,$N=\{b,d,e\}$,那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 是(　　)

A.$\varnothing$　　B.$\{d\}$　　C.$\{a,c\}$　　D.$\{b,e\}$

10.('02 南昌)设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,集合 $A=\{1,3,5,7\}$,集合 $B=\{3,5\}$,则(　　)

A.$U=A\cup B$　　B.$U=(C_UA)\cup B$

C.$U=A\cup(C_UB)$　　D.$U=(C_UA)\cup(C_UB)$

11.('01 京、皖、蒙春季)集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$的子集个数是(　　)

A.32　　B.31　　C.16　　D.15

12.('95 上海)如果 $P=\{x|(x-1)(2x-5)<0\}$,$Q=\{x|0<x<10\}$,那么(　　)

A.$P\cap Q=\varnothing$　　B.$P\subset Q$　　C.$P\supset Q$　　D.$P\cup Q=R$

13.('95 全国)已知 I 为全集,集合 M、$N\subset I$,若 $M\cap N=N$,则(　　)

A.$\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　B.$M\subseteq\overline{N}$　　C.$\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　D.$M\supseteq\overline{N}$

14.('02 北京)设集合 $M=\{x|x-m\leqslant 0\}$,$N=\{y|y=(x-1)^2-1,x\in R\}$,若 $M\cap N=\phi$,则实数 m 的取值范围是(　　)

A.$m\geqslant -1$　　B.$m>-1$　　C.$m\leqslant -1$　　D.$m<-1$

15.('96 全国)已知全集 $I=N$,集合 $A=\{x|x=2n,n\in N\}$,$B=\{x|x=4n,n\in N\}$,则(　　)

A.$I=A\cup B$　　B.$I=C_IA\cup B$　　C.$I=A\cup C_IB$　　D.$I=C_IA\cup C_IB$

16.('95 上海)“$ab<0$”是“方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线”的(　　)

A. 必要条件但不是充分条件　　　　B. 充分条件但不是必要条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不是充分条件又不是必要条件

二、填空题

17.（'00 上海春招）集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$，$B=\{(x,y)\mid (x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$，其中 $r>0$，若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素，则 r 的值是__________.

18.（'01 上海）设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x-15), x\in R\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\cos\frac{x}{2}>0, x\in R\right\}$. 则 $A\cap B$ 的元素个数为________________个.

19.（'00 上海春招）设 I 是全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq I$. 若含 P、Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为空集 $\varnothing$，则这个运算表达式可以是__________.（只要写出一个表达式）

20.（'01 天津）在空间中，

①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；

②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中，逆命题为真命题的是__________.（把符合要求的命题序号都填上）

三、解答题

21.（'99 上海）设集合 $A=\{x\mid |x-a|<2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{2x-1}{x+2}<1\right\}$. 若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

22.（'00 上海春招）已知 R 为全集，$A=\{x\mid \log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{5}{x+2}\geqslant 1\right\}$，求 $C_RA\cap B$.

专题二　映射、函数、反函数

高考要求▶目标

在了解映射概念的基础上，理解函数及其有关的概念；理解反函数的概念，掌握反函数的求法，能利用互为反函数间的关系解决相关问题.

例题与点评

【例1】 下列对应是否是从 A 到 B 的映射？能否构成函数？

(1) $A=R, B=R, f: x\to y=\frac{1}{x+1}$；

(2) $A=\{a\mid a=n, n\in N\}, B=\{b\mid b=\frac{1}{n}, n\in N\}, f: a\to b=\frac{1}{a}$；

(3) $A=\overline{R^-}, B=R, f: x\to y, y^2=x$；

(4) $A=\{$平面 M 内的矩形$\}$，$B=\{$平面 M 内的圆$\}$，f：作矩形的外接圆.

【解析】 (1)当 $x=-1$ 时，y 值不存在，$\therefore$ 不是映射，更不是函数；

(2)是映射，也是函数，因 A 中所有元素的倒数都是 B 中的元素；

(3)不是映射，因而更不是函数；

(4)是映射，但不是函数，因 A、B 不是数集.

【点评】 必须根据映射、函数的定义来判断.

【例2】 设 $f(x)=x^2+px+q, A=\{x\mid x=f(x)\}, B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$.

(1)求证 $A\subseteq B$；

(2)如果 $A=\{-1,3\}$，求 B.

【解析】 (1)设 x_0 是集合 A 中的任一元素，即有 $x_0\in A$.

$\because A=\{x\mid x=f(x)\}$，

$\therefore x_0=f(x_0)$，即有 $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$，

$\therefore x_0\in B$，故 $A\subseteq B$.

(2) $\because A=\{-1,3\}=\{x\mid x^2+px+q=x\}$，

$\therefore$ 方程 $x^2+(p-1)x+q=0$ 有两个实数根 -1 和 3.

应用韦达定理，得

$\begin{cases}-1+3=-(p-1),\\(-1)\times 3=q,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-1,\\q=-3.\end{cases}$ 于是集合 B 的元素是方程 $f[f(x)]=x$，

也即 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$ 的根.

将上式方程变形得 $(x^2-x-3)^2-x^2=0$，

解得 $x=-1,\sqrt{3},-\sqrt{3},3$.

故 $B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$.

【点评】 (1)本题是涉及集合、函数和方程的综合题.依据子集的概念，要证 $A\subseteq B$，只要证对任

意 $x_0\in A$,均有 $x_0\in B$ 成立;由 $A=\{-1,3\}$ 知,方程 $x=f(x)$ 有二实根 -1 和 3,从而应用韦达定理可求出 p、q 的值,也就确定出 $f(x)$ 的解析式,再解方程 $x=f[f(x)]$,就可求出 B 中的所有元素.

(2)解本题的思维关键在于应自觉脱去集合符号和抽象函数符号这一"外衣",显示出最本质的数量关系,然后不断实施解题语言的转换,而语言是思维的载体,不得丝毫马虎,抽象思维能力是高考考查的基本能力.

【例 3】 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x(x>0)$ 和定义在 R 上的奇函数 $g(x)$,当 $x>0$ 时,$g(x)=f(x)$,试求 $g(x)$ 的反函数.

【解析】 $\because g(x)$ 是 R 上的奇函数,

$\therefore g(0)=0$,设 $x<0$,则 $-x>0$,

则 $g(x)=-g(-x)=-f(-x)=-2^x$,

于是 $g(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -2^x & (x<0),\end{cases}$ $\therefore g^{-1}(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x & (0<x<1),\\ 0 & (x=0),\\ \log_2(-x) & (-1<x<0).\end{cases}$

专题训练

一、选择题

1.('00 南宁)下列说法正确的是 ( )

A. 对两个集合 A 和 B,都可以建立从 A 到 B 的映射

B. 对两个无限集合 A 和 B,一定不能建立从 A 到 B 的映射

C. 如果集合 A 中只有一个元素,B 是非空集合,那么从 A 到 B 只能建立一个映射

D. 如果集合 B 中只有一个元素,A 为非空集合,那么从 A 到 B 只能建立一个映射

2.('99 全国)已知映射 $A\to B$,其中,集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$,集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的像,且对任意的 $a\in A$,在 B 中和它对应的元素是 $|a|$,则集合 B 中元素的个数是 ( )

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

3.('00 全国)设集合 A 和 B 都是自然数集合 N,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,像 20 的原像是 ( )

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4.('98 全国)函数 $f(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 等于 ( )

A. $x(x\neq 0)$　　B. $\frac{1}{x}(x\neq 0)$　　C. $-x(x\neq 0)$　　D. $-\frac{1}{x}(x\neq 0)$

5.('01 京、皖、蒙春季)函数 $y=-\sqrt{1-x}(x\leqslant 1)$ 的反函数是 ( )

A. $y=x^2-1(-1\leqslant x\leqslant 0)$　　B. $y=x^2-1(0\leqslant x\leqslant 1)$

C. $y=1-x^2(x\leqslant 0)$　　D. $y=1-x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$

6. 函数 $y=2^{-x}+1(x>0)$ 的反函数是 ( )

A. $y=\log_2\frac{1}{x-1},x\in(1,2)$　　B. $y=-\log_2\frac{1}{x-1},x\in(1,2)$

C. $y=\log_2\frac{1}{x-1},x\in(1,2]$　　　　D. $y=-\log_2\frac{1}{x-1},x\in(1,2]$

7.('01 高考)(理)函数 $y=\cos x+1(-\pi\leqslant x\leqslant 0)$的反函数是　　(　)

A. $y=-\arccos(x-1)(0\leqslant x\leqslant 2)$　　B. $y=\pi-\arccos(x-1)(0\leqslant x\leqslant 2)$

C. $y=\arccos(x-1)(0\leqslant x\leqslant 2)$　　D. $y=\pi+\arccos(x-1)(0\leqslant x\leqslant 2)$

8.('02 长春)函数 $f(x)=\frac{1-2x}{1+x}$,若函数 $g(x)$的图像与 $y=f^{-1}(x+1)$的图像关于直线 $y=x$ 对称,则 $g(2)$的值等于　　(　)

A. -1　　B. -2　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{2}{5}$

9.('99 全国高考)某电脑用户计划使用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘,根据需要,软件至少买 3 片,磁盘至少买 2 盒,则不同的选购方式共有　　(　)

A.5 种　　B.6 种　　C.7 种　　D.8 种

10.('99 全国)若函数 $y=f(x)$的反函数是 $y=g(x)$,$f(a)=b$,$ab\neq 0$,则 $g(b)$等于　　(　)

A. a　　B. a^{-1}　　C. b　　D. b^{-1}

11.('02 广西)函数 $y=f(x+1)$的图像与函数 $y=f^{-1}(x+1)$的图像关于下列直线对称的是(　)

A. $y=x$　　B. $y=-x$　　C. $y=x+1$　　D. $y=x-1$

12.('02 春季高考)根据市场调查结果,预测某种家用商品从年初开始的 n 个月内累积的需求量 S_n(万件)近似地满足

$$S_n=\frac{n}{90}(21n-n^2-5)(n=1,2,\cdots\cdots,12)$$

按此预测,在本年度内,需求量超过 1.5 万件的月份是　　(　)

A.5 月、6 月　　B.6 月、7 月　　C.7 月、8 月　　D.8 月、9 月

二、填空题

13.('00 上海)已知 $f(x)=2^x+b$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$,若 $y=f^{-1}(x)$的图像经过点 $Q(5,2)$,则 $b=$________.

14.('00 海南)某商场为了迎合顾客的心理,将两件不同成本价的商品捆绑在一起销售.两件商品均以216 元卖出,其中一件亏损 20%,但总共却盈利 20%,则另一件商品的成本价应是________元.

15.('02 长春)木料的强度与梁宽成正比,与梁高的平方成正比,从圆柱形的木材截出截面是矩形的木梁.如图 2-1,要使梁的强度最大,h 与 x 的关系是________.

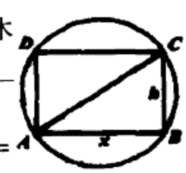


图 2-1

16.('02 成都)设 $f(x)$的反函数是减函数,且 $f(x)>0$,给出下列函数:① $y=\sqrt{f(x)}$;② $y=-\frac{5}{f(x)}$;③ $y=\log_5 f(x)$;④ $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$;⑤ $y=(\frac{2}{3})^{f(x)}$;⑥ $y=10^{f(x)}$.

其中是增函数的序号是________.

三、解答题

17.('02 武汉)已知 $f(x-1)=x^2-6x+8,x\in(-\infty,3]$

(Ⅰ)求 $f(x)$;

(Ⅱ)$f^{-1}(x)$;

(Ⅲ)在$f(x)$与$f^{-1}(x)$的公共定义域上,解不等式$f(x)>f^{-1}(x)+x^2$

18.('00保定)已知函数$y=f(x)$在定义域$(-\infty,0]$内存在反函数,且$f(x-1)=x^2-2x$,求$f^{-1}(-\frac{1}{2})$的值.

19.('02广东)已知函数$f(x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}(a>0$且$a\neq1)$

(Ⅰ)证明:$f(x)+f(1-x)=1$;

(Ⅱ)求$f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{2}{10}\right)+\cdots+f\left(\frac{9}{10}\right)$的值.

20.('02苏锡常镇)已知函数$f(x)=2^x-1$的反函数为$f^{-1}(x)$,$g(x)=\log_4(3x+1)$.

(Ⅰ)若$f^{-1}(x)\leqslant g(x)$,求x的取值范围D;

(Ⅱ)设函数$H(x)=g(x)-\frac{1}{2}f^{-1}(x)$,当$x\in D$时,求函数$H(x)$的值域.

21.('99常州)已知函数$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-2})(a>0$,且$a\neq1)$的反函数为$f^{-1}(x)$.设$g(n)=\frac{\sqrt{2}}{2}f^{-1}(n+\log_2\sqrt{2})$,若$g(n)<\frac{3^n+3^{-n}}{2}(n\in N)$,求$a$的取值范围.

专题三　函数解析式、定义域和值域

高考要求▶目标

深化对函数概念的理解，充分理解对应法则的含义，熟练掌握函数解析式的基本求法.

掌握基本初等函数及复合函数定义域的求法；对含有参变数的函数解析式求其定义域，能对参变数正确分类讨论.

掌握函数值域的几种求解方法：直接法、反函数法、判别式法、换元法、函数单调性；已知函数的值域，求解析式中字母的取值范围.

例题与点评

【例 1】 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$，$f(x+1)$ 与 $f(x^2)$.

【解析】 设 $t=\sqrt{x}+1\geqslant 1$，则 $\sqrt{x}=t-1$，$x=(t-1)^2$，于是

$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1(t\geqslant 1)$.

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$；

$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x(x\geqslant 0)$；

$f(x^2)=(x^2)^2-1=x^4-1(|x|\geqslant 1)$.

【点评】 在用换元法解此类题时，要注意定义域的变化. 注意前边的 x 与后边的 x 的区别与联系. 所以求得的函数关系要注明定义域.

【例 2】 若 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，求函数 $f(x+1)$ 的定义域.

【解析】 由已知，得 $-1\leqslant x+1\leqslant 1$，$-2\leqslant x\leqslant 0$，故所求定义域为 $x\in[-2,0]$.

【点评】 能应付错综复杂的求函数定义域的题目，必须明确求函数定义域就是求自变量 x 的取值范围. 如在函数 $f(x+1)$ 中，求定义域就是求 x 的范围，而不是求 $x+1$ 的范围. 又如 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，显然定义域为 $[-1,1]$，而 $f(x+1)=\sqrt{1-(x+1)^2}$，此函数定义域应由 $(x+1)^2\leqslant 1$ 确定得到，即 $-1\leqslant x+1\leqslant 1\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 0$.

读者可思考：若求 $f(2x)$，$f(x^2)$ 的定义域又如何？由此可推知这类题的解法（由读者自行完成）.

【例 3】 求下列函数的值域

(1) $y=\dfrac{1-x}{2x+5}$；

(2) $y=\dfrac{a+bx}{a-bx}(a>b>0,-1\leqslant x\leqslant 1.)$

【解析】 (1) 方法一：（逆求法）：

由 $y=\dfrac{1-x}{2x+5}$，得 $x=\dfrac{1-5y}{2y+1}$，

$\therefore$ 函数的值域为 $y\neq -\dfrac{1}{2}$ 的一切实数.

方法二：(分离常数法)：

$\because y=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{2}}{2x+5}, \frac{\frac{7}{2}}{2x+5}\neq 0,$

$\therefore y\neq -\frac{1}{2}.$

方法三：(图像法)：

$\because y=\frac{1-x}{2x+5}$的图像是反比例函数的图像——双曲线，它由双曲线 $y=\frac{\frac{7}{4}}{x}$向左平移$\frac{5}{2}$个单位，再向下平移$\frac{1}{2}$个单位而得到，因而它的渐近线是 $x=-\frac{5}{2}$和 $y=-\frac{1}{2}$，(图略)．故函数的值域是 $y\neq -\frac{1}{2}$的一切实数．

(2)方法一：$-1\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow -b\leqslant -bx\leqslant b\Rightarrow 0<a-b\leqslant a-bx\leqslant a+b\Rightarrow \frac{2a}{a+b}\leqslant \frac{2a}{a-bx}\leqslant \frac{2a}{a-b}\Rightarrow \frac{a-b}{a+b}\leqslant y=-1+\frac{2a}{a-bx}\leqslant \frac{a+b}{a-b}$.

方法二：解得 $x=\frac{a(y-1)}{b(y+1)}$，

$\because |x|\leqslant 1, \therefore \left|\frac{a(y-1)}{b(y+1)}\right|\leqslant 1.$

即 $a|y-1|\leqslant b|y+1|$，两边平方后整理得$[(a-b)y-(a+b)][(a+b)y-(a-b)]\leqslant 0$.

$\because a>b>0, \therefore \frac{a-b}{a+b}\leqslant y\leqslant \frac{a+b}{a-b}.$

即 $y\in\left[\frac{a-b}{a+b},\frac{a+b}{a-b}\right]$.

【点评】(1)函数的值域是高考经常考查的重点知识，在函数概念的三要素中，定义域和对应法则是最基本的，值域由定义域和对应法则所确定，在研究函数的值域时，既要重视对应法则的作用，又要特别注意定义域对值域的制约作用．

(2)求函数的值域的常用方法有：①直接法：利用非负值概念($|x|\geqslant 0, x^2\geqslant 0$ 等)、配方法等；②逆求法：通过求反函数的定义域求出原函数的值域；③"Δ"法：转化为二次方程，用判别式求值域；④换元法：无理换元，三角换元等；⑤利用函数性质：如函数的单调性、最值等求出函数的值域．

专题训练

一、选择题

1.('99 广东)下列各组函数中，表示同一函数的是　(　　)

A. $y=\sqrt[5]{x^5}$与 $y=\sqrt{x^2}$　　B. $y=\ln e^x$ 与 $y=e^{\ln x}$

C. $y=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$与 $y=x+3$　　D. $y=x^0$ 与 $y=\frac{1}{x^0}$

2.('00 黄冈)已知 $I=R$，函数 $y=\lg x$ 的值域为P，$y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$的值域为 M，则下列等式中不正确的是　(　　)

A. $\overline{M}\cap P=\varnothing$　　B. $M\cup P=P$　　C. $P\cup\overline{M}=R$　　D. $P\cap M=M$

3.('00 东北三校)已知函数 $y=f(x)$ 的反函数与 $y=g(x)$ 的图像关于点 $p(a,b)$ 对称,则 $g(x)$ 可表示为 ( )

A. $g(x)=a+f^{-1}(b+x)$　　B. $g(x)=2a-f^{-1}(2a-x)$

C. $g(x)=b+f^{-1}(a+x)$　　D. $g(x)=2b-f^{-1}(2a-x)$

4.('00 海南)函数 $f(x)=\sqrt{(\frac{1}{2})^{\log_2\frac{1}{4}}-2^x}$ 的定义域 ( )

A. $[0,2]$　B. $(-\infty,2]$　C. $[0,4]$　D. $(-\infty,4]$

5.('02 湖南)当 $x\in(0,1)$ 时,不等式 $x^2<\log_a(x+1)$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(2,+\infty)$　B. $[2,+\infty)$　C. $(1,2)$　D. $(1,2]$

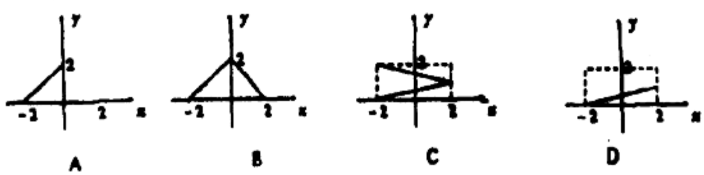
6.('00 天津)若函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2-\log_2 x)$ 的值域是 $(-\infty,0)$,则它的定义域是 ( )

A. $x<2$　B. $0<x<2$　C. $0<x<4$　D. $2<x<4$

7.('00 黄冈)设 $f(x)$ 是定义域为 R,最小正周期为 $\frac{3\pi}{2}$ 的函数,若 $f(x)=\begin{cases}\cos x & (-\frac{\pi}{2}\leqslant x<0)\\ \sin x & (0\leqslant x<\pi)\end{cases}$,则 $f(-\frac{15}{4}\pi)$ 的值是 ( )

A. 1　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. 0　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.('00 福州)设 $M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,$N=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$,给出下列 4 个图形,其中能表示以集合 M 为定义域,N 为值域的函数关系是 ( )



9.('02 福建)设函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x-3, x\leqslant 0,\\ x^{\frac{1}{2}}, x>0,\end{cases}$ 已知 $f(a)>1$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-2,1)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

10.('00 东北四市)设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数,且 $f(x-\frac{3}{2})=f(x+\frac{1}{2})$ 恒成立,当 $x\in[2,3]$ 时,$f(x)=x$,则当 $x\in[-2,0]$ 时,$f(x)$ 的解析式是 ( )

A. $f(x)=|x+4|$　B. $f(x)=|2-x|$　C. $f(x)=3-|x+1|$　D. $f(x)=2+|x+1|$

二、填空题

11.('00 崇文)已知 $f(x)=\log_a(x+1)$,当点 $P(x,y)$ 在函数 $y=\log_a(x+1)$ 的图像上时,点 $Q(\frac{1}{3}x,\frac{1}{2}y)$ 在曲线 $y=g(x)$ 上,则 $g(x)$ 的解析式是________.

12.('02 东北)函数 $y=\sqrt{\frac{1}{\log_a x}-1}\,(0<a<1)$ 的定义域为________.

13.('02 成都)函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+17)$的值域为________.

14.('00 黄冈)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x(x\geqslant 4)\\ f(x+2)(x<4)\end{cases}$,那么 $f(\log_{\frac{1}{2}}3)$的值为________.

15.('00 重庆)$f(x)$是以 5 为周期的奇函数,$f(-3)=4$,且 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$,则 $f(4\cos 2\alpha)=$______.

16.('00 南京)设 $x,y\in R^+$,$x+y+xy=2$,则 $x+y$ 的取值范围是________.

17.('00 南昌)某企业年初有资金 100 万元,若该企业经有效经营能使每年资金平均增长率为 50%,但每年年底要扣除消费基金 x 万元,余下投人再生产、为实现 3 年后资金达 290 万元(扣除消费基金后)则 $x=$________.

18.('02 长春)已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+a)$,给出下列命题:

①当 $0<a<4$ 时,$f(x)$的定义域为 R;

②当 $a>4$ 或 $a<0$ 时,$f(x)$的值域为 R;

③若 $f(x)$在区间$[2,+\infty]$上是减函数,a 的范围是 $-4<a\leqslant 4$;

④若 $f(x)$为偶函数,则 $a=0$.

其中正确的命题的序号是________.

(把你认为正确的命题的序号都填上)

三、解答题

19.('02 威海)求函数 $f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)$的定义域和值域.

20.('02 天津)设 $0<a<1$,$f(x)$是定义在 R 上的奇函数,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\log_a(x+1)$.

(Ⅰ)求 $x<0$ 时 $f(x)$的表达式;

(Ⅱ)若 $x\geqslant 0$,求使 $f(x)+1\geqslant 0$ 时 x 的最大值.

21.('02 成都)函数 $f(x)=\frac{1}{2}+\lg\frac{1-x}{1+x}$.

(Ⅰ)求此函数的定义域,并判断该函数的单调性;

(Ⅱ)解关于 x 的不等式$f[x(x-\frac{1}{2})]<\frac{1}{2}$.

22.('02 宣武)已知函数 $f(x)$在$(-1,1)$上有定义,$f(\frac{1}{2})=-1$,当且仅当 $0<x<1$ 时,$f(x)<0$,且对任意 x、$y\in(-1,1)$,都有 $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$.试证明:

(1)$f(0)=0$ 且 $f(x)$为奇函数;

(2)若对数列$\{x_n\}$满足:$x_1=\frac{1}{2}$,$x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n^2}$,求 $f(x_n)$;

(3)在(2)的条件下,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)+1}$.

专题四　函数的图像和性质(一)

高考要求▶目标

深刻理解函数奇偶性及周期性的定义，并能根据函数的奇偶性及周期性的概念对已知函数正确进行奇偶性的判定和求函数值；理解并掌握奇偶函数图像的特点，并能解决一些相关问题.

掌握单调函数的定义，能利用定义去判断（证明）函数的单调性；熟悉单调函数定义的应用（比较大小、求单调区间、求值域等）.

掌握函数图像三种变换（平移、对称、伸缩）的基本规律，能利用三种变换规律对所给函数图像进行正确判定；利用函数图像及其变换规律去研究函数的性质、描绘函数的图像；运用“数形结合”思想解决相关的问题.

例题与点评

【例 1】 已知 $g(x)$ 是奇函数，函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)+g(x)+2^x$，且 $f(-3)=5\frac{1}{8}$，求 $f(3)$.

【解析】 易知 $\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$ 为奇函数.

从而 $F(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)+g(x)$ 为奇函数，则 $f(x)=F(x)+2^x$。

$f(-3)=F(-3)+2^{-3}=5\frac{1}{8}$.

$\therefore F(-3)=5, F(3)=-5$.

$\therefore f(3)=F(3)+2^3=-5+8=3$.

【点评】 本题利用函数 $g(x)$ 是奇函数，$y=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$ 也为奇函数来解本题.

【例 2】 求下列函数的单调区间，并确定每一单调区间上的单调性.

(1) $y=x^2-3|x|+\frac{1}{4}$；　　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(6+x-2x^2)$.

【解析】 (1) $\because y=\begin{cases}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2 & (x\geqslant 0)\\ \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-2 & (x<0)\end{cases}$

$\therefore$ 由图像可知，y 在 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$ 及 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ 上为减函数，在 $\left[-\frac{3}{2},0\right]$ 及 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上为增函数.

(2) 由 $6+x-2x^2>0$ 得：$-\frac{3}{2}<x<2$，又 $t=6+x-2x^2=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{49}{8}$ 在 $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right]$ 上为增函数，在 $\left[\frac{1}{4},2\right)$ 上为减函数，而 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

$\therefore y=\log_{\frac{1}{2}}(6+x-2x^2)$ 在 $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right]$ 上为减函数，在 $\left[\frac{1}{4},2\right)$ 上为增函数.

【点评】 在研究函数的单调性时，常将函数变形化简，转化为讨论一些熟知函数的单调性，掌握并熟记一次函数、二次函数、幂函数、指数、对数等函数的单调性，将大大缩短我们的判断过程.

【例 3】 作出下列函数的图像：

(1)$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$；　(2)$y=\frac{5-2x}{x-3}$；　(3)$y=x^2-2|x|-3$.

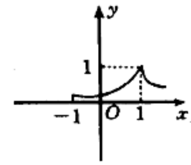


图 4－1

【解析】 (1)$y=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}(x\geqslant 1),\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}(x<1).\end{cases}$

故它在区间$[1,+\infty)$上的图像，可由$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$的图像，向右平移 1 个单位得到；在区间$(-\infty,1]$上的图像，可由$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$的图像向右平移 1 个单位得到.(图 4－1)

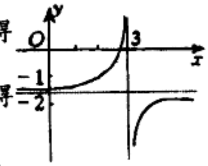


图 4－2

(2)将函数化为$y=-\frac{1}{x-3}-2$.于是将双曲线$y=-\frac{1}{x}$沿x轴正向平移 3 个单位，得$y=-\frac{1}{x-3}$的图像；再沿y轴的负向平移 2 个单位即得所求函数的图像.(其中$x=3,y=-2$是双曲线的两条渐近线).(图 4－2)

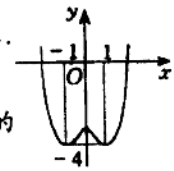


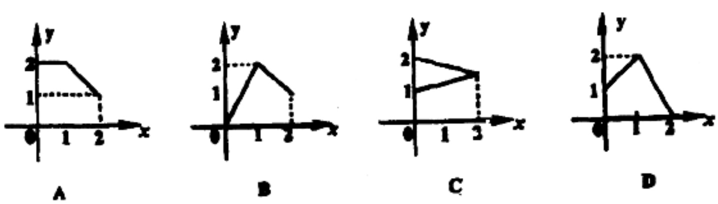
图 4－3

(3)因函数为偶函数，故只要画出$x\geqslant 0$部分的图像，即$y=x^2-2x-3(x\geqslant 0)$的图像，再作关于y轴的对称图像，即得所求函数之图像.(图 4－3)

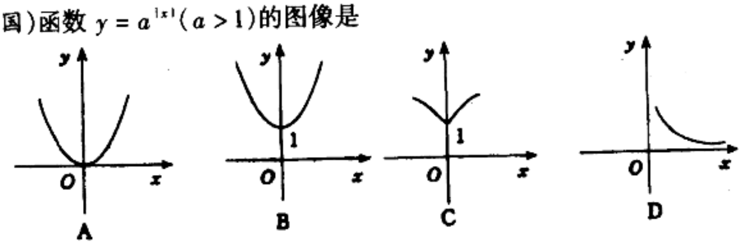
专题训练

一、选择题

1. 设$A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y|1\leqslant y\leqslant 2\}$，在图中，能表示从集合$A$到集合$B$的映射的是　(　　)



2. ('98 全国)函数$y=a^{|x|}(a>1)$的图像是　(　　)



3. ('92 三南)对于定义域是$\mathbf{R}$的任何奇函数$f(x)$都有　(　　)

A. $f(x)-f(-x)>0(x\in\mathbf{R})$　B. $f(x)-f(-x)\leqslant 0(x\in\mathbf{R})$

C. $f(x)f(-x)\leqslant 0(x\in\mathbf{R})$　D. $f(x)f(-x)>0(x\in\mathbf{R})$

4. ('96 全国)设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$，则$f(7.5)$等于　(　　)

A. 1.5　B. －0.5　C. 0.5　D. －1.5