自学参考用書

高中平面几何

王澄編著

浙江人民出版社

自学参考用書

高中平面几何

王澄編著

浙江人民出版社

高中平面几何

王澄编著

※

浙江人民出版社出版
杭州武林路万石里
浙江省书刊出版业营业許可証出字第001号
地方国营杭州印刷厂印刷·新华書店浙江分店发行

※

开本787×1092耗 1/32 印張 4 13/16 字数 116,000
1957年11月 第 一 版
1958年 5 月第二次印刷
印数：13,071—16,082

統一書号： 13103·13
定 价：(7)四角二分

出 版 者 的 話

本社出版这套叢書，是为了支援知識青年向科学進軍，使他們通过自学，進一步掌握科学基礎知識，更好地为社会主义建設事業服务。

这套叢書是本社已出版的初中自学参考用書的繼續，讀者对象主要是具有高中文化程度的青年羣众和干部，包括高中畢業生在內。

这套叢書是根据自学这个特点進行編寫的，在合乎科学性和系統性的原則下，適当地联系实际，并結合貫徹思想政治教育。文字也力求淺近易懂。每一种学科各有重点，不是高中課本的复述，而是課本內容的概括和提高。因此，这套叢書不但可作为知識青年的自学参考讀物，也可作为高中教师教学上的輔助材料。

这套叢書难免存在着一些缺点甚至錯誤，希望讀者不吝指正。

浙江人民出版社

目　錄

第一講　綫段的度量

第二講　相似形

第三講　关于比例綫段的若干定理

第四講　三角形及圓中各綫段間的相互关系

第五講　用代数法解作圖題

第六講　面積

第七講　正多边形

第八講　圓的周長和面積

練習題的解答

第一講　綫段的度量

§1.引　言

在初中平面几何中，我們已經知道怎样用叠合的方法來判断兩条綫段的相等或不等，設有兩条綫段AB和CD，把 AB 放置到 CD上去，使点A和点C重合，并且使綫段AB順着綫段CD落下。如果点B和点D也重合，这就可知綫段AB和綫段CD相等；如果点B落在綫段 CD 中某一点E的位置，則綫段 AB 就小于綫 段 CD（圖 1 ）；如果点B落在綫段 CD 的延長綫上某一点 E′ 的位置，則綫段 AB 就大于綫段 CD（圖 2 ）。

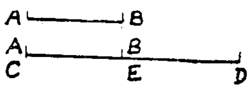

圖　1

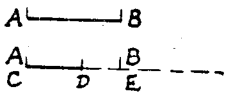

圖　2

上面所說的只是綫段的大小概念，如果只要求比較兩个綫段是否相等，那末这些知識就尽够应用了。但是为了討論兩綫段的比，我們还要進一步來研究綫段的度量，也就是怎样用数來表示綫段的長度的問題。首先，我們來敍述一个公理，因为它是綫段度量問題的基礎。

公理　在長短不同的兩条綫段中，無論較長的綫段怎样長，較短的綫段怎样短，我們总可以在較長的綫段上連續截取較短的綫段，并且截取到某一次以后，就得出下面兩种情形之一：或者沒有剩余，或者得到一条短于較短綫段的剩余綫段。

事实上，譬如我們通常用“尺”去量某一条綫段，結果总是得到下面兩种情形之一：或者剛好是几尺沒有剩余；或者量了几尺之后，还剩下一段，但是剩余的綫段却不是一尺了。所以这

个公理，和其他公理一样，也是从人类的实踐中得出來，而且为实踐所証明了的。这个公理通常叫做亚几默得公理，这是因为它是希臘数学家亚几默得提出來的緣故。但是，我國古代約比亚几默得早200年的时候，有一个哲学家墨翟在他所著的“墨子”一書中就提出了类似的結論，他說“窮，或有前不容尺也”，意思是：如果用尺去量东西，或者剛好量完（窮就是尽的意思），或者有小于一尺的剩余（不容尺就是不足一尺的意思）。所以有的几何教科書（例如中等專業学校几何教科書）中就把这公理叫做“或不容尺公理”。

我們也可以用另外一种方式來表达这个公理：如果a和b是兩条已知的綫段($a<b$)，那末我們总可以找出一个正整数m，使得$ma\leqslant b$，且$(m+1)a>b$，或者連起來寫成$ma\leqslant b<(m+1)a$。这也就是說在b上連續截取綫段a到m次后，所得結果或者是剛好截完，或者还剩下一些，但是这剩下來的部分一定小于a。

§2.兩条綫段的公度

如果兩条綫段（b，c）各含有第三条綫段（a）的整数倍而沒有剩余（$b=ma$，$c=na$，m、n都是正整数），第三条綫段就叫做这兩条綫段的公度。如圖3，$b=5a$，$c=3a$，a就是b、c的公度。

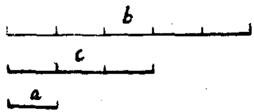

圖 3

从$b=ma$，$c=na$，容易得出$b=2m\cdot\left(\frac{a}{2}\right)$，$c=2n\cdot\left(\frac{a}{2}\right)$，这意思就是：如果把a分成二等分，則b含有2m个等分，c含有2n个等分，因此a的一半也是b，c的公度。同样，把a分成任意等分，則每一等分都是b，c的公度。

由是可知，如果兩个綫段有一个公度，則必定有無数个公度。这些公度中沒有最小的，但有一个最大的。兩綫段的公度中最大的一个就叫做最大公度。

現在進一步研究兩条綫段的最大公度的求法。首先，讓我們敍述兩个定理：

定理1　在兩条綫段中，如果較長的綫段含有較短的綫段的整数倍而沒有剩余，那末較短的綫段就是它本身和較長綫段的最大公度。

設綫段a和b（$b>a$），$b=ma$（m是正整数），那末由$b=ma$和$a=a$这兩个式子就知道a是b和a的公度。同时，它又是最大公度，因为如果还有比a大的公度，那末a就要含有比它本身还要長的綫段的整数倍，而这是不可能的。

定理2　在兩条綫段中，如果較長的綫段含有較短的綫段的整数倍而有剩余，那末这兩条綫段的最大公度（如果存在的話）等于較短的綫段和剩余綫段的最大公度。

設綫段a和b（$b>a$），在綫段b上連續截取綫段a經m次后，得到一个剩余綫段r，或者寫成式子，就是：

$$b=ma+r$$

从这个等式可以看出，如果d是a和r的公度，即a和r各含有d的整数倍而沒有剩余，那末b也含有d的整数倍而沒有剩余。所以d也是a和b的公度。

其次，如果d是a和b的公度，即a和b各含有d的整数倍而沒有剩余，从上式又可以看出r也必定含有d的整数倍而沒有剩余。所以，a和b的公度也就是a和r的公度。

由是可知，兩組綫段a和b与a和r，如果有公度存在，那末所有的公度必然都是相同的，因而它們的最大公度也必然相同，这就証明了定理2。

根据这兩个定理就得到兩条綫段的最大公度的求法如下：

設綫段a和b（$a<b$），在綫段b上連續截取綫段a，則可能有兩种情形：

1）綫段b恰好含有綫段a的整数倍而無剩余，这时a和b的最

大公度就是a（根据定理1）。

2）在b上連續截取a，經m_1次后得到一条剩余綫段r_1（$r_1<a$），于是根据定理2，要求a和b的最大公度，只要求a和r_1的最大公度就好了。为了求a和r_1的最大公度，我們再在a上連續截取r_1，又可能出現兩种情况：①連續截取m_2次后，沒有剩余，这时r_1就是最大公度，②連續截取m_2次后，得到一条剩余綫段r_2（$r_2<r_1$），于是求a和r_1的最大公度又可化为求r_1和r_2的最大公度了，如此繼續輾轉相截，如果到若干回后，正好截完沒有剩余，則最后一回的剩余綫段就是所求的綫段a和b的最大公度。这时我們叫这二綫段为有公度綫段。如果輾轉相截一直進行下去，永远有剩余，那末，我們就叫这二綫段为無公度綫段。

例如有綫段a和b（$a<b$），在b上連續截取三次綫段a后，得剩余綫段r_1，（$r_1<a$），再在a上連續截取二次綫段r_1后，得剩余綫段r_2（$r_2<r_1$），

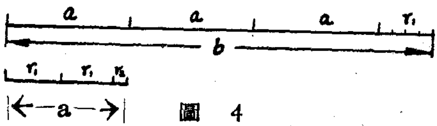

圖 4

最后在r_1上連續截取四次綫段r_2后恰好沒有剩余，用式子來表示，就是：

$$b=3a+r_1,\quad a=2r_1+r_2,\quad r_1=4r_2$$

根据定理2，从第一回相截的結果，可知a和b的最大公度等于a和r_1的最大公度，又从第二回相截的結果，可知a和r_1的最大公度等于r_1和r_2的最大公度。最后，根据定理1，从第三回相截的結果，可知r_1和r_2的最大公度就是r_2。所以最后一回的剩余綫段r_2，就是a和b的最大公度。

从式子來看：
$$a=2r_1+r_2=2\times4r_2+r_2=9r_2$$
$$b=3a+r_1=3\times9r_2+4r_2=31r_2$$

也可以很明白地知道a和b的最大公度是r_2。

§3.無公度綫段

在上節中我們講到，对兩条綫段施行輾轉相截时，可能会遇到这样一种情况，即一直進行下去，永远截不完，永远有剩余。換句話說，就是任何兩条綫段不一定都是有公度的，也可以是無公度的。关于这一点，讀者也許要發生怀疑，因为事实上，如果用圓規去截，只要半徑愈來愈小，不是終究可以截尽無余嗎？但是我們要指出，我們的繪圖仪器的精确度是有限的，無法作出任意小的綫段來，因此截到后來就模糊不清，看起來似乎已經截完，实际上还是有些剩余，这是沒有什么奇怪的。但是，在理論上，任意小的綫段是存在的，而兩綫段經輾轉相截后永远会有剩余的情况也是可能的。下面我們举兩个例子來說明無公度綫段的存在。

我們举的是大家很熟悉的事物，就是日常用的兩塊三角板：第一塊是一个等腰直角三角形，它的斜边和腰是無公度的綫段；第二塊是一个帶有30°和60°的銳角的直角三角形，它的兩条直角边是無公度的綫段。

例1.設有等腰直角三角形ABC，要証明它的腰AB（或AC）和斜边BC無公度，为此，我們在BC上截取BD使它等于AB，过D作BC的垂綫和AC相交于E。则 △CDE也是等腰直角三角形（因为∠ECD＝45°，∠EDC＝90°从而∠DEC＝45°），所以DC＝DE，再看△ADE，由于∠DAE＝90°－∠BAD，∠ADE＝90°－∠BDA，而∠BAD＝∠BDA，（因为△BAD是等腰三角形），因此∠DAE＝∠ADE，从而DE＝AE，所以得到AE＝DC。

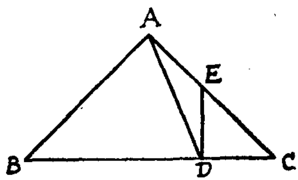

圖 5

我們运用上節所講的輾轉相截法，來求綫段 BC 和 AB 的公度。先在BC上截取BD＝AB。因为BC＞AB，而 BC＜AB＋AC，

即$BC<2AB$，所以在BC上截取AB一次后，就得到一条小于AB的剩余綫段DC。再在AC上（AC和AB是相等的）截取等于DC的綫段。因为上面已經証明$AE=DC$，所以在AC上截取了一次以后，还要在EC上截取等于DC的綫段。于是問題又变成在等腰直角三角形CDE的斜边（EC）上截取它的直角边（DC），結果仍然是截了一次之后就得到一条小于DC的剩余綫段。如此順次做下去，总是在新的較小的等腰直角三角形的斜边上截取它的直角边，顯然这种輾轉相截的过程是永远不会完結的。由是可見AB和BC是無公度的綫段。

例2.設有直角三角形ABC，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$\angle B=60°$，求証BC和CA是無公度的綫段。为此，取AB的中点D，連接CD，則$AD=DB=CD=BC$（为什么？），在CA上截取$CE=CD$，連接DE。

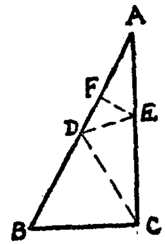

圖 6

这样一來，BC和CA有沒有公度的問題就变成AD（$=BC$）和AE有沒有公度的問題了，过E作AD的垂綫EF，再看$\triangle AEF$它也是有着一个銳角是30°的直角三角形，所以$AE=2EF$，因此，問題又可以轉变为AD和EF有沒有公度了。

現在再來研究$\triangle EFD$，$\angle FDE=180°-\angle BDC-\angle CDE=180°-60°-75°=45°$，（$\angle AEF$为什么等于60°，$\angle CDE$为什么等于75°，請讀者自己去考慮）于是$\triangle EFD$是等腰直角三角形（直角三角形的一个銳角为45°），$FE=FD$，而$AD=AF+FD=AF+EF$，这样，AD和EF有沒有公度的問題最后轉化为AF和EF有沒有公度的問題了。

但是AF和EF的关系正如BC和AC的关系一样，都是直角三角形中60°和30°角所对的直角边，所以照这样輾轉相截的过程，永远不会終止，即BC和AC是無公度的綫段。

由于$AB=2BC$，BC和AC既然沒有公度，AB和AC也沒有公度。这就是說，具有60°的銳角的直角三角形，它的60°角的对边和斜边也是無公度的綫段。

§4. 关于綫段度量的概念

为了要度量一条綫段，我們取定一条綫段为标准（这叫做長度單位），同时在被度量的綫段上尽可能地截取它。由于被度量的綫段和長度單位可能有公度，也可能無公度，因此我們要分別地來討論这兩种情形：

（1）被度量的綫段b和單位綫段a是有公度的，則先求出它們的最大公度，这时我們又分兩种情况來研究：i）如果最大公度就是a，那末綫段b含有a的整数倍，度量的結果就是一个整数。例如$b=3a$就是綫段b的長度等于3个長度單位。ii）如果最大公度是c，則綫段a、b都是c的整数倍，这时綫段b可用a的几分之几來表示，度量的結果就是一个分数，例如$a=3c$，$b=5c$，則$b=\frac{5}{3}a$，就是綫段b的長度等于$\frac{5}{3}$个長度單位。

用某个長度單位量一条綫段所得的数，叫做这綫段的量数。由上所述，可知綫段b和長度單位a如有公度，則用a來量b所得的量数，必定是一个有理数（整数或分数）。

（2）被度量的綫段b和單位綫段a是沒有公度的，根据亞几默得公理，知道存在一个整数m，使得：$ma<b<(m+1)a$，为明顯起見，我們用一个确定的数字來表明，例如$m=3$，所以我們有 $3a<b<4a$。

其次，取a的$\frac{1}{10}$为單位，記它为a_1，用它來量b，則同样有一个整数m_1使得：$m_1a_1<b<(m_1+1)a_1$，例如$m_1=31$，則$31a_1<b<32a_1$，如果把$a_1=0.1a$代入，便有 $3.1a<b<3.2a$。

再次，取a的$\frac{1}{100}$，$\frac{1}{1000}$，……为單位，同上法進行下去，

我們將得到一連串的类似的式子，例如：

$3.14a<b<3.15a$，$3.141a<b<3.142a$………

我們看 $3a<b<4a$，这式子說明了綫段 b 比 3 个單位大，而比 4 个單位小，3 和 4 就分別叫做綫段b 的量数的不足近似值和过剩近似值。用这兩个近似值來表明 b 的量数，都精确到一个單位。（这就是說它們和 b 的長度的差都小于一个長度單位。）

同样，我們說：3.1和3.2各是綫段 b 的量数的不足近似值和过剩近似值，并且精确到$\frac{1}{10}$。3.14和3.15分別叫做綫段 b 的量数的不足近似值和过剩近似值，并且精确到$\frac{1}{10^2}$………

所以，如果我們順次取綫段 b 的長度的量数的不足近似值，首先精确到$\frac{1}{10}$，再精确到$\frac{1}{10^2}$，……并且無限地繼續下去（每次的精确度都提高10倍）我們就將得出一个不循环的無限小数或者說是無理数。（它不可能是循环小数，如果不然，由于循环小数可以代成分数，綫段b和單位長度a就要有公度了，这与假設矛盾。）

由此可知，綫段b和長度單位a如果沒有公度，則用a來量b所得的量数是一个無理数。

总之，当我們取定了一条已知綫段当作标准——長度單位，用來度量任何一条綫段时都得到一个实数（有理数或無理数），这就是綫段長度的量数。此后我們提到綫段的長度，当長度單位已經确定时，应理解为就是它的量数。

从上面所述，我們看到綫段的長度有着下列的兩个性質：

1）相等的綫段有着相同的長度；

2）許多綫段和的長度等于这些綫段長度的和。对于第二个性質，略作解釋如下：設綫段AD是

圖 7

綫段AB、BC、CD的和，而AB、BC和CD的長度分别是1.5、2.5和2，則綫段AD的長度就等于$1.5+2.5+2=6$。

最后，我們还要指出，如果用不同的單位來量同一条綫段，則所得到的量数便不一样，例如用公尺做長度單位去度量某一綫段时得到量数4（也就是这条綫段是四公尺長），若用公分做長度單位去度量它时，便得到量数400，我們可以看出，量数擴大了100倍，而100这个数正是用公分（后來的長度單位）去量公尺（前面的長度單位）的結果。

§5. 成比例的綫段

定义 兩条綫段的比就是用同一長度單位來量它們所得的量数的比。

如果綫段b和c各是3个長度單位和5个長度單位，則b和c的比就是$\frac{3}{5}$。如果改变長度單位，則b和c的量数同样擴大（或縮小）若干倍，因此它們的比值不变。在上例中，若取新的長度單位为原長度單位的一半，則b和c的比是$\frac{6}{10}$，也就是$\frac{3}{5}$。所以說：兩条綫段的比和所取的長度單位無关。

一条綫段的量数就是这条綫段和長度單位（量数是1）的比。

如果有二条綫段，它們的量数各是a和b，那末它們的比是$\frac{a}{b}$，这也就是用b做長度單位去量a所得的量数。

我們前面說过，量数可以是有理数或無理数，現在要進一步研究兩綫段的比，在什么情况下是有理数，在什么情况下，是無理数。

当兩綫段有公度时，那末可用它們当中的一条当作長度單位，这时另一条綫段的量数是有理数，所以它們的比也是有理数。当

兩綫段沒有公度时，若取它們当中的一条作为長度單位时，則另一条綫段的量数是無理数，所以它們的比也是無理数。

再進一步看，当我們选定了某一長度單位，i）如果兩綫段的量数都是有理数，它們的比自然也是有理数；ii）如果兩綫段的量数一是有理数一是無理数，則它們的比是無理数；iii）如果兩綫段的長度都是無理数时，則它們的比或者是有理数，或者是無理数。（例如，若兩綫段的量数各是$\sqrt{2}$和$2\sqrt{2}$，則它們的比是$\frac{1}{2}$；若兩綫段的量数各是$\sqrt{2}$和$\sqrt{6}$則它們的比是$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$）

如果綫段a和b的比等于綫段c和d的比，即$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則就說这四条綫段a、b、c、d成比例。和代数里一样，a、d叫做外項；b、c叫做內項；d叫做a、b、c的第四比例項。如果三条綫段a、b、c間有着关系$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，則b就叫做a、c的比例中項。

和代数里一样，它們也有着下列的比例性質：

（1）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則$ad=bc$

（2）若$ad=bc$，則$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

（3）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$（反比定理）

（4）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$（更比定理）

（5）若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$