College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

同济大学应用数学系 编

线性代数附册
学习辅导与习题选解

同济·第四版

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

线性代数附册
学习辅导与习题选解

（同济·第四版）

同济大学应用数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学应用数学系编《线性代数》第四版配套的学习辅导书，主要面向使用该教材的学生，也可供有关教师参考。本书编者之一是《线性代数》第四版的编者，另一位编者在同济大学多年执教线性代数课程。为了与教学需求保持同步，本书按《线性代数》第四版的编排顺序逐章编写，每章内容包括基本要求、内容提要、学习要点、释疑解难、例题剖析与增补、习题选解和补充习题(附答案和提示)等七个栏目。其中“释疑解难”显示出编者对课程内容的深刻理解和长期教学积累的丰富经验；“例题剖析”充分开发出例题的作用，还有助于读者掌握举一反三的学习方法；“习题选解”注重阐明解题的思想方法，一题多解有助于各部分内容的融会贯通。

本书相对于教材具有一定的独立性，可作为工科和其他非数学类专业线性代数课程的学习参考书，也可作为考研的复习指导书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数附册学习辅导与习题选解:同济·四版/同济大学应用数学系编.—北京:高等教育出版社，2003.8

ISBN 7-04-011993-5

Ⅰ.线… Ⅱ.同… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 043832 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京人卫印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 8 月第 1 版
印　　张	13.25	印　　次	2003 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	240 000	定　　价	14.50 元

前 言

本书是与同济大学应用数学系编《线性代数》第四版(由高等教育出版社出版)相配套的学习辅导书,主要面向使用该教材的学生,也可供有关教师作教学参考,还可作为硕士研究生入学考试的复习指导书。

近年来我国高等教育的规模迅速扩展,并且从已往的精英教育向大众化教育转变。在这个过程中,社会各界特别是教育界都对高等教育的质量十分关注。我们编写这本辅导书,就是为了适应这种变化的形势,满足众多学生学习线性代数课程的需要,期望能对提高线性代数课程的教学质量、对学生达到线性代数课程的教学基本要求起到一种辅助作用。

本书按《线性代数》第四版的章节顺序编排,以便与教学需求同步;同时又具有相对的独立性,以便读者使用。我们对应第四版教材逐章编写,每章包括以下几部分内容:

一、基本要求　主要根据教育部高教司颁发的工科本科线性代数课程教学基本要求确定,同时也根据当前的教学实际作了少许修改并细化。

二、内容提要　归纳本章的主要内容。

三、学习要点　概括地阐明本章的重点和学习的关键。

四、释疑解难　针对本章的重点内容和较难理解的内容,针对学生在学习本章时常常问及的一些共同性的并有较大意义的问题,编选出若干个问题予以分析、解答,以帮助读者释疑解难并加深理解。

五、例题剖析与增补　对教材中约1/2的例题加以剖析,分析其解题思路、所用的原理和方法,说明该例的意义或引申到一般化的结论。并适当补充若干例题,补充的例题不在于它的解题技巧,其内容和要求仍属于基本要求的范围。

六、习题选解　选择教材中具有典型性的或难度较高的习题(约占教材习题的1/2)作出解答,其中多数给出几种解法,并视需要作适当的评述。

七、补充习题(附答案和提示)　为满足读者练习的需要,补充少量习题,其中包括若干选择题。

在上列“释疑解难”和“例题剖析”两项内容中,有几处我们作了超出教学基本要求的扩展。对这些内容我们都加了“*”号,以显示它们超出教学基本要求,仅供对线性代数课程有较高要求的读者选学。

本书由同济大学应用数学系骆承钦、胡志庠合编。由于我们对编写此类辅导书缺乏经验,又限于水平,书中难免存在不足之处,恳请同行和读者批评指正。

编　者

2003年3月

使用说明

1. 本书中所称“教材”是指同济大学应用数学系编《线性代数》第四版。

2. “释疑解难”中的问题编号用“问 $m \cdot n$”，其中 m 为章号，n 为题号。“例题剖析与增补”中例题的编号“例 n”为该例在教材同一章中的编号，补充例题的编号用“例 $m \cdot n$”，其中 m 为章号，n 为题号。“习题选解”中的题号为该习题在教材同一章中的编号，“补充习题”的编号用“$m \cdot n$”，m 为章号，n 为题号。

3. 补充例题和习题中，有一部分选自历年硕士研究生入学考试试题，这些题的编号后有一个括弧，括弧中的数字是该题用于考研试题的年份。例如例 4.1(1988)，表示该例是 1988 年的考研试题。

4. 本书中采用的逻辑符号的含义：

$\forall$ 任给

$\Rightarrow$ 推出

$\Leftrightarrow$ 互推，等价，充分必要条件

$\because$ 因为

$\therefore$ 所以

目　　录

第一章 行列式

基本要求

1. 会用对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列式.
2. 知道 n 阶行列式的定义及性质.
3. 知道代数余子式的定义及性质.
4. 会利用行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式.
5. 知道克拉默法则.

内容提要

1. 行列式的定义

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中,$(p_1p_2\cdots p_n)$为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数,求和符号 $\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 是对所有排列$(p_1p_2\cdots p_n)$求和.

n 阶行列式D 中所含n^2个数叫做 D 的元素,位于第 i 行第j 列的元素a_{ij}叫做 D 的(i,j)元.

二阶和三阶行列式适用对角线法则.

2. 行列式的性质

(1) 行列式 D 与它的转置行列式D^{T}相等.

(2) 互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式;或者,行列式的某一行(列)的各元素有公因子 k,则 k 可提到行列式记号之外.

(4) 行列式中如果有两行(列)元素完全相同或成比例,则此行列式为零.

(5) 若行列式的某一列(行)中各元素均为两项之和,则此行列式等于两个行列式之和.

例如

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\qquad\text{第 } j \text{ 列} \qquad\qquad\\
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+a'_{nj}) & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c}
\qquad\quad\text{第 } j \text{ 列} \qquad\quad\\
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
+
\begin{array}{c}
\qquad\quad\text{第 } j \text{ 列} \qquad\quad\\
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

如果这样,就形象地称为行列式按第 j 列拆成两个行列式.

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

3. 行列式的按行(按列)展开

(1) 把 n 阶行列式中 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $n-1$ 阶行列式称为 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则称 A_{ij} 为 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

(2) n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与对应于它们的代数余子式的乘积的和.即可以按第 i 行展开:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

或可以按第 j 列展开:

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

(3) 行列式中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+A_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+A_{ni}A_{nj}=0,\ i\neq j.$$

4. 克拉默(Cramér)法则

含有 n 个未知元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零时，称为齐次线性方程组；否则，称为非齐次线性方程组.

(1) 如果方程组(1.3)的系数行列式 $D \neq 0$，那么，它有唯一解：$x_i = \dfrac{D_i}{D}(i = 1,2,\cdots,n)$，其中，$D_i(i=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 i 列元素用方程组(1.3)的右端的自由项替代后所得到的 n 阶行列式.

(2) 如果线性方程组(1.3)无解或有两个不同的解，那么，它的系数行列式 $D=0$.

(3) 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，那么，它只有零解；如果齐次线性方程组有非零解，那么，它的系数行列式必定等于零.

5. 一些常用的行列式

(1) 上、下三角形行列式等于主对角线上的元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(未标明的元素均为零，下同).

特别，对角行列式等于对角线元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

(2) 设 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，

则
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = D_1 D_2.$$

(3) 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\xlongequal{\triangle}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

学 习 要 点

本章的重点是行列式的计算.对于 n 阶行列式的定义只需了解其大概的意思,对于行列式各条性质的证明只需了解其基本思路.要注重学会利用这些性质及按行(列)展开等基本方法来简化行列式的计算,并掌握两行(列)交换、某行(列)乘数、某行(列)加上另一行(列)的 k 倍这三类运算.按照“会计算简单的 n 阶行列式”这一基本要求,对于计算行列式的技巧毋需作过多的探求.

释 疑 解 难

问 1.1 行列式与行列式的值有什么区别?

答 这是一个“形式”与“内涵”的问题.以二阶行列式为例.式子$\begin{vmatrix}x&y\\u&v\end{vmatrix}$叫做二阶行列式,它表示一个数

$$xv-yu$$

这个数叫做二阶行列式的值,并记作

$$\begin{vmatrix}x&y\\u&v\end{vmatrix}=xv-yu.$$

注意上式中的等号是“记作”的意思,但由于等号通常理解为两边的数相等,因此上式左边的行列式记号也就表示行列式的值.两个行列式相等是指它们的值相等.

由于行列式记号既表示行列式,又表示它的值,因此教材中没有明确提出“行列式之值”这一名称,把“行列式的值”也叫做“行列式”.

问 1.2 如何理解行列式的定义?

答 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的定义

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.此定义中应注意两点:

(1) 和式记号$\sum$是对集合 $P=\{p_1p_2\cdots p_n \mid p_1p_2\cdots p_n$是 $1,2,\cdots,n$ 的排列$\}$作和，因 n 个不同元素的全排列数是$n!$，于是该和式共有 $n!$ 项；

(2) 和式中的任一项 σ 是取自D 中不同行、不同列的元素之积.由排列知识知，D 中这样不同行、不同列(即两两“不共线”)的 n 个元素之积共有$n!$ 个.

(3) 和式中任一项 σ 都带有符号$(-1)^t$，t 是排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数，即根据此排列的逆序数为偶数或奇数，σ 依次取“+”或“−”.根据排列的性质，$\frac{n!}{2}$个偶排列，$\frac{n!}{2}$个奇排列.

由上所述可知，n 阶行列式D 恰好是D 的不同行、不同列的 n 个元素之积的代数和，是一个“积和式”，其中一半带有正号，一半带有负号.

问 1.3 (1) 余子式与代数余子式有什么特点？(2) 它们之间有什么联系？

答 (1) 对于给定的 n 阶行列式$D=\det(a_{ij})$，(i,j)元 a_{ij} 的余子式M_{ij}和代数余子式A_{ij}仅与位置(i,j)有关，而与 D 中第i 行、第 j 列元素的数值大小和正负无关.

(2) 它们间的联系是 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{i+j}$，因而当 $i+j$ 为偶数时，二者相同；当 $i+j$ 为奇数时，二者相反.它们间的关系可用图示为

$$
\begin{pmatrix}
+ & - & & & & \\
- & + & - & & \ddots & \\
 & - & + & & \ddots & \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & - \\
 & & & & - & +
\end{pmatrix},
$$

其中，符号“+”表示对应位置上 $A_{ij}=M_{ij}$；符号“−”表示对应位置上 $A_{ij}=-M_{ij}$.对上图的规律可简单地说明：对角线上为正，正的“邻居”为负，负的“邻居”为正.

例题剖析与增补

例 5 证明

$$
\begin{vmatrix}
 & & & \lambda_1 \\
 & & \lambda_2 & \\
 & \iddots & & \\
\lambda_n & & &
\end{vmatrix}
=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.
$$

析 本例根据 n 阶行列式的定义作出证明.在 n 阶行列式的定义中,行列式的元素记作 a_{ij},记号 a_{ij} 不仅代表一个数,还表明这个数在行列式中的位置.本例中的数用 λ_i 表示,记号 λ_i 不能显示它在行列式中的位置.因此需要按 λ_i 在行列式中的位置,把 λ_i 改记作 $a_{i,n-i+1}$,从而得到乘积 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 中各元素的列标排列为

$$n(n-1)\cdots 21,$$

由此计算出这个排列的逆序数为

$$t=0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

本例所用的手法在§5行列式性质1和性质2的证明中也用到了.例如在性质1的证明中,由于数 a_{ij} 在 D 中是 (i,j) 元(记号 a_{ij} 的下标与位置相符)数 a_{ij} 在 D^{T} 的位置是 (j,i) 元(a_{ij} 的下标与位置不相符),因此按定义 D^{T} 不能直接用 a_{ij} 表示,需要引入 D^{T} 的 (i,j) 元记作 b_{ij},再根据 $b_{ij}=a_{ji}$,得出 D^{T} 与 D 的关系 $D^{\mathrm{T}}=D$.

例6 证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

析 本例用定义计算行列式之值.类似地可证明上三角形行列式=对角线元素之积.上(下)三角形行列式是计算行列式的基本工具,应当作为公式熟练应用.

例7 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

析 教材分别在§5及§6两节中,利用行列式性质(包括按行(列)展开性质)计算此行列式 D 的值.§5中,把 D 化成上三角(或下三角)形行列式.§6中,把 D 按行(或列)展开,例如按第3行展开.为减少展开式中非零项的项数,先利用行列式性质,把第3行除元素 a_{33} 之外全化成0,使展开式中只有一项.这两种方法是行列式计算中最基本的方法,要熟练掌握.

例8 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

析 本例中 D 属于一类重要的行列式,在后继内容中会多次遇到此类行列式,其特点是对角线元素相同,并且非对角线元素也相同.它的一般形式为习题 7(2),那里将用四种方法计算其值,但最基本也最方便的方法就是本例介绍的,即利用各列(行)元素之和相等,把各行(列)同时加到第 1 行(列).

例 10 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}, D_1=\det(a_{ij}), D_2=\det(b_{ij}),$$

证明 $D=D_1D_2$.

析 本例的叙述虽有些抽象,但思路是简单的.学习本例,应侧重于它的结果,以后常要用到此结果.用第二章矩阵的语言来叙述,此结果是

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{vmatrix}=|A_1||A_2|,$$

显然它是 $\begin{vmatrix} d_1 & 0 \\ d_3 & d_2 \end{vmatrix}=d_1d_2$ 的推广.

例 11 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}.$$

析 此例的目的是介绍递推法.递推法是行列式,尤其是 n 阶行列式计算中常用的、有效的方法.应用递推法的实质是数学归纳法,因此建立了递推公式 $D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$ 之后必须验证归纳基础,例如 $n=1$ 或 $n=2$ 时命题成立.

例 12 证明范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j). \tag{1.1}$$

析 (1) 应注意教材中把 D_n 降阶的技巧:从第 n 行开始,后行减前行的 x_1 倍.如果进行相反方向的运算,即从第 2 行开始,后行减前行的若干倍,则无法达到降阶的目的.

(2) 范德蒙德行列式看作 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数,有三个特点:

(i) 从列的角度看,第 j 列元素从上到下依次为变元 x_j 的零次幂、一次幂、…、$(n-1)$次幂,$j=1,2,\cdots,n$;

(ii) 从行的角度看,第 i 行(i,k)元是变元 x_k 的$(i-1)$次幂,$k=1,2,\cdots,n$,$i=1,2,\cdots,n$;

(iii) 从结果看,它是关于这些变元的$\frac{1}{2}n(n-1)$次齐次函数;而且该齐次函数可分解为$\frac{1}{2}n(n-1)$个一次因式之积,而每个因子形如 x_i-x_j,其中,$1\leqslant j<i\leqslant n$,即足标大的变元与足标小的变元之差.反过来,$n$ 个变元之间形如这样的一次因子总计为$\frac{1}{2}n(n-1)$个.于是,n 阶范德蒙德行列式是所有可能的足标大的变元与足标小的变元之差作为其因子的 n 元函数.除变元的名称外,这样的函数是唯一确定的.

例 13 设

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

D 的(i,j)元的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij},求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

析 本例的目的是熟悉代数余子式(或余子式)的一个不太容易掌握的性质以及行列式按行(或按列)展开的性质.以求 $\sigma=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 为例.

(1) 如果用代数余子式定义,那么要计算 4 个 3 阶行列式,显然计算量比较大.

(2) 代数余子式 A_{ij} 的显著特点是它与 D 的第 i 行、第 j 列元素本身的数值大小及正负无关.因此从映射角度看,与其说 D 的(i,j)元 a_{ij} 对应着唯一的 A_{ij},倒不如说 D 的(i,j)元所在的位置(i,j)对应着唯一的 A_{ij}.由此可知,和式 σ 与 D 的第 1 行元素无关.令

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

则 D_1 与 D 具有相同的和式 σ,但 D_1 的这个和式恰好是 D_1 按第 1 行的展开式,于是

$$\sigma = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = D_1.$$

同理,因 $M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41} = A_{11} - A_{21} + A_{31} - A_{41}$,此和式与 D 的第 1 列元素无关.

例 1.1 由行列式定义,计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.

解 由行列式定义,$f(x)$ 是所给行列式中所有取自不同行、不同列的元素之积的代数和,记为 D,它是关于 x 的 4 次多项式.因行列式中每个元素至多是 x 的一次幂,于是

σ 是 D 中的 x^4 项

$\Leftrightarrow \sigma$ 含有 4 个取自不同行、不同列的 x 一次项的元素;

$\Leftrightarrow \sigma$ 是 D 的(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)元之积;

$\Leftrightarrow \sigma = 2x^4$(容易知道该项的符号为正);

σ 是 D 中的 x^3 项

$\Leftrightarrow \sigma$ 含有 3 个取自不同行、不同列的 x 一次项的元素,而余下一行、一列的元素(已唯一确定)是常数;

$\Leftrightarrow \sigma$ 是 D 的(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)元之积;

$\Leftrightarrow \sigma = -x^3$(容易知道该项的符号为负).

例 1.2 求 5 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

解一 利用各行的元素之和相同的特点,把除第 1 列以外的各列加到第 1 列,得

$$D=\begin{vmatrix}15&2&3&4&5\\15&3&4&5&1\\15&4&5&1&2\\15&5&1&2&3\\15&1&2&3&4\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&5&1\\1&4&5&1&2\\1&5&1&2&3\\1&1&2&3&4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2\\r_2-r_1}]{r_5-r_4}15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&1&1&-4&1\\0&1&-4&1&1\\0&-4&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}15\begin{vmatrix}1&1&1&-4\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix},$$

对上式最后一个行列式作变换:把各行加到第 1 行并提取第 1 行的公因子 -1,得

$$D=-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-5&0\\0&-5&0&0\\-5&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3\div(-5)\\r_4\div(-5)}]{r_2\div(-5)}1\,875\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix},\tag{1.2}$$

在式(1.2)最后一个行列式中,把最后一行依次与它前面的行交换,直至换到第 1 行;再在所得行列式中,把最后一行依次与它前面的行交换,直至换到第 2 行……直至第 1 行换至最后一行,这样共进行了 6 次行交换,于是

$$D=(-1)^6\times 1\,875\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=1\,875.$$

注 对(1.2)式中最后一个行列式,只须作 $r_1\leftrightarrow r_4$ 和 $r_2\leftrightarrow r_3$ 两次行交换,即可求得行列式之值.但解一的优点是它可立即把本例中的 4 阶行列式推广到同类型的 n 阶行列式去,此方法是行列式计算中的一个基本技巧.

解二 从 D 的最后一行开始,后行减去前行,得:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&-4\\1&1&1&-4&1\\1&1&-4&1&1\\1&-4&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{并提取第 1 列公因子 15}]{\text{第 1 列加上以后各列,}}15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&1&1&-4&1\\0&1&-4&1&1\\0&-4&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=15\begin{vmatrix}1&1&1&-4\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix},$$

上式中,最后一个行列式已与(1.2)式中第 1 个行列式相同,以下与解一相同.

例 1.3 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1&1&\cdots&1\\1&a_2&&0\\\vdots&0&\ddots&\\1&&&a_n\end{vmatrix},\text{其中},a_1a_2\cdots a_n\neq0.$$

解一 通过把 D 的第 1 行中除第 1 列元素 a_1 外其他元素均变成为零,化 D 为下三角形行列式,具体如下:

$$D\xlongequal[\substack{r_1-\frac{1}{a_3}r_3\\ \cdots\\ r_1-\frac{1}{a_n}r_n}]{r_1-\frac{1}{a_2}r_2}\begin{vmatrix}b&&&&\\&a_2&&0&\\&&a_3&&\\&*&&\ddots&\\&&&&a_n\end{vmatrix}=ba_2a_3\cdots a_n\text{[注]},$$

其中,$b=a_1-\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}-\cdots-\dfrac{1}{a_n}$,于是,$D=a_2a_3\cdots a_n\left(a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)$.

解二 把 D 按第 1 行展开,由代数余子式

[注] 在行列式的计算中,我们常用"*"表示那里可能有一些非零元素,但对行列式的值没有影响;用 0 表示那里的元素都是零.