

清

665990

组合入门

李振汉

近代数学知识丛书 JINDAISHUXUEZHISHICONGSHU

四川教育出版社

665090

近代数学知识丛书

组 合 入 门

李 振 汉



四川教育出版社

一九八八年·成都

责任编辑：韩承训

封面装帧：邱云松

近代数学知识丛书

组合入门

四川教育出版社出版
四川省新华书店发行

(成都盐道街三号)
成都印刷一厂印刷

开本787×960毫米 1/32 印张5.375 插页2 字数95千
1988年1月第一版 1988年1月第一次印刷

印数：1—1,810 册

ISBN 7-5408-0281-2/G·248

定价：1.04 元

· 写在前面

从小学跨入中学，特别是步入高中以后，你将碰到许多完全陌生的东西，你将会发现数学天地是那样广阔，那样令人神往而又眼花缭乱，你可能会感到新奇，也可能会因无从下手而产生惶惑……其实，万事入门难，入门前或许不知所云，入了门便“不过如此”了。

这套知识小丛书将帮助你度过“入门难”这一关。它用生动而浅显（有时还很有趣）的语言，准确而明晰的阐述，将近代数学中一些基本的概念、理论和运算一步一步展开，象一级级台阶，将你引入门去，使你并不感到突然和十分吃力。许多地方还从生活现象入手，你读起来象是在聊家常，毫无枯燥之感。所选的例题和练习也将帮助你加深理解。当然，所谓入门，不过是给你一把小小的钥匙而已，一旦“入”得“门”去，那广阔的天地便由你自由驰骋，因而也就不再是这套书的任务了。

这套丛书所收书目见后勒口所列，大多为中学数学所涉及；少数关系不甚密，可辅你开拓视野，有

兴趣者也不妨一读。对于中学教师来说，这套丛书也不失为良友，对提高教学质量或能助一臂之力。

这本《组合入门》由李振汉同志编著，并经四川大学数学系魏万迪教授认真审订，谨此表示诚挚的谢意。

编者 一九八四年十一月

目 录

一 引言	1
1.1 集合	3
1.2 映射	7
二 排列与组合	11
2.1 基本计数法则	11
2.2 排列与组合	18
2.3 环状排列	61
三 容斥原理	72
3.1 容斥原理	72
3.2 容斥原理的应用	78
四 母函数	90
4.1 二项乘积公式与母函数	90
4.2 母函数的代数运算	98
4.3 母函数在排列、组合中应用举例	112
五 递推关系与组合问题	121
5.1 递推关系	121
5.2 递推关系与组合问题	126
六 分配与分拆	138
6.1 分配	138
6.2 分拆	154

一 引言

在日常的工作和学习中，经常会遇到如下的一些问题：将10本书送给三个同学，有多少种不同的送法？用1、2、3、4四种数码能组成多少不同的有五位数码的数？用七面彩旗，其中红色3面、黄色2面、蓝色2面，可组成多少种不同的信号？从重庆到北京的特快列车要制作多少种车票？共有20个班参加的班际篮球赛要比赛多少场次？等等。诸如此类的问题还可以提出很多，其中有的可用中学已学过的排列、组合知识给予解决，有的则不能。排列、组合在生产和科学研究中有着重要的地位，例如物资的调配，人力的安排，乃至运动会场次的计算等等都离不开它；它还是学习高等数学的基础，例如高等代数中行列式、抽象代数中置换群、微积分中 e 的定义、概率论与数理统计中古典概率等等都要用到它。由于中学里学习的排列、组合知识能解决的问题有限，而在大学里学习高等数学时又把排列、组合作为学生已掌握的知识不再介绍，这使得不少希望能更多地了解一点排列、组合知识的数学爱好者感到十分遗憾。这本小册子正是

试图为满足读者的这种愿望而编写的。

实际上，排列、组合是具有悠久历史的数学分支——组合论的最简单、最基本的课题。组合论又叫组合分析或组合数学。由于近年来组合论的发展很快，涉及的面也越来越宽，因此要想用几句简单的话把组合论所包含的内容概括起来是很困难的，但可以这样说，组合论是研究元素（一般为有限多个）在某些事先指定的约束条件下如何排成一些集合的数学分支。组合学家企图解决的问题包括列举问题（这种排法有多少个），结构问题（这些排法的性质如何及相应的计算能做到怎样的有效程度），以及当约束条件更精细时的存在性问题（这种排法是否存在）。

人们对组合现象的兴趣和研究可追溯到数学的最初的阶段。据说，早在古代的《河图》、《洛书》中，我国人民就已对一些有趣的组合问题给出了正确的解答。北宋有名的科学家沈括在他所著的《梦溪笔谈》一书中，就用组合数学的方法计算出变化万千的围棋棋局总数为 3^{361} 局（《梦溪笔谈》304条）。但是，这门学科的飞速发展乃是近几十年的事，除了自身的原因外，主要由于受到许多新兴学科的刺激和推动，包括计算机科学、数字通讯理论、规划论和试验设计等等，因而这一具有悠久历史的数学分支不仅没有衰老，相反的，却异常活跃且颇富成果。早在1655年，德国数学家莱布尼兹（1646—1716）在他的《组合学论文》（*Dissertat-*

io de arte combinatoria) 中，曾希望组合论能应用于“整个科学领域”，今天能处理大量而有限结构的高速计算机的效能，似乎正使他的预言接近实现。

考虑到读者可能囿于其他数学学科，如数论、代数、数学分析等知识的不足，在这本书里不打算全面地、系统地介绍组合论的理论和方法。虽然第一次参加音乐会的人难以欣赏巴赫的“赋格曲”，也不能立即具体了解交响乐的结构，但其中不乏一些较小的然而确是绝妙的片段，它们所含的精神却能使人心领神会。同样的，在组合数学中也有这样的“较小的片段”——一些具体的组合论课题，能为读者所心领神会。作为入门书，我们将讨论这样一些具体的课题，其中考虑到中学读者的需要，将对通常的排列、组合问题作比较详细的讨论，以作为中学课本中这部分内容的补充和发展。

为了阅读的方便，这里先将集合论中的一些有关概念及运算规则作为预备知识列出来。

1.1 集合

集合的概念是数学中最基本的概念之一。所谓一个集合（简称集），就是若干个（有限或无限多个）固定事物的全体。组成一个集合的事物叫做这个集合的**元素**（简称**元**）。例如，给定方程的所有根的集合，全体自然数的集合，直线上所有点的集

合等。

我们用大写的拉丁字母 A 、 B 、 C 等表示集，用小写的拉丁字母 a 、 b 、 c 等表示元。若某事物 a 是集合 A 的一个元素，则记为

$$a \in A, \text{ 或 } A \ni a$$

(读作“ a 属于 A ”)，若 a 不是 A 的元素，则记为

$$a \notin A, \text{ 或 } A \not\ni a$$

(读作“ a 不属于 A ”)。例如，设 N 是全体自然数的集合，则

$$1 \in N, 0 \notin N.$$

定义1.1 如果集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素，则称 B 是 A 的**子集**，或称 A 是 B 的**包集**，并记为

$$B \subseteq A \text{ 或 } A \supseteq B$$

(读作“ A 包含 B ”或“ B 被 A 包含”)。例如，设 A 是某城市中全体居民的集合， B 是该城市中全体儿童的集合，则 $B \subseteq A$ 。

由子集的定义显然有

$$A \subseteq A,$$

即 A 是它自身的子集合。

定义1.2 对于两个集合 A 、 B ，如果 $A \subseteq B$ ，同时 $B \subseteq A$ ，那末，集合 A 和集合 B 就叫做**相等**，并记为

$$A = B,$$

否则，记为

$$A \neq B.$$

显然， $A=B$ 时，集合 A 与集合 B 是由相同的元素组成。例如，方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根的集合与只有两个元素1和2的集合是相等的。

如果 $B \subseteq A$ ，但 $B \neq A$ ，则称 B 为 A 的**真子集**，或称 A 为 B 的**真包集**，记为

$$B \subset A \text{ 或 } A \supset B.$$

为方便起见，我们引进空集合的概念：一个没有元素的集合叫做**空集合**（简称**空集**）。例如，方程 $x^2 + 1 = 0$ 的所有实根的集合就是空集。不是空集的集叫做**非空集**。我们用符号 ϕ 表示空集合，并规定空集是任何集合的子集。也就是说，对于任何集合 A ，

$$\phi \subseteq A,$$

对于任意的非空集 B ，

$$\phi \subset B.$$

在许多问题中，我们所要考虑的集合常常都是某个给定集合的子集合，我们称由问题中涉及的全部元素所组成的集合 E 为**全集合**，例如，在将某图书馆中的图书分类时，这个图书馆中的所有图书的集合就是我们所考虑的全集。

我们常用下面的三种方法确定一个集合。

第一，如果能写出一个集合的所有元素，则用一个括号把所有这些元素括起来，以表示这个集合。例如，

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

表示由数1、2、3、4、5所组成的集合。

第二，给出集 A 中元素的特征性质 P ，合于性质 P 的全体元在 A 中，不合性质 P 的元则不在 A 中，记为

$$A = \{x | x \text{ 合于 } P\}.$$

这样，由数1、2、3、4、5组成的集合又可表示为

$$A = \{x | x \text{ 是小于 } 6 \text{ 的自然数}\},$$

或
$$A = \{x | 1 \leq x \leq 5 \text{ 且 } x \in N\},$$

其中 N 表示自然数的集合。

第三，用集合之间的运算来表示。最基本的运算有：并、交、补、差。

定义1.3 如果三个集 A 、 B 、 C 之间符合

$$A = \{x | x \in B \text{ 或 } x \in C\},$$

则说集 A 是集 B 、 C 的**并**，记为

$$A = B \cup C;$$

如果这三个集符合

$$A = \{x | x \in B \text{ 且 } x \in C\},$$

则说集 A 是集 B 、 C 的**交**，记为

$$A = B \cap C;$$

如果这三个集合符合

$$A = \{x | x \in B \text{ 且 } x \notin C\}$$

则说集 A 是集 B 对 C 的**差**，记为

$$A = B - C.$$

定义1.4 设 E 是全集合， A 是其子集，则将 E 中不属于 A 的所有元素所构成的集合称为 A 的**补集合**（简称 A 的**补**），记为 $\bar{A}$ 。

例如, 若 $E = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$,
 $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, 则

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\};$$

$$B \cap C = \{2\};$$

$$B - C = \{1, 3\};$$

$$\overline{B} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

需要说明的是, 一个元素在一个集合里若不特别声明, 即是不重复出现的; 在集合里, 我们不考虑元素之间的顺序, 只要由同样一些元素组成, 就认为是同一集合。

两个以上的集 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 的并与交的定义和记号同上面完全类似。例如, 当 $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, $D = \{2, 6, 7\}$ 时,

$$B \cup C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\};$$

$$B \cap C \cap D = \{2\}.$$

1.2 映射

定义1.5 设 A, B 是两个集合。如果按照一个确定的规则 φ , 对于集 A 的每一个元素 a , 有集 B 中一个唯一确定的元素 a' 与它对应, 则称这个对应规则是集 A 到 B 的一个映射 (或对应), 并说 a' 是 a 在映射 φ 之下的像, 记为

$$a \xrightarrow{\varphi} a' = \varphi(a)$$

或 $\varphi: a \longrightarrow a'.$

如果

$$B \supseteq \{\varphi(a) | a \in A\},$$

则说映射 φ 是 A 到 B 内的映射，并说集 A 是 φ 的**定义域**，集 B 是 φ 的**值域**。如果

$$B = \{\varphi(a) | a \in A\},$$

则说映射 φ 是 A 到 B 上的映射。如果 φ 是 A 到 B 内的映射，且合条件

$$\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2), \text{ 若 } a_1 \neq a_2, \quad (1 \cdot 1)$$

则说 φ 是 A 到 B 内的 $(1-1)$ 映射。如果 φ 是 A 到 B 上的映射且合条件 $(1 \cdot 1)$ ，则说 φ 是 A 到 B 上的 $(1-1)$ 映射，简称为 $(1-1)$ 映射，这时又说，集 A 与 B 是 $(1-1)$ 对应的。如果集 A 与 B 之间有一个 $(1-1)$ 映射存在，就说集 A 与 B **等势**，记为

$$A \sim B.$$

对于等势的集，又说它们具有**相同的势**。

【例1】 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，若 A 的元素 a 按对应规则

$$a \xrightarrow{\varphi} a' = 2a + 1$$

和 B 的元素 a' 相对应，则因

$$\{\varphi(a) | a \in A\} = \{3, 5, 7, 9\} \subset B,$$

可知这里的映射 φ 是 A 到 B 内的映射，且知 φ 是 A 到 B 内的 $(1-1)$ 映射。

【例2】 设 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，若 A 的元素 a 按对应规则

$$a \xrightarrow{\varphi} a' = a^2$$

和 B 的元素 a' 相对应, 这样的映射 φ 是 A 到 B 内的映射, 但不是 A 到 B 内的 $(1-1)$ 映射。

【例3】 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$, 若 A 的元素 a 按对应规则

$$a \xrightarrow{\varphi} a' = 2a + 1$$

和 B 的元素 a' 相对应, 则因

$$\{\varphi(a) | a \in A\} = \{3, 5, 7, 9\} = B,$$

可知映射 φ 是 A 到 B 上的 $(1-1)$ 映射, 且有集 A 与 B 等势, 即 $A \sim B$ 。

【例4】 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 若 A 的元素 a 按对应规则

$$a \xrightarrow{\varphi} a' = 2a + 1$$

和 B 的元素 a' 相对应, 这时 φ 不是 A 到 B 上的 $(1-1)$ 映射。

我们常用 Z 表示全体整数的集, 全体非负整数的集用记号 N° 表示, 即 $N^\circ = N \cup \{0\}$ 。

我们称集

$$\{x | m \leq x \leq n, x \in Z\}$$

为 Z 的 m 至 n 截段, 记为

$$[m, n].$$

也就是说, $[m, n]$ 表示介于整数 $m-1$ 与 $n+1$ 之间一切整数。例如

$$[2, 5] = \{2, 3, 4, 5\}.$$

如果集 A 与 $[1, n]$ 等势, 就说 A 是一个 n 元集, 即 A 中恰有 n 个元素。空集和 n 元集($n \in N$)统

称**有限集**。不是有限集的集叫做**无限集**。从上面的例3知，当 A 、 B 是有限集时， $A \sim B$ 的充要条件是集 A 、 B 有同样多的元素。所以，由 A 与 $[1, n]$ 等势易知， A 的势就是 A 的元素个数，简称为**元数**。对于无限集，势的作用类似于有限集的元数的作用。无论 A 是有限集还是无限集，它的势均用符号 $|A|$ 表示。例如：

若 $A = \{1, 2, 3\}$ ，那末 $|A| = 3$ ；

若 $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ，那末 $|B| = 4$ 。

二 排列与组合

• 1 基本计数法则

本节将介绍组合论中常用的两个基本的计数法则，即加法法则与乘法法则。

1. 加法法则

我们先看下面的问题。

问题 1 从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘轮船。在一天中，火车有 4 班，轮船有 3 班，问从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

因为乘火车有 4 种走法，乘轮船有 3 种走法，每一种走法都可以从甲地到乙地，因此，从甲地到乙地共有

$$4 + 3 = 7$$

种不同的走法。

问题 2 在由电键组 A 与 B 所组成的并联电路中（图 1），要接通电源使电灯发光的方法有多少种？

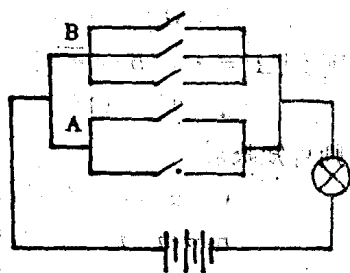


图 1

只要合上图 1 中的任一个电键，电灯即可发