中学数学复习资料

（上　　册）

北京市海淀区教师进修学校

说　　明

本资料为针对我区情况，帮助毕业生复习之用；共分代数（上）、代数（下）、三角、平面几何、立体几何，解析几何等六部份；参加编写的有清华园中学郭文老师，花园村中学陶大裕老师，阜成路中学关民乐老师，钢院附中陈楚炎老师，清华附中孔令颐老师，四十七中王健民老师和进修学校张士充老师；关民乐老师并绘制了全部图形；一二三中陈颖老师帮助配备解析几何的《自我检查题》。在编写中，受到各校领导和有关教研组的热情关怀和大力支援。

因仓促集成，错误和不足之处可能不少，请采用的学校结合具体情况补充修正，并提出宝贵意见，以便在使用过程中进一步改进。

关于使用本资料的注意事项，及因限于篇幅而未能充分体现的要求和意图，将在组织复习活动中进一步说明。

海淀区教师进修学校

目　　录

第一部分　代　数（上）

第二部分　代　数（下）

第三部分　平面几何

第一部分　代　数（上）

第一单元　数的概念性质和运算

数，是研究数量关系的基础。数的概念在实践和研究中不断发展。在中学阶段学习的各种数，可以归纳为如下数系表：

- 复　数 $(a+bi)$
  - 实　数 $(b=0)$
    - 有理数
      - 整　数
        - 自然数（正整数）
        - 零
        - 负整数
      - 分　数（正、负）
        - 有限小数
        - 无限循环小数
    - 无理数（正、负）——无限不循环小数
  - 虚　数 $(b\neq 0)$

一、实　数：

1、 自然数：1，2，3，…，n，……叫做自然数；其中有最小的数1，但没有最大的数。

质数：除 1 以外的自然数中，只能被 1 和这个数本身整除的数，叫做质数（或素数）。

合数：不但能被 1 及本身整除，且还能被其它的数整除的自然数叫做合数。

注意：1 既不是质数，也不是合数。

例：分解下列各数成质因数连乘积形式，并求出其最小公倍数与最大公约数：42，63和135。

解：　$42=2\times3\times7$，　$63=3^2\times7$，　$135=3^3\times5$；

∴最大公约数是 3，最小公倍数是 $2\times3^3\times7\times5=1890$。

说明：①求最大公约数和最小公倍数还可以用短除法：

$$
\begin{array}{r|rrr}
3 & 42 & 63 & 135 \\ \hline
7 & 14 & 21 & 45 \\ \hline
3 & 2 & 3 & 45 \\ \hline
 & 2 & 1 & 15
\end{array}
$$

显然 3 是三个数的约数，也是最大公约数。而 $3\times7\times3\times2\times15=1890$ 是最小公倍数。

② 当两自然数的最大公约数是 1 时，则这两数叫做互质。

2．有理数：

设 p、q 为整数，若 $q\neq 0$，形如 $\dfrac{p}{q}$ 的数叫做有理数。有理数中既没有最小的数，也没有最大的数。

有理数包括正、负整数，零及正负分数；这些数均可写成 $\dfrac{p}{q}$ $(q\neq 0)$ 的形式。

3．实　数：

（1）实数的绝对值：若 a 是实数，$|a|$ 叫做 a 的绝对值。

$$|a|=\begin{cases} a & \text{当 } a>0, \\ 0 & \text{当 } a=0, \\ -a & \text{当 } a<0. \end{cases}$$

（2）实数的六种代数运算：加、减（第一级）、乘、除（第二级）、乘方、开方（第三级）。一般由高级向低级进行。若有运算顺序符号（如（　）、[　]、{　}等），则括号由小到大逐步解脱。

（3）实数的运算定律：a、b、c 为任意实数，

$$a+b=b+a \qquad \text{（加法交换律）}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad \text{（加法结合律）}$$

$$ab=ba \qquad \text{（乘法交换律）}$$

$$(ab)c=a(bc) \qquad \text{（乘法结合律）}$$

$$(a+b)c=ac+bc \qquad \text{（乘法对加法的分配律）}$$

在实数运算中，应注意 0 和 1 这两个特殊的数的作用和运算规律。

[范例] 1. 计算：$\left\{\left[(-5)^2\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)+\left(4-\sqrt{16}\right)\div 100\right]-(-1)^{29}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3\right\}\times(-2^3)$

解：原式 $=\left\{\left[25\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)+(4-4)\div 100\right]-(-1)\left(-\dfrac{1}{8}\right)\right\}\times(-8)$

$$=\left\{[-15+0]-\frac{1}{8}\right\}\times(-8)$$

$$=\left\{-15-\frac{1}{8}\right\}\times(-8)$$

$$=120+1=121.$$

[范例] 2. 计算：$-2\dfrac{1}{3}\div\dfrac{5}{4}\div\left(-3\dfrac{1}{2}\right)\times(-0.75)\div\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

解：原式 $=-\dfrac{7}{3}\times\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{2}{7}\right)\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{5}{2}\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$$=\frac{7\times4\times2\times3\times5\times5}{3\times5\times7\times4\times2\times2}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}.$$

说明：①乘除混合运算时，注意结合律不能用（如不能先做 $\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)$.），一般先化成连乘积。

② 分数与小数混合运算时，先将小数都化为分数。

③ 乘除运算中，带分数要化成假分数。

④ 连乘积的符号，由乘积中的负号个数决定，偶数个负号时积为正，奇数个负号时积为负。

（4） 实数的近似计算：

给定一个实数，其近似值一般有三种取法：四舍五入近似值、不足近似值和过剩近似值。

有效数字：在四舍五入近似值中，从第一个不是零的数字起到保留的数为止，所有的数字都叫做有效数字。例如：0.0025有2个有效数字，2.50有3个有效数字，2.5有2个有效数字。

例1. 计算：$\sqrt{2}+\sqrt{3}$（精确到0.01）

解：$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1.414+1.732=3.146\approx 3.15$

说明：近似数的加减运算，应根据结果所要求的精确数位，在计算过程中多保留一位，求出结果后，再四舍五入，保留到所需的位数。

例2. 计算$3\sqrt{2}$（结果保留4个有效数字）

解：$3\sqrt{2}\approx 3\times 1.4142=4.2426\approx 4.243$

说明：近似数的乘除运算，应根据结果所要求的有效数字个数，在计算过程中多保留一个有效数字，求出结果后，再将最后一位数四舍五入。

例3. 已知 $R\approx 12.5$，$r=12.0$，求 $S=\pi(R^2-r^2)$.

解：$S=\pi(R^2-r^2)\approx\pi(156.3-144.0)=\pi\times 12.3\approx 3.14\times 12.3\approx 38.6\approx 39.$

说明①近似数的混合运算，通常在中间步骤的结果中，要比法则规定的多保留一个数字。

②π取几个有效数字，应根据 R^2-r^2 的结果，即12.3的有效数字个数来确定。

例4. 求 $m=2\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$ 的不足近似值和过剩近似值。（使误差小于0.01）。

解：$m=2\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})=2\sqrt{6}+2\sqrt{14}=\sqrt{24}+\sqrt{56}$.

查平方根表得：

$$4.899<\sqrt{24}<4.900$$

$$7.483<\sqrt{56}<7.484$$

$$\therefore\quad 12.382<\sqrt{24}+\sqrt{56}<12.384$$

$$\text{即}\quad 12.38<m<12.39$$

故所求m的不足近似值是12.38，过剩近似值是12.39。

（思考：为什么过剩近似值与不足近似值的差恰为要求的精确度0.01？）

练　习　一（1）（A组）

1. 实数的六则运算中，哪些运算在正有理数范围里都能进行？哪些运算在有理数范围里都能进行？有什么例外？哪些运算在实数范围里都能进行？有什么例外？在这六种运算之外，实数还有些什么运算？举例说明。

2. 分别在整数、有理数、实数和复数范围内，讨论下列方程哪些有解？哪些无解？

(1) $3x+6=0$　　(2) $5x-6=0$　　(3) $x^2-4x+4=0$

(4) $x^2-2=0$　　(5) $x^2+1=0$

3. 下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

$\sqrt{6}$, $-\sqrt{9}$, $\frac{22}{7}$, π, 3.14, $3.\dot{1}\dot{4}$, 0.101001000 ……,

lg1, lg2, tg30°, tg45°, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$.

4. 计 算：

(1) $0-(0-1)\times 2+0\div(2-1)-(0+1)\times(-1)$

(2) $2-2\frac{1}{2}+1\div 3-5\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-4\frac{1}{4}$

(3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3\div\frac{1}{3^2}\times(-3)^2$

(4) $4.74\div\{[3\times(1.2+1.6)-0.3\times 1.5]-0.05\}$

(5) $\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)\left\{4-3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\div 0.16\right\}$

(6) $\left[(-5)^4\times\left(-\frac{2}{5}\right)+150\right]\times 10\div 5-(-1)^{81}$

(7) $-\left|(-3)^3\right|-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\sqrt{(-3)^2}$

(8) $|-5|-|-7^2|+\left|\frac{1}{3}\right|-|5\div(-6)|$

(9) $\frac{1}{0.32}+\frac{3}{0.8}-\frac{0.1}{16}+\frac{0.3}{0.001}$

(10) $\sqrt{0.0212}$ （精确到 0.001）

5. 判断下列断言的真假，如果是假断言，指出其错误如何改正：

（1） 两数中，较大的数其绝对值也较大。

（2） 任何一个实数的平方都是正数。

（3） 零是最大的非正数，也是最小的非负数。

（4） 绝对值都表示正数。

（5） 开方开不尽的数都是无理数。

（6） $-x$ 表示负数。

6. 按照近似数的计算法则计算下列各题：

(1) $34.06-4.5289+0.64+0.0073+21.0135$

(2) $7.03\times 10^4-3.5\times 10^3$

(3) 24.8×2.51439

(4) $\frac{1}{3}+4.58-\sqrt{5}$ （这里 3,5 是准确数）

(5) $\sqrt{15}\,\pi$（这里15是准确数，结果要求精确到0.01）

7. 用一个有一位整数的数和10的整数次幂的积表下列各数：（例如地球体积是1,083,000,000,000 立方公里，可以表示成 1.083×10^{12} 立方公里）。

（1） 地球质量是 $598\underbrace{000\ldots0}_{25个}$ 克

（2） 电子的质量约是 $\underbrace{0.000\ldots0}_{28个}91083$ 克

练 习 一（1）（B组）

1．下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

$\sqrt{\frac{2318}{9}}$， $\lg\operatorname{tg}(-840^\circ)$， $2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}$， $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$，

$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$， $\log_2 2+\log_{\sqrt{5}}1-\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{27}\right)$．

2．求证：两个有理数的和、差、积、商一定是有理数。

3．两个无理数的和、差、积、商一定是无理数吗？举例说明。（提示：考虑两个根号表示的无理数，如 $2+\sqrt{2}$，$2-\sqrt{2}$．或者如下式：

$$\begin{array}{r} 0.12102100210002\ldots \\ +)\ 0.43453455345553\ldots \\ \hline 0.55555555555555\ldots \end{array}$$

）

4．用几何方法在数轴上作出表示 $\sqrt{2}$ 的点，并用代数方法证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

5．在五位数3427□里的□位置上应填上哪些数字，就能使这数成为：（1）2的倍数；（2）3的倍数；（3）4的倍数；（4）5的倍数；（5）8的倍数；（6）9的倍数；（7）10的倍数；（8）11的倍数；（9）25的倍数？

6．把下列各数分解质因数：1978， 8475， 24640

7．求下列各组数的最大公约数与最小公倍数：

(1) 12， 18 和 36　　　　(2) 40， 64， 88 和 11

(3) 45， 30， 15 和 180　　　　(4) 1260， 2310 和 1995.

8．391是质数还是合数？

9．有学生3933人，分成人数相等的小组参加劳动，每组人数限定在10人以上，20人以下，求每组人数及可分组数。（提示：$3933=3^2\times19\times23$）

10．求用32、26、48去除时都余15的最小数。

11．有一篮鸡蛋，二个二个数、三个三个数、四个四个数、五个五个数、六个六个数，结果都余下一个。若七个七个数，恰好数完，问篮中最少有几个鸡蛋？

12．有理数 a、b、c 应满足什么关系，才能使下列方程在有理数范围内有解：

$$ax^2-c=0,\qquad ax^2+bx+c=0.$$

13．在实数范围内，下列方程是否永远有解？

$$ax^2+b=0,\qquad ax^3+b=0.\qquad (a、b\text{ 都是实数})$$

二、复 数

1． 纯虚数：$i=\sqrt{-1}$ 叫做虚数单位。虚数单位 i 与实数的乘积叫做纯虚数。

显　然：$i^2=-1$

i 的乘方具有周期性规律：

$i^{4n}=1$,　　$i^{4n+1}=i$,　　$i^{4n+2}=-1$,　　$i^{4n+3}=-i$.

2．复数：形如 $a+bi$ 的数叫做复数。（其中 a、b 都是实数）。

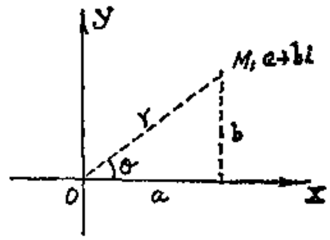
当 $b=0$ 时，这个复数就是实数 a;

当 $a=0$ 时，这个复数就是纯虚数 bi。

3．复数的几何表示法：

复数 $a+bi$ 可以用直角坐标平面内的点 M 来表示。此点的横坐标为 a，纵坐标为 b.

表示复数的平面叫复平面；复数与复平面上的点一一对应。



（图1—1）

4．复数的绝对值（模数）：$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=r$.

5．复数的代数式与三角函数式的互化：

$$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta);$$

r — 模数（绝对值）

$$r=|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2};$$

θ — 幅　角

确定幅角的公式：$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{a}{r}, \\ \sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{b}{r}.\end{cases}$

幅角的主值区间：$0\leqslant\theta'<2\pi$

幅角的一般表示法：$\theta=2k\pi+\theta'$（k 为整数）

5．复数的相等：

(1) $a_1+b_1i=a_2+b_2i \longleftrightarrow a_1=a_2,\ b_1=b_2;$

特别地，$a+bi=0 \longleftrightarrow a=b=0.$

(2) $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos_2+i\sin\theta_2) \longleftrightarrow r_1=r_2,\ \theta_1=2k\pi+\theta_2.$

特别地，$r(\cos+i\sin\theta)=0 \longleftrightarrow r=0.$

6．共轭复数：$z=a+bi$ 和 $\bar{z}=a-bi$ 互为共轭复数。

7．复数的运算：

(1) 加法：$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

(2) 减法：$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$

(3) 乘法：①$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i$

②$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$

(4) 除法：① $\dfrac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\dfrac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}$，（其中 $a_2+b_2i\neq0$）

② $\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$，$(r_2\neq0)$.

(5) 乘　方：

① 应用二项式定理；

② 应用棣美弗定理：

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

(6) 开　方：

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

（其中 $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1.$）

8. 复数的性质：

（1） 复数没有顺序性，即两个复数中只要有一个不是实数，就不能比较其大小。

（2） 在复数范围内，永远可以施行加、减、乘、除、乘方和开方六种运算（除数不能为 0 ）。

[范例]：计算 $\frac{18-i}{4-3i}+i(3-5i)-\frac{55+3i}{5+7i}$

解：原式 $=\frac{(18-i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}+3i-5i^2-\frac{(55+3i)(5-7i)}{(5+7i)(5-7i)}$

$=\frac{75+50i}{25}+3i+5-\frac{296-370i}{74}$

$=3+2i+3i+5-4+5i=4+10i$

例 1. 计算：$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$

解：原式 $=\frac{1}{2^6}(\sqrt{3}+i)^6$

$=\frac{1}{2^6}[(\sqrt{3})^6+6(\sqrt{3})^5i+15(\sqrt{3})^4i^2+20(\sqrt{3})^3i^3+$

$+15(\sqrt{3})^2i^4+6\sqrt{3}i^5+i^6]$

$=\frac{1}{64}[(27-135+45-1)+(54-60+6)\sqrt{3}i]$

$=\frac{1}{64}(-64)=-1.$

此题也可用棣美弗定理解：

$\because\ \frac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}.$

$\therefore\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6=\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$

例 2. 解方程：$x^2+x+1=0.$

解：利用求根公式，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$\therefore$ 方程的两根为 $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

例 3. 解方程 $x^3+1=0$.

解：原式变为 $x^3=-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$$\therefore x=\cos\frac{2k\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{3},\ (k=0,1,2);$$

即 $x_1=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,$

$x_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$

$x_3=\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

说明：这里 x_1、x_2、x_3 是三次方程的三个根，其中一根为实根，另二根为共轭虚根，此题也可以这样解：

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$;

由 $x+1=0$, 得 $x_1=-1$,

又由 $x^2-x+1=0$, 得 $x_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $x_3=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$.

练 习 一（2）（A组）

1. 求 值：

(1) $i^{85}-i^{272}+i^{106}-i^{39}$

(2) $i^{-4n}+i^{-4n+1}+i^{-4n+2}+i^{-4n+3}$

2. 计 算：

(1) $\left(\dfrac{2}{3}+i\right)+\left(1-\dfrac{2}{3}i\right)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}i\right)$

(2) $\left(\dfrac{1}{3}+\sqrt{-3}\right)\left(-\dfrac{1}{3}+\sqrt{-3}\right)$

(3) $\dfrac{3+5i}{1-2i}$

(4) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{100}$

(5) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

(6) $\sqrt{-i}$

3. 化 简：

(1) $\dfrac{(1+i)^5}{1-i}+\dfrac{(1-i)^5}{1+i}$

(2) $\dfrac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(3-2i)^2+(2-3i)^2}$

4. 如果 $(1+i)^n=(1-i)^n$，求 n. $\left(提示：\frac{1+i}{1-i}=i\right)$

5. 设 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，求证：$(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$.

6. 解方程：$x^3+27=0$.

7. 求1的四次方根。

8. 求适合下列各式的实数 x 和 y 的值：

(1) $(1+2i)x-(3-5i)y=4-3i$

(2) $\frac{x}{1-i}+\frac{y}{1-2i}=\frac{5}{1-3i}$

(3) $(x+y)^2i-\frac{6}{i}-x=-y+5i(x+y)-1$.

9. 当实数 m 为何值时，复数 $(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$

（1）为一实数；（2）为一纯虚数？

10. 解方程：$3x^2+2=0$.

练 习 一（2）（B组）

1. 下列的计算中，把错在哪里指出来：

(1) $\sqrt{6}=\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}$.

(2) $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$，$\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{\frac{-1}{1}}$，$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$，$(\sqrt{1})^2=(\sqrt{-1})^2$

$\therefore 1=-1$.

2. 设 $f(z)=\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$ 求 $f(2-3i)$ 的值。

3. 计算：$\frac{9i^{-24}-3\sqrt{2}\,i^{-31}}{(3+\sqrt{2}\,i^{21})(1-\sqrt{2}\,i^{-23})}$.

4. 化简：$\frac{(\sqrt{3}+i)^3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)^5}$

5. 已知：m 是一个不等于零的实数，且 $|m|<1$，
求证：

$$\frac{\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}\,i}{\sqrt{1+m}-\sqrt{1-m}\,i}-\frac{\sqrt{1-m}+\sqrt{1+m}\,i}{\sqrt{1-m}-\sqrt{1+m}\,i}$$ 的值是一个实数。

6. 证明：$\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ 是方程 $x^4+x^2+1=0$ 的二根。

7. 解方程：(1) $2x+|x|=2+6i$，(2) $z^2=\bar{z}$.
（提示：设 $z=x+iy\,(y\neq0)$，则 $\bar{z}=x-iy$）

8. 计算 $\frac{(1+i)^{2n}}{(1-i)^{2n}}$，并讨论各种情况。

自 我 检 查 题（90分钟）

1. 比较下列各数的大小，用小于号连接，并在数轴上表示出来：

$\sqrt{9}$, $\sin 30°$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, $\lg 10$, $\sin(-\pi)$, $-\left|-\frac{3}{2}\right|$, $-\left(-\frac{2}{3}\right)$, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. 填空：

（1） 在①两个数都是正数，②两个数都是负数，③两个数异号，④两个数互为相反数，四种情况中，第____种情况使两数的绝对值一定相等？

（2） 两数的绝对值较大者，其原数也较大。这结论是对的还是错的？答：______

3. 计算：

(1) $(-3)^2-(-3)^3-2^2+(-2)^2$

(2) $3.25-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)+4\frac{2}{3}\right]$

(3) $-6\frac{7}{9}-\left[\frac{3}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+0.2+1\frac{3}{5}\div\frac{8}{7}\times(-1)^{90}\right]$

(4) $\left\{\left[4\frac{2}{3}\div\left(-\sqrt{\frac{1}{16}}\right)-(-0.4)\times\left(-\frac{5}{2}\right)^2\right]\div\left(-\frac{3}{5}\right)-20\right\}\times\left[\sqrt{0}+(-1)^{61}\right]$

4. 计算 $5\sqrt{2}-2\sqrt{3}$（精确到 0.01）；并写出祖冲之所求精确到 0.0000001 的圆周率 π 的不足近似值和过剩近似值。

5. 有没有一个数的相反数就是这个数本身？有几个这样的数？有没有一个数的倒数就是这个数本身？有几个这样的数？如果一个数的相反数比这个数大，它应该是什么样的数？如果一个数的倒数比这个数小，它应该是什么样的数？

6. 设 x、y 为有理数，而且 $(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$，求 x、y 的值。

7. 化简：$\frac{(1+i)^2}{1-i}-\frac{(1-i)^2}{1+i}$.

8. 计算：(1) $(1+\sqrt{3}\,i)^{10}$，　　(2) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\,i}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\,i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\,i}$.

9. 求 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}$，（$n$ 为正整数）。

10. 求证：n 是 3 的倍数时，

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n=2.$$

第二单元　代数式和指数对数式

在算术中，用数码（如 7、8）和数式（如 3+2，5×4）表示确定的一个数；在代数学中，则用字母（如 a, b, x, y）和各种数学式（如 $\frac{1}{2}a^2, \lg N$）表示一般的数。随着学习内容的开展，用文字表示的“一般的数”的概念也在发展：一方面，用 x、y、z 等作为方程中的未知元，函数中的变元，表示未知数、变数；另一方面，用 a、b、c 等表示代数式中的一般常数，方程中的常系数和待定常数，函数中确定过程的常数和参变数等。在本单元的代数式

和指数、对数式中，所有字母都表示一般的常数，具有所代表的数的运算性质。以下先复习代数式。

用有限次代数运算（指加、减、乘、除、乘方、开方）符号和运算顺序符号把数字和表示数的字母连结起来的式子叫做代数式；其分类如下表：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式——根式}\end{cases}$$

一、整　式

1．整式的加减法：应注意去括号和添括号的法则。

去括号时，$a+(b-c)=a+b-c$，　　$a-(b-c)=a-b+c$；

添括号时，$a+b-c=a+(b-c)$，　　$a-b+c=a-(b-c)$。

2．乘法公式：

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　　完全平方公式

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　平方差公式

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$　　立方和（差）公式

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$　　完全立方公式

例。计算：$(3a-4b+5c)(3a+4b-5c)$

解：原式$=[3a-(4b-5c)][3a+(4b-5c)]$

$=(3a)^2-(4b-5c)^2$

$=9a^2-(16b^2-40bc+25c^2)$

$=9a^2-16b^2+40bc-25c^2$

说明：解题中把代数式 $3a$ 和 $(4b-5c)$ 看作公式中的字母 a 和 b，因代数式和字母一样，都表示一般常数。这样组合可以扩大公式应用范围，但要注意添去括号时符号的变化。

3．因式分解：

（1）定义：把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解。

因式分解是整式乘法的逆运算，一般要注意两个问题：一是因式分解到什么程度，要依所给的数的范围而定，通常在不加声明时，都在有理数范围内进行，若需要在实数或复数范围内分解因式时，应指明要求；二是在所给的数范围内要分解彻底。

〔范例〕1．分解因式：x^4-4.

解：$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)$　　——在有理数范围内

$=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$　　——在实数范围内

$=(x+\sqrt{2}\,i)(x-\sqrt{2}\,i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$　　——在复数范围内

〔范例〕2．分解因式：$(ab+1)^2-(a+b)^2$.

解：原式$=(ab+1+a+b)(ab+1-a-b)$

$=(ab+a+b+1)(ab-a-b+1)$

$=[a(b+1)+(b+1)][a(b-1)-(b-1)]$

$=(b+1)(a+1)(b-1)(a-1)$.

说明：分解到 $(ab+a+b+1)(ab-a-b+1)$ 就未完。

（2） 因式分解的方法：

Ⅰ．提取公因式法：

例 1．$a^2(x-2a)^2-a(2a-x)^2$.

解：原式$=a^2(x-2a)^2-a(x-2a)^2=a(x-2a)^2(a-1)$.

说明：①注意到$(2a-x)^2=(x-2a)^2$；②要提取彻底；③第二项全部提取后，剩下的是 1 而不是 0。

Ⅱ．应用公式法：

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2,\qquad a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)\qquad a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$$

例 2．分解因式：$x^4+x^2y^2+y^4$

解：原式$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$
$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

说明：必须对公式基本形式比较熟悉，才会补项凑成公式的形式；要不断总结经验。

Ⅲ．分组分解法：

例 3．分解因式：$3a^3x-4b^3y-4a^3y+3b^3x$

解：原式$=(3a^3x+3b^3x)-(4a^3y+4b^3y)$
$=3x(a^3+b^3)-4y(a^3+b^3)$
$=(a^3+b^3)(3x-4y)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(3x-4y)$.

说明：分组要合理，否则提取一次公因式后即无下文。但分组的方法常常是不唯一的，如本题还可以这样分组：

$$(3a^3x-4a^3y)+(3b^3x-4b^3y).$$

Ⅳ．十字相乘法——叉乘试算法：

例 4．分解因式：(1) x^2+x-6

(2) $6x^2-13x+6$

(3) $x^2+2xy-8y^2-4x-10y+3$.

解：(1) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

$$\begin{array}{ccc}1 & \diagdown\!\!\!\diagup & 3\\ 1 & & -2\end{array}$$

(2) $6x^2-13x+6=(3x-2)(2x-3)$

$$\begin{array}{ccc}3 & \diagdown\!\!\!\diagup & -2\\ 2 & & -3\end{array}$$

(3) $\underline{x^2+2xy-8y^2}-4x-10y+3$

$$\begin{array}{ccc}1 & \diagdown\!\!\!\diagup & -2\\ 1 & & 4\end{array}$$

$=(x-2y)(x+4y)-4x-10y+3$

$$\begin{array}{ccc}x-2y & \diagdown\!\!\!\diagup & -3\\ x+4y & & -1\end{array}$$

$=(x-2y-3)(x+4y-1)$

或者：$x^2+2xy-8y^2-4x-10y+3$

$$=x^2+(2y-4)x-8y^2-10y+3 \qquad \begin{array}{ccc} 2y & \times & 3 \\ -4y & & 1 \end{array}$$

$$=x^2+(2y-4)x+(2y+3)(-4y+1) \qquad \begin{array}{ccc} x & \times & -(2y+3) \\ x & & -(-4y+1) \end{array}$$

$$=(x-2y-3)(x+4y-1)$$

或者利用恒等概念和待定系数法：

$\because x^2+2xy-8y^2=(x-2y)(x+4y)$

$\therefore$令原式$=(x-2y+a)(x+4y+b)$

把两边展开，比较两边同类项系数，得 $a=-3$, $b=-1$.

$\therefore$原式$=(x-2y-3)(x+4y-1)$

或者：把 x 当作未知数，y 当作已知数，解方程得出两个根，再写成因式，

说明：二次三项式的十字相乘法在研究一元二次方程，一元二次不等式和二次函数时经常用到。关于二次三项式的分解因式，还有以下几种方法：（见例 5）

例 5．分解因式：$x^2-4xy-12y^2$

1．观察法：根据公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$;

2．配方法：原式$=x^2-4xy+4y^2-16y^2=(x-2y)^2-(4y)^2$;

3．分裂中项法：原式$=x^2+2xy-6xy-12y^2$

$$=x(x+2y)-6y(x+2y)$$

4．求根公式法：若 x_1、x_2 为 ax^2+bx+c 的两根，则 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

$\because$二次三项式 $x^2-4xy-12y^2$ 的两根为 $x=6y$, $x=-2y$.

$\therefore x^2-4xy-12y^2=(x-6y)(x+2y)$.

V、分裂项法和增补项法：

例 6．分解因式：x^3-7x+6

解法 1：$x^3-7x+6=x^3-x-6x+6$（把 $-7x$ 分裂成 $-x$ 和 $-6x$）

$$=x(x^2-1)-6(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3).$$

解法 2：$x^3-7x+6=x^3-x^2+x^2-7x+6$（加 x^2 项，同时减 x^2 项）

$$=x^2(x-1)+(x-1)(x-6)$$
$$=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3)$$

因式分解检验的两种方法：

1．因式分解是多项式乘法的逆运算，可乘回去检验。

2．因式分解是恒等变形，可用适当数字代入检验。

例 7．在实数范围内分解因式：$2x^2+\sqrt{3}\,x-1$.

解：先求根：$x=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{4}$

$$\therefore 2x^2+\sqrt{3}\,x-1=2\left(x-\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}\right)\left(x-\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{11}}{4}\right)$$

$$=2\left(x+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{4}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}\right).$$

例 8. 在复数围范内分解因式：$3x^2+2x+1$

解：先求根：$x=-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i$

$$\therefore 3x^2+2x+1=3\left[x-\left(-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)\right]\left[x-\left(-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)\right]$$

$$=3\left(x+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)\left(x+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i\right).$$

练　习　二（1）（A组）

1． 下列各式是否为代数式，如是则加以分类：

$2a$, O, $\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$, $-\frac{4y}{\sqrt{3}}\cos x$, 2^x, ax^2+bx+c, $\frac{x-y}{a+b}$, $\lg(x+1)$, $(x+y)^{-2}$.

2． 用代数式表示：

（1） a 与 b 的和的平方减去 a 与 b 的平方和。

（2） a 的平方的相反数与 b 的相反数的平方的差。当 $a=-2$, $b=-3$ 时，分别求出这些代数式的值。

3． 把多项式 $2x^2-3x^3-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}x^4+1$ 按 x 的降幂排列，并求出当 $x=-1$ 时，此代数式的值。

4． 化简：

(1) $-(a+b)+[-a-(2a-b)]-6(a-4b)$

(2) $6x-\{4x+[2x-(-3x+5x+7-10x)+3]-8\}$

5． 计算：

(1) $(3a+2b)-(5a-4b)$,　　(2) $(5a-2b+3)+(4a+2b-4)$

(3) $4x+(3x-4y+5z)-(4x-8y-2z)$,

(4) $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}xy+\frac{1}{5}y^2\right)-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{3}{4}y^2\right)$.

6． 判断正误，如有错则改正右边：

(1) $(x^3)^2=x^5$　　(2) $x^3\cdot x^2=x^6$　　(3) $(6xy)^2=12x^2y^2$

(4) $7a^2\cdot 8a^3=15a^5$　　(5) $x^4\cdot x^4=x^8$　　(6) $a^4+a^4=a^8$

7． 计算：

(1) $-2a(a^3-2a^2+6a-1)$　　(2) $-3a^2b(3a^3-2a^2b-4ab^2+5b^4)$

(3) $-\frac{2}{3}xyz\left(\frac{3}{2}xy-\frac{5}{4}yz-\frac{3}{8}zx\right)$　　(4) $2(x^2-xy+5y^2)-3(x^2-3xy-4y^2)$