根据国家教育委员会制订的《复习考试大纲》编写

专升本(非师范类)入学考试参考丛书

高等数学(一)考试参考书

《高等数学(一)考试参考书》编写组

中央广播电视大学出版社

专升本(非师范类)●高等数学(一)考试参考书 中央广播电视大学出版社

根据国家教育委员会制订的《复习考试大纲》编写
专升本（非师范类）入学考试参考丛书

高等数学（一）考试参考书

《高等数学（一）考试参考书》编写组

中央广播电视大学出版社

（京）新登字 163 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（一）考试参考书／《高等数学（一）考试参考书》编写组编写．－北京：中央广播电视大学出版社，1994.10
（根据国家教育委员会制订的复习考试大纲编写专升本（非师范类）入学考试参考丛书
ISBN 7-304-01115-7

Ⅰ．高… Ⅱ．高… Ⅲ．数学-高等教育-自学参考资料 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第13474号

高等数学（一）考试
参考书
《高等数学（一）考试参考书》编写组

中央广播电视大学出版社出版
社址：北京西城区大木仓 39 号北门　邮编：100032
北京密云胶印厂印刷　新华书店北京发行所发行
开本 787×1092　1/16　印张 12.25　千字 304
1994 年 10 月第 1 版　1994 年 12 月第 2 次印刷
印数 10001—13000
定价 10.00 元
ISBN 7-304-01115-7/G・125

前　言

1993年国家教育委员会制订了《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生（非师范类）复习考试大纲（试用本）》。广大考生在使用该大纲进行复习备考时，由于缺少统一的教材而遇到了很大的困难。为了解决这个问题，我们组织了部分编写和审查大纲的教授和专家，遵照大纲的要求编写了这套《专升本（非师范类）入学考试参考丛书》。它的特点是实用性和针对性均较强，可以帮助考生提高他们在入学前的知识和能力水平。

本套丛书共分26册，包括政治（公共课）、英语、大学语文、图书馆学概论、档案管理学、文学概论、新闻学概论、政治学概论、行政管理学、高等数学（一）、高等数学（二）、财政金融学、会计学原理、环境保护概论、管理学概论、电子技术基础、电路原理、机械设计基础、结构力学、化工原理、地质学概论、医学基础、植物生理学、中医基础理论、民法、刑法等。

由于编写时间较短，不当之处还望各学科专家及广大读者提出宝贵的修改意见，待有机会再版时进一步完善。

该丛书经国家教育委员会考试中心审定，并作为推荐用书。

编　者

1994. 6. 25

目 录

第一章　函数、极限、连续

§1　函　　数

一、基本知识

（一）　函数的概念

1.　函数的定义

设在所考察的某一过程中，有两个变量 x 和 y，x 的变化范围为数集 D，如果对于 D 中的每个数 x，变量 y 按照某一规律总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量；自变量 x 的变化范围即数集 D 称为函数的定义域，函数值的集合称为函数的值域，记作 w.

对应规律和定义域是函数定义中的两个要素. 在定义中，对应规律是用记号 $f()$表示的. 记号 $f()$具有广泛的涵义，它不只是表示某一个数学分析式子，也可以表示几个数学分析式子，甚至可以表示一个图形或一张表格，总之，只要是对应规律，都可以用它来表示. 关于函数的定义域，分两种情况：在实际问题中，函数的定义域由问题的实际意义确定；在不考虑函数的实际意义时，约定函数的定义域是使函数的分析表达式有意义的一切实数所构成的数集.

两个函数仅当它们的对应规律和定义域都相同时，才是两个相同的函数.

2. 分段函数

在定义域内的不同区间内由不同的分析式子表示的函数称为分段函数.

对于分段函数，不论它分多少段，它总是表示一个函数，而不是几个函数. 求分段函数的值时，必须从自变量所在的区间的分析式子中去计算.

（二）　函数的简单性质

1.　有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果存在正数 M，使得对于一切 $x\in I$，都有 $|f(x)|<M$，则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上有界；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上无界.

在定义域内有界的函数称为有界函数. 有界函数 $y=f(x)$在 XOY 直角坐标系中的图形界于两条水平直线之间.

2.　单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$，x_1、$x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上是单调增加的；如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上是单调减少的. 单调增加与单调减少统称为单调.

在定义域内单调增加（或单调减少）的函数称为单调增加（或单调减少）函数. 单调增加（或单调减少）函数 $y=f(x)$在 XOY 直角坐标系中的图形自左至右是上升（或下降）的曲线.

3.　奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称. 如果对于定义域 D 中的任何 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;如果对于定义域 D 中的任何 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称,偶函数的图形关于 OY 轴对称.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在常数 $T(T\neq 0)$,使得对于定义域 D 中的任何 x, $x\pm T$ 也在定义域 D 中,且恒有 $f(x\pm T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,常数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数在每一个周期内的图形是相同的.

(三) 基本初等函数及其性质和图形

1. 幂函数

函数 $y=x^{\mu}$(μ 为任意实数)称为幂函数. 它的定义域需根据 μ 的值而定。但是不论 μ 取什么实数值,当 $x>0$ 时,它总是有定义的.

幂函数 $y=x^{\mu}$ 的性质与图形,也要根据 μ 的值而定. 例如,当 $\mu>0$ 时,函数在定义域内是单调增加的;当 $\mu<0$ 时,函数在定义域内是单调减少的. 下面是几个常见幂函数的图形.

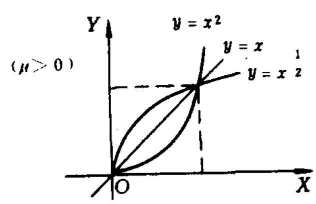

图 1-1

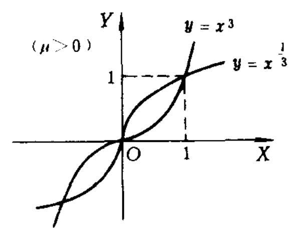

图 1-2

2. 指数函数

函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 称为指数函数. 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

当 $a>1$ 时,函数是单调增加的;当 $a<1$ 时,函数是单调减少的. 函数的值域为 $(0,+\infty)$,且当 $x=0$ 时,$y=1$,所以函数的图形位于 X 轴上方,且通过 Y 轴上的点 $(0,1)$,它的图形如图 1-3 所示. $a=\mathrm{e}$ 时,得指数函数 $y=\mathrm{e}^x$.

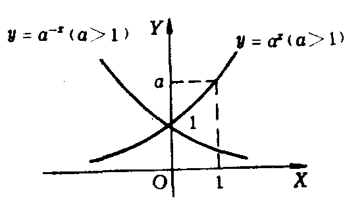

图 1-3

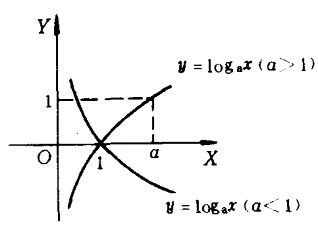

图 1-4

3. 对数函数

函数 $y=\mathrm{loy}_a x(a>0,a\neq1)$称为对数函数.它的定义域为$(0,+\infty)$.所以函数的图形位于 Y 轴右方.

当 $a>1$ 时,函数是单调增加的;当 $a<1$ 时,函数是单调减少的.函数值域为$(-\infty,+\infty)$,且当 $a>1$ 时,在区间$(0,1)$内函数值为负,图形在 X 轴的下方;在区间$(1,+\infty)$内函数值为正,图形在 X 轴的上方,图形通过 X 轴上的点$(1,0)$.当 $a<1$ 时,函数的图形与 $a>1$ 时函数的图形关于 X 轴对称.$y=\mathrm{loy}_a x$ 的图形如图 1-4 所示.

对数函数 $y=\mathrm{loy}_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数.$a=\mathrm{e}$ 时,得自然对数函数 $y=\ln x$.

4. 三角函数

三角函数共有六个:

(1) 正弦函数

函数 $y=\sin x$ 称为正弦函数.它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$.它同时是有界函数、奇函数和以 2π 为周期的周期函数.所以它的图形界于直线 $y=-1$ 与 $y=1$ 之间,且关于原点对称,并在两个周期内的图形相同,如图 1-5 所示.

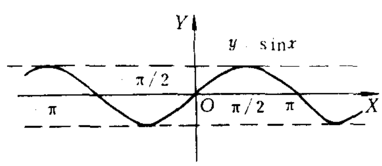

图 1-5

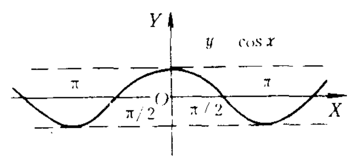

图 1-6

(2) 余弦函数

函数 $y=\cos x$ 称为余弦函数.它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$.它同时是有界函数、偶函数以及 2π 为周期的周期函数.所以它的图形界于直线 $y=-1$ 与 $y=1$ 之间,且关于 Y 轴对称,并在每个周期内的图形相同,如图 1-6 所示。

(3) 正切函数

函数 $y=\mathrm{tg}x$ 称为正切函数.它的定义域为$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.它是奇函数,且是以 π 为周期的周期函数.它的图形如图 1-7 所示.

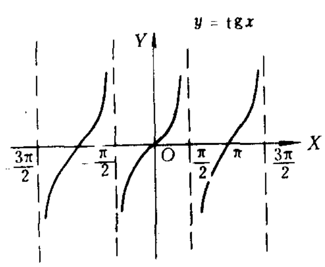

图 1-7

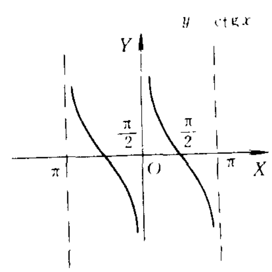

图 1-8

(4) 余切函数

函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 称为余切函数. 它的定义域是 $(k\pi-\pi,k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$. 它是奇函数,且是以 π 为周期的周期函数. 它的图形如图 1-8 所示.

(5) 正割函数

函数 $y=\sec x$ 称为正割函数. 它是余弦函数的倒数,即 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$. 它的定义域是 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 它是以 2π 为周期的周期函数,且是偶函数. 它的图形很少用到,故从略.

(6) 余割函数

函数 $y=\csc x$ 称为余割函数. 它是正弦函数的倒数,即 $\csc x=\frac{1}{\sin x}$. 它的定义域为 $(k\pi-\pi,k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 它是以 2π 为周期的周期函数,且是奇函数. 它的图形很少用到,故也从略.

5. 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数. 由于三角函数在它们的定义域内不是单调的,所以它们的反函数都是多值函数. 为了避免多值性,通常限制它的值域,使其成为单值的. 这样的单值分支仍称为反三角函数.

正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数依次为

反正弦函数 $y=\arcsin x$

反余弦函数 $y=\arccos x$

它们的定义域都是 $[-1,1]$. 反正弦函数的值域是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,反余弦函数的值域为 $[0,\pi]$.

反正弦函数是单调增函数、奇函数;反余弦函数是单调减函数. 它们的图形分别如图 1-9 和图 1-10 所示.

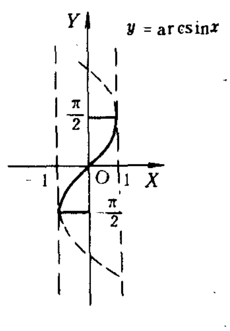

图 1-9

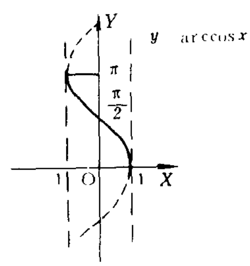

图 1-10

正切函数 $y=\mathrm{tg}x$ 和余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 的反函数依次为

反正切函数 $y=\mathrm{arctg}x$

反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}x$

它们的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$. 反正切函数的值域是 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,反余切函数的值域是 $(0,\pi)$.

反正切函数是单调增函数,且是奇函数;反余切函数是单调减函数. 它们的图形分别如图 1-11 和图 1-12 所示.

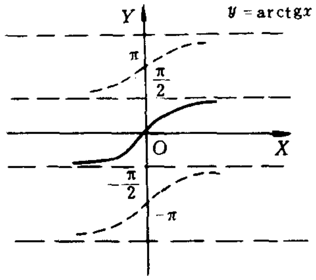

图 1-11

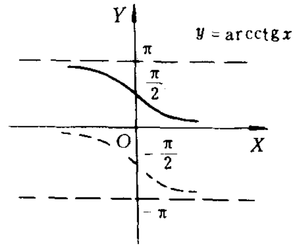

图 1-12

反正割函数与反余割函数一般不用.

上面五种函数统称为基本初等函数,是最常用、最基本的函数,它们的定义域、性质和图形,务必牢记.

(四) 复合函数与初等函数

1. 复合函数

设 y 是 μ 的函数:$y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数:$u=\psi(x)$,且函数 $u=\psi(x)$的值域的全部或一部分包含在函数 $y=f(u)$的定义域内,则对 $u=\psi(x)$的定义域内的每个 x,通过变量 u,变量 y 有确定的值与之对应,从而得到一个以 x 为自变量,以 y 为因变量的函数,称此函数是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=\psi(x)$复合而成的复合函数,记作 $y=f[\psi(x)]$,其中 u 称为中间变量.

必须注意,不是任何两个函数都可以复合成复合函数.

复合函数不仅可以由两个函数,而且可以由更多个函数经过复合构成.

学习复合函数的目的,不仅要很好地理解复合函数的概念,更重要的是会将一个复合函数分解为若干个简单函数的复合.这里说的简单函数是指基本初等函数或常数与基本初等函数经过四则运算后得出的函数.

2. 初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的且能用一个分析式子表示的函数称为初等函数.

高等数学中所遇到的函数,大多数是初等函数.分段函数一般不是初等函数.

二、 例题分析

(一) 求函数的定义域

由分析式子表示的函数的定义域是使该分析表达式有意义的一切实数所构成的集合.求定义域时应注意以下几条原则:

(1) 如果函数的表达式中含有分式,则分式的分母不能为零;

(2) 如果函数的表达式中含有偶次方根,则根号下的表达式必须大于或等于零;

(3) 如果函数的表达式含有对数,则真数必须大于零;

(4) 如果函数的表达式中含有反正弦函数或反余弦函数,则必须符合反正弦函数与反余弦函数的定义域,例如,对于 $\arcsin(3x-1)$,必须 $|3x-1|\leqslant 1$.

例 1.1 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin(\frac{1}{2}x-1)$; (2) $y=\frac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$.

解 (1) 此函数是函数$\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$与函数 $\arcsin(2x-1)$的和. 它的定义域是这两个函数的定义域的交集.

对于函数$\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$,由 $2-x^2>0$ 得$|x|<\sqrt{2}$,因此其定义域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$;

对于函数 $\arcsin(\frac{1}{2}x-1)$,由$|\frac{1}{2}x-1|\leqslant 1$,得 $0\leqslant x\leqslant 2$,因此其定义域为$[0,2]$.

故函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin(\frac{1}{2}x-1)$的定义域为

$$(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap[0,2]=[0,\sqrt{2}]$$

(2) 此函数可看作是函数$\frac{1}{x(x-4)}$与函数 $\sqrt{\ln(x+2)}$的乘积. 它的定义域是这两个函数的定义域的交集.

函数$\frac{1}{x(x-4)}$的定义域为 $x\neq 0,x\neq 4$ 即$(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$

对于函数 $\sqrt{\ln(2+x)}$,由 $\ln(2+x)\geqslant 0$,得 $2+x\geqslant 1$,即定义域为$[-1,+\infty]$.

故函数 $y=\frac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$的定义域为

$$((-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty))\cap[-1,+\infty]=[-1,0]\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$$

例 1.2 设 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$,$u=\psi(x)=x+1$,求复合函数 $f[\psi(x)]$的定义域.

解 易知 $f(u)$的定义域为$|u|\leqslant 2$,即$[-2,2]$;$\psi(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 由$|u|=|x+1|\leqslant 2$,得 $f[\psi(x)]$的定义域为$[-3,1]$.

例 1.3 设 $y=f(x)$的定义域为$[0,4]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\lg x)$; (3) $f(x+a)(a>0)$.

解 (1) 由 $0<x^2\leqslant 4$,得 $f(x^2)$的定义域为$[-2,0]\cup[0,2]$.

(2) 由 $0<\lg x\leqslant 4$ 得 $f(\lg x)$的定义域为$[1,10000]$.

(3) 由 $0<x+a\leqslant 4$ 得 $f(x+a)$的定义域$[-a,4-a]$.

(二) 求函数的表达式

1. 已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的表达式,求函数 $f[g(x)]$的表达式

这里的问题相当于:已知函数 $y=f(u)$及函数 $u=g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$. 根据复合函数的概念或函数记号的意义,方法是用 $g(x)$替换 $f(x)$中的 x,即可得到 $f[g(x)]$的表达式.

例 1.4 已知 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}(x\neq 1)$,$g(x)=1-x$,求 $f[g(x)]$、$f[f(x)]$、$g[f(x)]$及 $g[g(x)]$的表达式,并指出它们的定义域.

解

$$f[g(x)]=\frac{1-(1-x)}{1+(1-x)}=\frac{x}{2-x}(x\neq 2)$$

$$f[f(x)]=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=x(x\neq -1)$$

$$g[f(x)]=1-\frac{1-x}{1+x}=\frac{2x}{1+x}(x\neq -1)$$

$$g[g(x)] = 1 - (1 - x) = x$$

例 1.5 已知

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < 0 \\ 1 \quad, & x \geqslant 0 \end{cases}, \quad \text{求 } f(x - 2), f(-x).$$

解

$$f(x - 2) = \begin{cases} 1 + (x - 2), & x - 2 < 0 \\ 1 \quad, & x - 2 \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1, & x < 2 \\ 1 \quad, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$f(-x) = \begin{cases} 1 - x, & -x < 0 \\ 1 \quad, & -x \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x, & x > 0 \\ 1 \quad, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

2. 已知 $f[g(x)]$的表达式，求 $f(x)$的表达式

这是上一种情形的反问题.求解的一般方法是令 $g(x)=u$，解出 $x=\psi(u)$，求出 $f(u)$的表达式，再将 u 换成 x 即得 $f(x)$的表达式.但由于要从 $g(x)=u$ 反解 x，有时很繁，甚至不易解出，这时可根据所给表达式凑成 $g(x)$的函数就变得简单多了.

例 1.6 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，求 $f(x)$的表达式.

解 令 $e^x+1=u$，解得 $x=\ln(u-1)$，因 $u-1>0$，于是原式成为 $f(u)=e^{2\ln(u-1)}+e^{\ln(u-1)}+1=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1$，将 u 换成 x，即得 $f(x)=x^2-x+1$.

此题也可直接将 $f(e^x+1)$的表达式凑成(e^x+1)的函数

$$f(e^{2x} + 1) = e^{2x} + e^x + 1 = (e^x + 1)^2 - (e^x + 1) + 1$$

故

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

例 1.7 已知 $f(\mathrm{tg}x+\frac{1}{\mathrm{tg}x})=\mathrm{tg}^2x+\frac{1}{\mathrm{tg}^2x}+3$，$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 及 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，求 $f(x)$的表达式.

解 若令 $\mathrm{tg}x+\frac{1}{\mathrm{tg}x}=u$，反解 x 较繁.可直接将所给表达式凑成 $\mathrm{tg}x+\frac{1}{\mathrm{tg}x}$的函数：

$$f(\mathrm{tg}x + \frac{1}{\mathrm{tg}x}) = \mathrm{tg}^2x + \frac{1}{\mathrm{tg}x} + 3 = \mathrm{tg}^2x + 2 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2x} + 1$$

$$= (\mathrm{tg}x + \frac{1}{\mathrm{tg}x})^2 + 1$$

故

$$f(x) = x^2 + 1$$

（三） 求函数的值

如果已给出函数 $f(x)$的具体表达式，要求 $f(x)$在其定义域内某点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，这是比较简单的.如果函数 $f(x)$的分析表达式未直接给出，而是涉及到其他方面的知识，如极限、导数、积分等，则情况就要复杂一些.这里不细讨论，仅举一两个简单的例子予以说明.

例 1.8 设

$$f(x) = \begin{cases} -(x + 1), & x \leqslant -1 \\ \sqrt{1 - x^2}, & -1 < x \leqslant 1 \\ 0 \quad, & x > 1 \end{cases}$$

求 $f(-2)$，$F(0)$，$f(2)$.

解 这是分段函数，求函数值时必须从自变量所在的区间的分析表达式中去计算.

$f(-2)=-(x+1)\big|_{x=-2}=3,\quad f(0)=\sqrt{1-x^2}\big|_{x=0}=1,\quad f(x)=0$

例 1.9 设 $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t(x\neq0)$，求 $f(\ln2)$.

解 这里函数 $f(x)$是由极限定义的. 为了求 $f(\ln2)$，先要求出极限. 在求极限时 x 视为常量.

$$f(x)=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{t}{x}}\right)^{\frac{t}{x}}\right]^x=\mathrm{e}^x(x\neq0)$$

故

$$f(\ln2)=\mathrm{e}^{\ln2}=2.$$

例 1.10 设 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\ln(1+x^2)$，求 $f(1)$.

解 这里函数 $f(x)$是变上限积分的被积函数. 为了求 $f(1)$，需先求 $f(x)$的表达式. 由变上限积分的求导定理，得

$$f(x)=(\ln(1+x^2))'=\frac{2x}{1+x^2}$$

故

$$f(1)=\frac{2x}{1+x^2}\bigg|_{x=1}=1.$$

（四） 根据图形建立函数的分析表达式

根据图形建立函数的分析表达式，需熟悉平面解析几何的一些知识.

例 1.11 函数 $y=f(x)$的图形如图 1-13 所示，试写出 $f(x)$的表达式.

解

$$y=\begin{cases}0\ , & x\leqslant0\\ x+1, & -1<x\leqslant0\\ \sqrt{1-x^2}, & 0<x\leqslant1\\ x-1, & x>1\end{cases}$$

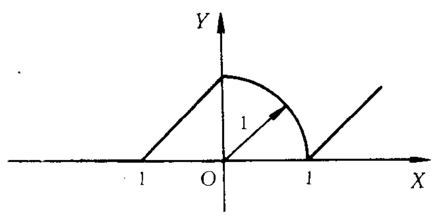

图 1-13

例 1.12 二次抛物线的图形如图 1-14 所示，试求它的方程.

解 由图可知，抛物线的顶点为$(-1,1)$，对称轴为直线 $y=1$，开口向右，且过点$(0,0)$、$(-1,1)$和$(0,2)$. 因此，抛物线方程具有形式

$$x=ay^2+by+c$$

将点$(0,0)$、$(-1,1)$、$(0,2)$代入上方程，得

$$\begin{cases}c=0\\ a+b+c=-1\\ 4a+2b+c=0\end{cases}$$

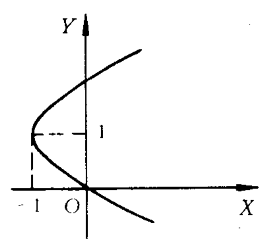

图 1-14

解得 $a=1,b=-2,c=0$，故所求抛物线方程为

$$x=y^2-2y$$

此题也可由图直接设抛物线方程为 $x=y^2+by$.

（五） 建立实际问题中的函数关系表达式

如何建立实际问题中的函数关系，通常并无一般的方法可循，只能具体情况具体分析. 在较简单的情况下，主要涉及到一些几何与物理方面的知识. 下面举两个较简单的例子予以说明.

例 1.13 一容积为定数 V 的有盖圆柱形油桶. 试建立油桶的全表面积 A 与油桶半径 r 之间的函数关系.

解 设油桶的高为 h，则由平面几何知道，油桶的容积 $V=\pi r^2h$，全表面积为 $A=2\pi r^2+2\pi rh$. 为求得全表面积 A 与半径 r 之间的函数关系，需从 V 的表达式中解出 $h=\frac{V}{\pi r^2}$，将它代入 A 的表示式中，使得油桶全表面积 A 与油桶半径 r 之间的函数关系：

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \qquad (0 < r < +\infty)$$

例 1.14 在水平路面上，用力 F 拉一重量为 G 的物体. 设物体与路面间的摩擦系数为 μ，试将力 F 的大小表示成它与路面所成角度 θ 的函数(图 1-15).

解 这里重量 G 和摩擦系数 μ 均为常量.

现把力 F 分解为平行和垂直于路面的两个分力 $F\cos\theta$ 和 $F\sin\theta$，那么物体对路面的压力 $p=G-F\sin\theta$. 又设摩擦力为 R，则由物理知识知道，

$$R = \mu p \qquad \text{即 } R = \mu(G - F\sin\theta)$$

要使物体由静止开始移动，水平分力 $F\mathrm{coc}\theta$ 必须与摩擦力平衡，即 $R=F\cos\theta$，由此得

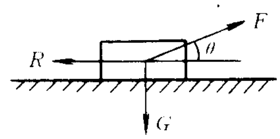

图 1-15

$$\mu(G - F\sin\theta) = F\mathrm{coc}\theta$$

从上式解出 F，便得力 F 与角 θ 之间的函数关系式

$$F = \frac{\mu G}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \qquad (0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2})$$

（六） 讨论函数的简单性质

函数的有界性和周期性，只要求了解即可，不作更高的要求，函数的单调性的讨论放到第二章. 这里仅说明如何判断函数的奇偶性.

判断函数的奇偶性的方法主要是根据定义. 此外，也可利用一些已知函数的奇偶性(如 x^{2n+1}(n 为正整数)、$\sin x$、$\mathrm{arctg}x$ 等是奇函数；x^{2n}(n 为正整数)、$\cos x$ 等是偶函数)及下列准则：

(1) 两个奇函数的代数和是奇函数；两个偶函数的和是偶函数；奇函数与偶函数的和既非奇函数，也非偶函数.

(2) 两个奇函数的乘积是偶函数；两个偶函数的乘积是偶函数；奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

例 1.15 下列各函数中，哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数也不是偶函数？

(1) $f(x)=2^x+x^{-x}$； (2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3) $f(x)=\frac{x(e^x-1)}{e^x+1}$； (4) $f(x)=\frac{\sin(\sin x)}{x}(x\neq 0)$；

(5) $f(x)=x^3+\frac{\mathrm{arctg}x}{x}(x\neq 0)$.

解 (1) 因 $f(-x)=2^{-x}+2^{x}=f(x)$,故为偶函数.

(2) 因 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$,故为奇函数.

(3) 因 $f(-x)=\dfrac{-x(e^{-x}-1)}{e^{-x}+1}=\dfrac{x(e^{x}-1)}{e^{x}+1}$,故为偶函数.

(4) 因 $f(-x)=\dfrac{\sin(\sin(-x))}{-x}=\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$,故为偶函数.

(5) 因 $f(-x)=-x^3+\dfrac{\operatorname{arctg}(-x)}{-x}=-x^3+\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}$,故既非奇函数也非偶函数.

例 1.16 设 $f(x)$为奇函数,$g(x)$为偶函数,试讨论函数 $f[g(x)]$与 $f[f(x)]$的奇偶性.

解 由题设,$f(-x)=-f(x)$,$g(-x)=g(x)$. 于是 $f[g(-x)]=f[g(x)]$,故 $f[g(x)]$为偶函数;又 $f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$,故 $f[f(x)]$为奇函数.

三、练习题

(一) 问答题

1. 下列各对函数中哪些相同?哪些不同?

(1) $\sqrt[3]{x^4-x^3}$与 $x\sqrt[3]{x-1}$; (2) $\dfrac{x^2-4}{x-2}$与 $x+2$;

(3) $e^{\ln 2x}$与 $2x$; (4) $y=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$与 $y=\sqrt{x^2}$.

2. 下列各函数中哪些偶函数?哪些是奇函数?哪些既不是偶函数也不是奇函数?

(1) $\operatorname{arctg}(\sin x)$; (2) $\dfrac{1}{2}(2^x+2^{-x})\cos x$;

(3) $\dfrac{e^{-x}-1}{e^x+1}$; (4) $f(x)=x^3+|\sin x|$.

3. 下列各函数中哪些是周期函数?并指出其周期.

(1) $y=1+\cos\pi x$; (2) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$.

(3) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$; (4) $y=\sin\pi x+\cos\pi x$

4. 下列各函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=\sqrt{\ln(1+x^2)}$; (2) $y=x^{\sin^2\frac{1}{x}}$

(二) 填空题

1. 函数 $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$的定义区间是________,值域是________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,则 $f\{f[f(x)]\}=$________.

3. 设 $f(\dfrac{x+1}{x})=\dfrac{x+1}{x^2}(x\neq 0)$,则 $f(x)=$________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ 0, & x>0\end{cases}$,则 $f(-x)=$________.

5. 设 $f(x)=\sqrt[n]{1-x^n}(x>0)$,则 $f[f(x)]=$________.

6. 函数 $y=\operatorname{arctg}(x^3)$的图形关于________对称.

(三) 解答题

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{1-x^2}$；　(2) $y=\arcsin(1-x)+\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sin x}$；　　(4) $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(x+\dfrac{1}{3})+f(x-\dfrac{1}{3})$；　(2) $f(\sin x)$.

3. 设 $y=f(u)=\sqrt{u^2-1}$，$u=g(x)=x-1$，求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域.

4. 在三角形 ABC 中，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，角 $\angle BAC=\theta$，试建立三角形 ABC 的面积 S 与 θ 的函数关系式，并写出它的定义域.

5. 在 $f(x)=1+\ln x$ 的定义域内，求方程 $f(e^{x^2})-5=0$ 的根.

6. 设

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0 \\ 1+\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi \\ \dfrac{\pi}{x}, & x>\pi \end{cases}$$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(\dfrac{\pi}{2})$，$f(\pi)$，$f(e\pi)$，并作函数的图形.

7. 一函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$，它的图形在区间 $(-2,-\sqrt{2})$ 上是与 x 轴正向的倾角为 135°的直线段，在区间 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 上是位于 x 轴上方、中心在原点、半径等于 2 的一段圆弧，在区间 $(\sqrt{2},2)$ 上是与 x 轴正向的倾角为 45°的直线段，求函数 $y=f(x)$ 的分析表达式.

8. 在半径为 R 的球内作一内接圆柱体. 试将圆柱体的体积 V 表示为圆柱体的高 h 的函数，并求此函数的定义域.

9. 将下列函数分解成几个简单函数的复合：

(1) $y=(\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x})^2$；　(2) $y=f\left(\sin\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.

10. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，已知 $f(-2)=4$，$f(0)=1$，$f(2)=7$，求 a,b,c.

§2 极　　限

一、基本知识

(一) 数列的极限

1. 数列的定义

按照某种规律依自然数次序排列的一串无穷尽的数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列，简记作 $\{x_n\}$ 或 $x_n(n=1,2,\cdots)$. 其中每一个数称为数列的项，x_n 称为通项.

数列是一种特殊的函数，称为整标函数，它的定义域为全体自然数.

2. 数列的性质

(1) **单调性**　设有数列 $\{x_n\}$. 如果对于每个 n，都有 $x_{n+1}>x_n$（或 $x_{n+1}<x_n$），则称 $\{x_n\}$ 为单调增加（或单调减少）数列. 单调增加数列与单调减少数列统称为单调数列.