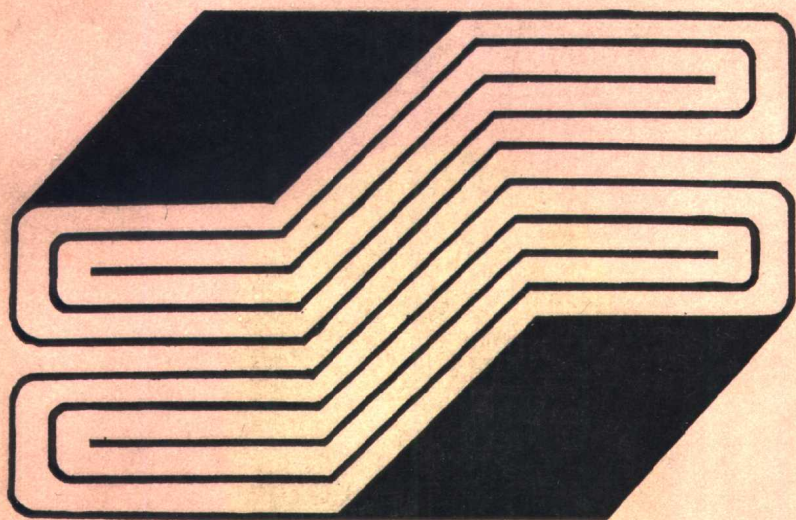


GAODENGXUEXIAO
SHIYONGJIAOCAI

- 高等学校试用教材
- 初等数学研究与教学法



毛信实 邓鹤年 王海清 主编

初等 代数

初等数学研究与教学法

初等代数

毛信实 邓鹤年 王海清 主编

张平平 钟泽民 宋学增
李朝莲 王海清 刘敬文 编
范连湘

湖北教育出版社

初等数学研究与教学法

初 等 代 数

毛信实 邓鹤年 王海清 主编

张平平 钟泽民 宋学增

李朝莲 王海清 刘敬文

范连湘 编

•

湖北教育出版社出版 发行 新华书店经销

仙桃市新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 12.5印数 260 000字

1986年8月第1版 1987年3月第2次印刷

印数：8 701—10 200

ISBN 7—5351—0104—6/G·95

统一书号：7306·515 定价：2.05 元

内 容 提 要

本书是根据1982年全国师专数学专业《初等数学研究与教学法大纲》而编写的,全书着重研究了初等代数中数、式、函数、方程和不等式几部分内容,以较高的观点指导初等代数的研究,基本概念叙述严谨,并做了系统归纳,选题力求有代表性,解法力求典型,密切结合中学实际,并在各节安排了教学中应注意的问题和学生易犯错误的剖析等内容,各章配有适量的习题.

本书供师专数学专业学生使用,也可作高师函授教材和教育学院数学专业学生、中学教师的参考用书.

前 言

《初等数学研究与教学法》共分初等代数、初等几何、教学法三册，是全国师专数学教学研究会组织编写并审定的高校教学用书。全书主编是毛信实、邓鹤年两位副教授，各分册由辽宁大连师专、天津师专、吉林四平师院、云南玉溪师专、甘肃兰州师专、福建宁德师专、辽宁本溪师专、陕西安康师专、浙江舟山师专、云南曲靖师专、山东枣庄师专、湖南娄底师专、湖北黄冈师专、安徽宿州师专、浙江湖州师专、辽宁朝阳师专、广东嘉应师专、辽宁锦州师专、辽宁鞍山师专等十九所院校的同志共同讨论，分工编写。初稿完成后，研究会理事会在舟山主持召开了审稿会，全国五十余所学校的理事和特邀审稿代表对初稿逐章进行了讨论，提出了修改意见。会后，部分编委又分别对全书各分册进行了认真的统审和修改，再经毛信实、邓鹤年等主编复审定稿。

在编写中，我们根据师专初等数学研究课程的教学大纲，力求突出师范性，用较高观点指导本书的编写，并密切联系当前中学数学教学实际，在教材中指出了中学数学教学中应注意的主要问题和学生易犯错误，以供师专数学专业、教育学院及在职中学教师使用、参考。

本分册是初等代数部分，主编是毛信实、邓鹤年、王海清同志。各章分别由甘肃兰州师专张平平、辽宁大连师专钟泽民、辽宁锦州师专宋学增、陕西安康师专李朝莲、浙江湖

州师专王海清、广东嘉应师专刘敬文、天津师专范连湘执笔编写。最后由毛信实、邓鹤年、王海清、钟泽民、范连湘统审、修定。

参加本书审稿的学校还有四川内江师专、广西玉林师专、河南安阳师专、青海师专、云南昆明师专、四川重庆师专、宁夏银川师专、湖南衡阳师专等。

在编写过程中得到天津师专、舟山师专等有关各校领导的大力支持，在此表示感谢。

由于时间仓促，编写中难免有缺点和错误，望读者给予批评指正。

编者

1985年10月

目 录

绪论.....	1
第一章 数系	
§ 1.1 自然数.....	6
一、自然数的理论	
二、数零	
§ 1.2 有理数.....	16
一、分数的理论	
二、有理数的理论	
三、教学中应注意的问题	
§ 1.3 实数.....	32
一、实数的概念	
二、实数集的性质	
三、教学中应注意的问题	
§ 1.4 复数.....	39
一、复数的概念	
二、复数的四则运算	
三、复数的其他形式	
四、复数集的性质	
五、复数的应用	
六、教学中应注意的问题	
• § 1.5 整数的整除性.....	56
一、整除性	

- 二、关于同余的有关性质和应用
- 三、质数、整数的质因数分解
- § 1.6 近似计算·····75
 - 一、绝对误差和相对误差
 - 二、有效数字
 - 三、近似值简单运算的精密误差计算法则

第二章 式

- § 2.1 一般概念·····91
 - 一、解析式
 - 二、教学中应注意的问题
- § 2.2 多项式·····94
 - 一、基本概念
 - 二、多项式的恒等定理
 - 三、待定系数法
 - 四、分离系数法
 - 五、综合除法
 - 六、因式分解
 - 七、教学中应注意的问题
- § 2.3 分式·····124
 - 一、有理分式的概念及其基本性质
 - 二、分式的恒等变形
 - 三、部分分式
 - 四、教学中应注意的问题
- § 2.4 根式·····135
 - 一、根式的概念
 - 二、算术根的性质
 - 三、根式的变形及运算

四、有理化因式	
五、复合二次根式	
六、教学中应注意的问题	
§ 2.5 指数式和对数式	145
一、指数式	
二、对数式	
三、教学中应注意的问题	
§ 2.6 三角式和反三角式	156
一、三角式的恒等变形	
二、反三角式	
三、教学中应注意的问题	

第三章 初等函数

§ 3.1 函数概念	172
一、函数概念的发展和定义方式	
二、关于函数的定义	
三、函数的定义域和值域	
四、反函数	
五、教学中应注意的问题	
§ 3.2 初等函数	187
一、函数的性质	
二、基本初等函数	
三、初等函数及其分类	
四、教学中应注意的问题	
§ 3.3 初等函数的讨论	221
一、初等函数性质的讨论	
二、初等函数图象的作法	
三、教学中应注意的问题	

* § 3.4	初等超越函数的超越性的证明	238
---------	---------------------	-----

第四章 方程和方程组

§ 4.1	方程的概念	246
-------	-------------	-----

§ 4.2	方程的同解理论	248
-------	---------------	-----

- 一、方程的同解概念
- 二、方程的同解定理
- 三、方程的非同解变形
- 四、分式方程和无理方程同解性研究
- 五、教学中应注意的问题

§ 4.3	方程解法举例	263
-------	--------------	-----

- 一、特殊的高次方程
- 二、含有参数的方程
- 三、初等超越方程
- 四、一次不定方程
- 五、教学中应注意的问题

§ 4.4	方程组及其同解理论	290
-------	-----------------	-----

- 一、方程组的有关概念
- 二、方程组的同解定理
- 三、教学中应注意的问题

§ 4.5	列方程解应用题	300
-------	---------------	-----

- 一、列方程解应用题的步骤
- 二、教学中应注意的问题

第五章 不等式

§ 5.1	不等式的概念及性质	314
-------	-----------------	-----

- 一、不等式的概念
- 二、不等式的基本性质

三、教学中应注意的问题	
§ 5.2 不等式的解法·····	317
一、不等式(组)的同解性	
二、一元不等式(组)解法举例	
三、教学中应注意的问题	
§ 5.3 不等式的证明·····	337
一、常用的方法	
二、特殊解法	
三、教学中应注意的问题	
四、几个重要的不等式	
§ 5.4 利用不等式求函数的极值·····	362
一、利用二次三项式的极值	
二、利用函数值域求极值	
三、利用平均值不等式求极值	
四、利用柯西不等式求极值	
五、利用贝努里不等式求极值	

绪 论

“代数”一词起源于九世纪阿拉伯人阿里·花拉子模(780—850)公元830年的著作《al-jabr w al-muqabala》(意思是“整理和对比”)。书中第一次给出了一次、二次方程的一般性法则,阿拉伯文“al-jabr w”翻译成拉丁文变成Algebra,后面部分则被略去了。

1859年,我国清代数学家李善兰和英人伟烈亚力合译英人德·摩根(1806—1871)的《Elements of Algebra》。根据这门数学以字母代“数”的特点,恰当地译为《代数学》。

早在公元前,人们已会解某些一次和二次方程以及不定方程的问题,我国古代数学发展是以代数学为主流的,《周髀算经》和《九章算术》里都记录有许多代数问题,“方程”一词也源于《九章算术》。英人李约瑟说:“代数学实际上仍然是出自印度和中国……有更多的证据说明它在更早的时候从中国传入印度和欧洲。”*在十六世纪以前,除阿拉伯某些成就外,我国代数学在世界上可以说是独占魁首,遥遥领先于其他国家。

一、关于代数的几个历史观点

* 李约瑟《中国科学技术史》第三卷

什么是代数？即代数的基本问题是什么？随着这门科学的历史发展而有不同的理解。

1. 十六世纪后期，韦达（1540—1603）引进了字母表示法，他不仅用字母表示未知数，并且开始用字母表示给定的量。笛卡儿（1596—1650）对字母表示法有更多的发展。这时，实际上已把代数看成是关于字母计算，关于由字母构成的公式的变换，以及关于代数方程等的学科。它不同于算术的就是已不是对具体数字的计算。字母计算学的观点是代数学的第一个观点，或韦达的观点，这是原始的观点。其代表作是欧拉（1707—1783）在1770年写的《代数学引论》。

2. 十八世纪末和十九世纪初，代数方程的解法问题逐渐地被人们认为是代数的中心问题。

二次方程根的公式早为人所共知。十六世纪意大利数学家又求出了三次及四次方程的一般法则，然而寻求更高次方程的求根公式却遇到了不可克服的困难。在随后长达三个世纪中，差不多一些最伟大的数学家都为此付出了巨大的劳动，创造了与这个问题有关的大规模的复杂理论，这就是以代数方程的根的计算与分布为中心的古典代数学内容。

十九世纪中叶，即欧拉的代数已出版近一百年的时候，谢尔（1819—1885）的两卷本《代数学》问世，第一次将代数定义为代数方程的理论，且叙述了当时代数理论的顶峰——伽罗瓦理论，这就是代数学的第二个观点，即以方程为中心的观点，是古典代数的观点。

3. 十九世纪后期，由伽罗瓦有关代数理论的想法出发，群论和代数数论发展了，不变量理论成为代数研究的中心之一。人们把代数理解为是研究各种代数结构的科学，也就是

所谓公理化代数或抽象代数，这是代数学的第三个观点，即近代观点。

代数是研究各种代数系统的数学分支，其要点仅在于考虑系统里的运算满足什么样的公理（规律）。系统中的元素用字母表示，它可以是很广泛的各种具有数学运算性质的对象，例如向量、矩阵、张量、旋量、超复数等等。这样，代数学的第三个观点又回到了它的第一个观点，即代数是字母计算的观点，但却起了质的变化，已上升到更高级的形态，当然这些内容已超出中学代数的范围。二十世纪30年代范·德·瓦尔登的著名教科书《代数学》（原名《近世代数》）两卷本阐明了这个观点。

二、作为教学科目的中学代数

作为教学科目之一的中学代数与作为一门科学的代数学，在性质和内容上都有显著的差别。在数学课程现代化运动中，曾有人试图以结构化、公理化的思想来进行中学数学教学，虽然它在一定程度上反映了数学的本质，但毕竟离中学生的认识水平太远，尚难被普遍接受。

我国现行中学代数教材基本上以传统内容为主，渗透近代观点，鉴于中学教育的目的和任务，本课程内容具有多样性和广泛性，除固有意义的代数基本内容外，还涉及数学其他许多分支。

中学代数主要内容是：数的概念及其运算，式的恒等变形，函数，方程，不等式以及诸如数列，排列组合，概率统计初步，逻辑代数初步等。根据师范专科学校数学专业的培养目标，本书拟研究前面的五个部分。

编写时，我们力求以高观点指导初等数学。同时，尽量

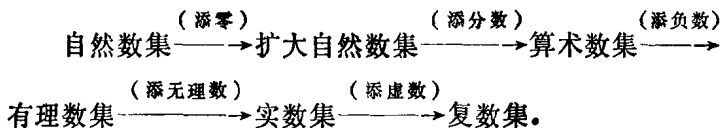
联系中学实际，对于中学代数教学中应注意的问题和学生易犯的错误在各节中都作了探讨，为即将走上教学岗位的新教师和在职中学数学教师提供方便。

本书中凡带有“*”的内容，各校可酌情安排。

第一章 数 系

人们对数的认识和研究经历了一个由表及里、由浅入深、交错曲折的漫长历史过程，逐步发展，形成了今天的科学数系。所谓数系，就是在一个数集上定义了适合某些规则的一个代数运算的整体。

数集的扩张，是中小学数学教学中的主要任务之一。扩张的方法一般有两种形式：一种是从理论上构造一个集合，即通过定义等价类来建立新数系，然后指出新数系的一个真子集与以前建立的数系同构。另一种是采用渗透近代数学观点，把新元素添加到已经建立的数系中。大致过程是：



从教学观点来看，在中小学里不宜采用前种方法。在本章里，首先建立自然数的理论，然后采用后种数系扩张的方法研究数系，最后简单介绍整数的整除性和近似计算。

任何一种数的理论的建立，需要解决三个问题：一、给出数的定义；二、确定数的顺序；三、建立运算及其运算规律。下面我们根据这些原则来建立各种数的理论。

§ 1.1 自然数

一、自然数的理论

建立自然数的理论，由于选择的原始概念和公理的不同，建立起来的理论体系也不完全一样。计数有两个方面的意义：一是表示多少个（个数）；另一个是表示次序（第几个）。据此，建立起来的自然数理论有两种：基数理论和序数理论。

1. 基数理论

基数理论以“集合”作为原始概念，利用基数来定义自然数。

定义1 若集合 A 和 B 之间，存在一一对应 $\varphi: A \leftrightarrow B$ ，就称集合 A 和 B 等势（或等价），记作 $A \sim B$ 。

根据等势的定义，不难验证等势的集合具有下面的性质：

- (1) 反身性 $A \sim A$;
- (2) 对称性 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;
- (3) 传递性 $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ 。

定义2 一切相互等势的非空集合的共同特征的标志，称为这些集合的势。集合的势也叫做基数。

例如，五张桌子集合的基数用符号“5”表示。

五把椅子集合的基数用符号“5”表示。

定义3 非空有限集的基数，称为自然数。

一类等势的有限集对应一个自然数，一个自然数对应一