数学类

21 高等师范院校教材

离散数学

LISAN SHUXUE

主 编 李 滨

副主编 郭恒源 何 聪 熊廷见

四川大学出版社

21 高等师范院校教材

离散数学

LISAN SHUXUE

主　编　李　滨
副主编　郭恒源　何　聪　熊廷见

四川大学出版社

21

高等师范院校教材

离散数学

总 策 划：陈国弟 张晓舟
责任编辑：谭同余
责任校对：朱兰双
封面设计：罗 光
责任印制：李 平

图书在版编目(CIP)数据
离散数学 / 李滨主编. —成都：四川大学出版社，
2003.2
ISBN 7-5614-2403-5
Ⅰ.离… Ⅱ.李… Ⅲ.离散数学-高等学校-教
材 Ⅳ.O 158
中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第006213号

书名 离散数学

主 编 李 滨
出 版 四川大学出版社
地 址 成都市一环路南一段24号 (610065)
印 刷 郫县犀浦印刷厂
发 行 四川大学出版社
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 20.25
字 数 344千字
版 次 2003年3月第1版
印 次 2003年3月第1次印刷
印 数 0 001~2 000册
定 价 32.00元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。
◆电 话：85408408 85401670 85408023
◆邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回印刷厂调换。

前　言

随着新世纪的到来，一种以知识和信息的生产、分配和使用为基础，以创造性的人力资源为依托，以高科技产业及智力为支柱的新的经济形态——知识经济正在向人们走来．我国的基础教育发展史也翻开了新的一页．国务院召开的全国基础教育工作会议和国务院关于基础教育改革和发展的决定标志着我国基础教育已经进入了一个新阶段，我国基础教育已经实现了教育发展的三个转变：从重视体制到重视人才培养模式改革；从重视规模速度到重视质量效益；从重视知识传授到“育人为本”，全面提高素质．为适应形势发展的要求，坚持以人为本，培养合格的、全面的、具有创新能力的高素质中小学教师队伍迫在眉睫．受四川省高等师范院校学科教材建设编委会的委托，我们编写了数学专业师范类教材《离散数学》．

离散数学是现代数学的一个重要分支，其理论严密，观点抽象，应用普遍．特别是随着计算机学科、综合自动化工程、经济学、信息科学、物理学、化学和生物学等众多学科的发展，迫切需要用一些适当的数学工具来解决这些领域中提出的有关离散量的理论问题，这就促使了离散数学的诞生和发展．因此，离散数学已成为许多科学工作者、经济管理人员以及工程技术人员的必备知识．

众所周知，连续和离散是数学中的一对矛盾．连续性主要是通过极限来实现的，它可以解决许多科学问题；然而，还有许多问题具有离散结构，它们涉及的函数是定义在离

散的点的集合上，在解答这类问题时就要用离散的方法加以分析解决. 离散数学的基本思想、基本理论和基本方法已成为现代科学技术的理论基础和重要工具之一，而且也渗透到中小学教材中，成为数学素质教育的重要内容. 通过对离散数学的学习，可以培养学生抽象思维、逻辑推理和敢于创新的能力.

离散数学的主要内容由数理逻辑、集合论、组合数学初步、代数系统和图论等五部分构成. 在编写过程中，我们注意将五部分的内容有机地结合在一起，使之前呼后应，互相联系；而各部分又相对独立，以便需要时可单独使用. 力求做到在兼顾教材体系完整性和系统性的基础上，突出重点内容. 全书以实带虚，循序渐进，内容丰富，自成体系，注重与中小学数学，特别是竞赛数学的联系.

本书由李滨主编，其中第一篇由郭恒源编写，第二篇由何聪编写，第四篇由熊廷见编写，第三篇和第五篇由李滨编写. 在这里，我们要特别感谢四川大学出版社、四川师范大学数学与软件工程学院对本书的出版所给予的大力支持和帮助.

限于编者的水平，加之时间仓促，难免有不妥与错误，欢迎广大读者批评指正.

编　者

2002 年 10 月于成都

目　　录

第三篇 组合数学初步

第四篇 代数系统

第五篇 图论

第一篇　数理逻辑

数理逻辑是一门用数学方法来研究推理规律的学科，即运用数学方法，借助一套符号体系系统地研究形式语言中的正确推理规律、论证过程、公式赋值．它分为五大部分：逻辑演算、集合论、证明论、模型论、递归论．数理逻辑既是数学又是逻辑学，它研究数学中的逻辑问题，用数学的方法研究形式逻辑．近年来，数理逻辑与计算机科学的关系日益密切，数理逻辑的方法已大量运用于计算机软件的理论研究中．

第一章　命题逻辑

命题逻辑也称命题演算，是数理逻辑中最基础的内容．本章主要介绍逻辑联结词、命题公式的等值与蕴涵、命题公式的范式、推理理论．

§1.1　命题与联结词

一、命题

命题是数理逻辑中最基本的概念．所谓命题，是指能区分真假的陈述句．命题可分为真命题和假命题．如果一个命题所表述的内容与客观实际相符，则称该命题是真命题；否则称之为假命题．命题的这种真假属性称为命题的真值．当一个命题是真命题时，我们称它的真值为"真"，用 1 或 T 表示；当一个命题是假命题时，称它的真值为"假"，用 0 或 F 表示．

例 1.1.1　判断下列语句是否为命题．

(1)三角形内角和等于 180 度.

(2)北京是中国的首都.

(3)9 能被 4 整除.

(4)如果 2 是奇数,那么 3 是偶数.

(5)你准备去哪里?

(6)$6+2=8$.

(7)今天天气真好!

解 该例中,语句(1)、(2)、(3)、(6)是命题,其中(1)、(2)、(6)是真命题,真值为 1;(3)是假命题,真值为 0. 语句(5)、(7)不是命题. 至于(4),当你学完本节后就知道它也是一个真命题.

表示疑问、感叹、祈使、命令等非陈述句一般不是命题.

关于命题,有两点需要说明:一是命题的真假仅指命题所表述的内容是否与客观实际一致,而与人们的主观感受和认识无关. 例如"地球外存有智慧生物"这一语句,虽然目前尚不知其真假,但该语句有真假意义是无疑的,所以是命题. 二是一个命题可能与该命题的范围、时间和空间有关. 例如"现在是白天",如果对生活在北京的居民来说是真命题,则对居住在纽约的人们来说便是假命题了. 因此,在命题逻辑中,我们往往把命题当作一个抽象的形式化的数学概念来处理. 对一个命题而言,非真必假,非假必真,必居其一.

二、命题联结词

命题可以分为简单命题和复合命题. 简单命题也称原子命题,是指一个不能再分解为更简单的陈述句,如例 1.1.1 中的命题(1)、(2)、(3)、(6).

原子命题一般用小写字母或带下标的小写字母,如 $p,q,r,\cdots$ 或 $p_1,p_2,\cdots$ 等表示,表示原子命题的符号称为命题标识符.

由原子命题和命题联结词通过复合构成的命题称为复合命题. 命题联结词也称逻辑联结词,或简称联结词. 如例 1.1.1 中的命题(4),它由两个原子命题"2 是奇数"和"3 是偶数"通过联结词"如果……,那么……"复合构成,因而是复合命题.

我们知道,两个实数可以通过加、减、乘、除等运算产生一个新的实数,命题也可以通过使用联结词构造出新的命题. 常用的命题联结词有五种,这五种联结词也可称为命题的五种运算.

用以表示联结词的符号称为逻辑联结符. 常用的五种联结词分别用逻辑联

结符 $\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$表示.

1.否定联结词——$\neg$

定义 1.1.1 复合命题"非 p"称为命题 p 的否定,记为$\neg p$,读作"非 p",$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假,称$\neg p$ 为 p 的否定式.

由否定联结词的定义,$\neg$ 的真值关系为表 1.1.1.

表 1.1.1

p	$\neg p$
0	1
1	0

联结词$\neg$ 是自然语言中"非"、"不"和"没有"等的逻辑抽象.$\neg p$ 是对命题 p 的语意的否定,我们在叙述$\neg p$ 时要注意符合人们日常的语言习惯,后面 4 种联结词的使用也需要注意到这一点.

例 1.1.2 令 p 表示命题"三角形两边之和大于第三边".命题$\neg p$ 的语意为"三角形两边之和不大于第三边".p 的真值为 1,$\neg p$ 的真值为 0.

2.合取联结词——$\wedge$

定义 1.1.2 复合命题"p 并且 q"称为命题 p 和 q 的合取,记为 $p\wedge q$,读作"p 且 q",$p\wedge q$ 为真当且仅当 p 和 q 同时为真,称 $p\wedge q$ 为 p 与 q 的合取式.

$\wedge$ 的真值关系为表 1.1.2

表 1.1.2

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

联结词$\wedge$是自然语言中"并且","既……又……"等的逻辑抽象.

例 1.1.3 设 p:"小张身体好",q:"小张学习好".则 $p\wedge q$ 表示"小张不但身体好而且学习好".

3.析取联结词——$\vee$

定义 1.1.3 复合命题"p 或者 q"称为命题 p 和 q 的析取,记为 $p\vee q$,读作"p 或 q",$p\vee q$ 为真当且仅当 p 和 q 至少一个为真,称 $p\vee q$ 为 p 与 q 的析取式.

$\vee$ 的真值关系为表 1.1.3.

表 1.1.3

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

联结词$\vee$是自然语言中"或","或者"等的逻辑抽象.

命题逻辑中的"或"与自然语言中的"或"在使用上存有一些差异,定义 1.1.3 中使用的联结词"或"称为可兼的,即经"或"联结的两个命题可以同时为真.例如,令 p:"我到图书馆借阅英语教材",q:"我到图书馆借阅离散数学教材".则 $p\vee q$:"我到图书馆借阅英语教材或离散数学教材".$p\vee q$ 为真命题,可以两种

教材都借阅，当然也可以只借阅其中一种.

"或"除作为可兼联结词使用外，在自然语言中还有两种含义.一是作为"不可兼"的联结词使用，通常用逻辑连结符$\overline{\vee}$表示，称为异或.例如，令 p:"a 是奇数"，q:"a 是偶数".则 $p\overline{\vee}q$:"a 是奇数或偶数".显然，当且仅当 p 和 q 之一为真命题时，$p\overline{\vee}q$ 是真命题，而 p 和 q 不可能同为真命题."异或"也是命题逻辑中使用的联结词，其真值关系为表 1.1.4.

表 1.1.4

p	q	$p\overline{\vee}q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

在遇到含有"或"的语句时，要注意区分它是否可兼.不过，我们一般不将不可兼"或"作为基本联结词加以定义.后面会看到，不可兼"或"可用基本联结词等值替代.

"或"的第三种用法是在自然语言中表示近似数.例如，"我答题需用 10 分钟或 15 分钟".在命题逻辑中，"或"的这种用途不作为联结词看待，因而不加讨论.

4. 条件联结词——→

定义 1.1.4 复合命题"若 p 则 q"称为 p 蕴涵 q，记为 $p\to q$，读作"若 p 则 q". $p\to q$ 为真当且仅当 p 为假时，q 为假或者 q 为真. $p\to q$ 称为 p 与 q 的蕴涵式或条件式，其中命题 p 称为该复合命题的前件，q 称为后件.

→的真值关系为表 1.1.5.

表 1.1.5

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

联结词→是自然语言中"若……，则……"，"p 仅当 q"，"如果……，那么……"等的逻辑抽象.

从定义 1.1.4 可以看出，$p\to q$ 为假当且仅当 p 真且 q 假.对→的真值关系，很容易理解后面两种情形，对前两种情形，我们举例来说明.例如，"如果今天是晴天，那么我一定去郊游"(注意，这句话并没有明确表达这样的意思：如果不是晴天，我就不去郊游).如果今天是晴天，我去郊游了，这句话是真的；如果今天是晴天而我未去郊游，原话是假的；至于今天不是晴天，我郊游与否并不影响原话的真实性，这样的推断通常称为"善意推定".

还要注意一点，在自然语言中，条件式语句通常要求前件 p 与后件 q 之间有着语意上的联系.在命题逻辑中，我们关心的是原子命题和复合命题之间的真值关系，因此并不要求二者在语意上有必然联系，其它联结词的使用也如此.

例 1.1.4 考察下列语句

(1)如果两个三角形全等,那么它们的对应边相等.

(2)若雪是黑的,则 $2+2=5$.

这两句话都是真命题.(1)中的两个原子命题在语意上有联系,(2)中的两个原子命题在语意上并无联系.

5. 双条件联结词—— $\leftrightarrow$

定义 1.1.5 复合命题"p 当且仅当 q"称为 p 与 q 等价,记为 $p\leftrightarrow q$,读作"p 当且仅当 q",$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 和 q 有相同的真值. $p\leftrightarrow q$ 称为 p 与 q 的等价式.

$\leftrightarrow$的真值关系为表 1.1.6.

表 1.1.6

p	q	$p\leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

联结词$\leftrightarrow$是自然语言中"充分必要条件","……等价于……","当且仅当"等的逻辑抽象.

例 1.1.5 令 p:"$2>1$",q:"$2-1>0$". 则命题"$2>1$ 当且仅当 $2-1>0$"可表为 $p\leftrightarrow q$,这是一个真命题.

至此,我们定义了六个联结词,它们的真值关系必须熟记.在这些联结词中,$\neg,\wedge,\vee$是最基本的,其它联结词的功能可用这三种联结词实现.

三、命题符号化

一个命题,不论其构成多么复杂,一般都可以分析出构成该命题的原子命题,再将这些原子命题以及它们之间的逻辑联系用恰当的命题标识符、逻辑联结符和括号表示出来,形成符号串,这个过程称为命题符号化.

命题符号化在数理逻辑中有着重要的作用,实际上,我们后面讨论的大部分内容都是在命题符号化后展开的.在对命题符号化时可能同时使用多种逻辑联结符,因此,命题符号化涉及到逻辑运算的先后次序问题.对五种联结词,按自左向右规定运算的先后次序为:

$$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$$

由于基于运算的先后次序来理解符号串往往费时费力,因而也可采用添加括号的办法,按先括号内后括号外的规则进行命题运算.我们采用添加括号来处理逻辑运算的先后次序.

例 1.1.6 把下列命题符号化：

(1)如果你和他都努力，比赛定会取胜.

(2)只有抓住机会，比赛才可能取胜.

(3)只有你努力，比赛才会取胜.

(4)不管你或他努力与否，比赛定会取胜.

解 设 p："你努力"，q："他努力"，r："抓住机会"，w："比赛取胜".

(1)符号化为：$(p\wedge q)\rightarrow w$.

(2)在不改变原语句语意的前提下，此句可改叙为：如果没有抓住机会，则比赛不会取胜.所以符号化为：$\neg r\rightarrow\neg w$.不能将原语句误解为：如果抓住了机会，比赛就会取胜.

(3)此句意为：你努力了，比赛会取胜；你不努力，则比赛不会取胜.所以符号化为：$p\leftrightarrow w$.

(4)符号化为：

$$((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\rightarrow w$$

注意，同一个命题，可能有多种符号化形式，这在后面会加以讨论.

例 1.1.7 设 p："明天是星期六"，q："我上街购物"，r："我去阅览室"，s："我在家读书".试用自然语言将符号串$(p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow(r\vee s))$叙述出来.

解 依据联结词和例中命题标识符的定义，符号串$(p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow(r\vee s))$可叙述为："假如明天是星期六，我就上街购物；否则就去阅览室或在家读书."

习题 1.1

1. 判断下列语句是否为命题：

(1)火星上有生命.　　(2)海洋的面积比陆地的面积大.

(3)$4+3>8$.　　(4)$11+1=100$.

(5)啊，我的天哪！　　(6)你喜欢计算机吗？

(7)太美妙了！　　(8)本命题是假的.

2. 写出下列命题的否定命题：

(1)我吃面包或蛋糕.　　(2)上海是个大城市.

(3)我是个男人并且是教师.　　(4)每个素数都是偶数.

3. 设 p 表示命题“我学习努力”，q 表示命题“我考试得满分”，r 表示命题“我很快乐”. 试用符号表示下列命题：

(1)我考试没得满分，但我很快乐.

(2)如果我学习努力，那么我考试得满分.

(3)如果我学习努力并且考试得满分，那么我很快乐.

4. 试将下列命题符号化：

(1)我美丽而又快乐.

(2)如果张三和李四都不去，王五就去.

(3)仅当你去，我才留下.

(4)电灯不亮，当且仅当灯泡或开关发生故障.

§1.2　命题公式的等值演算

一、命题变元与命题公式

定义 1.2.1　表示任意命题的命题标识符称为命题变元. 一个确定了真值的真命题和假命题分别用 1 和 0 表示，称 1 和 0 为命题常元.

定义 1.2.2　命题公式(简称公式)是按下列规则定义的符号串：

(1)命题变元和命题常元是公式；

(2)若 A 和 B 都是公式，则 $(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 是公式；

(3)有限次使用(1)和(2)所得到的符号串是公式.

为了表示出一个公式中所含的命题变元，把以 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为命题变元的公式 A 记为 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$，同时在不致于引起混乱的情况下也可以省略公式中的一些括号，约定：

①公式中最外层括号可以省略；

②当 $\neg$ 仅作用于邻接后的变量时，可以省略括号.

例 1.2.1　$(\neg p) \wedge q$，$((\neg p) \rightarrow q) \wedge 1$ 都是公式. 而 $\wedge q$，$p \wedge \neg$ ，pq 等符号串不是公式.

例 1.2.2　省略最外层的括号，公式 $(p \rightarrow (\neg q))$ 可以写成 $p \rightarrow (\neg q)$，而 $\neg$ 仅作用于变元 q，则 $p \rightarrow (\neg q)$ 可成 $p \rightarrow \neg q$. 但不能将公式 $p \rightarrow (\neg q \vee r)$ 中的括号省

略后写成 $p \to \neg q \vee r$.

一个命题可以通过符号化表示成一个公式.对一个公式而言,它仅仅是一个没有实际语意的符号串.只有对公式中的每个变元都用具体的命题替代后,才能将公式"翻译"成一个具体的命题.如果对公式中的每一变元都确定了真值,则该公式也有惟一确定的真值.

定义 1.2.3 设 A 是以 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为变元的命题公式,称 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的一组真值为公式 A 的一个解释.

含 n 个变元的公式 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 共有 2^n 个解释.对每一个解释,公式 A 都有惟一确定的真值.因此,命题公式也可视为以 $\{0,1\}$ 为值域,关于命题变元的函数.

定义 1.2.4 设 A 是命题公式,由 A 的全部解释和 A 与其相对应的真值构成的图表称为 A 的真值表.

利用真值表讨论命题公式是十分有效的.作为一种工具,真值表在后面会经常用到.在构造命题公式的真值表时,一般遵循下面规则:

①命题变元按字典序排列;

②对一个公式的全部解释,按二进制数从小到大(或由大到小)的顺序列出.

例 1.2.3 构造公式 $(p \vee r) \wedge (p \to q)$ 的真值表.

解 公式 $(p \vee r) \wedge (p \to q)$ 的真值表如表 1.2.1.

表 1.2.1

p q r	$p \vee r$	$p \to q$	$(p \vee r) \wedge (p \to q)$
0 0 0	0	1	0
0 0 1	1	1	1
0 1 0	0	1	0
0 1 1	1	1	1
1 0 0	1	0	0
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	1	1

定义 1.2.5 设 A 是命题公式.

(1)如果对命题变元的每一组解释,A 皆为真,则称 A 为永真式.

(2)如果对命题变元的每一组解释,A 皆为假,则称 A 为永假式.

(3)如果命题变元至少有一组解释使 A 为真,则称 A 为可满足式.

永真式也称重言式,用真值 1 表示;永假式也称矛盾式,用真值 0 表示.

例 1.2.4　利用真值表判定公式$(p \to q) \vee p$ 是永真式、永假式还是可满足式.

解　构造公式$(p \to q) \vee p$ 的真值表(见表 1.2.2)

表 1.2.2

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \vee p$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

由真值表得公式$(p \to q) \vee p$ 是永真式.

二、命题公式的等值演算

定义 1.2.6　设 A 和 B 是两个命题公式,如果在任意解释下,A 和 B 都有相同的真值,则称 A 和 B 等值,记为 $A = B$.

注意,A 和 B 等值,并不要求 A 和 B 含有相同的命题变元.例如,学完本节之后你能证明等值式 $p = (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$.

例 1.2.5　证明$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

证明　根据等值的定义,要验证两个公式等值,只需比较二者的真值表,看它们是否有相同的真值关系.对构造公式$\neg(p \wedge q)$和$\neg p \vee \neg q$ 的真值表,为便于比较,将其合二为一(见表 1.2.3).

表 1.2.3

p	q	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0

可见,$\neg(p \wedge q)$和$\neg p \vee \neg q$ 有相同的真值表,等值关系得证.

由等值关系的定义,不难证明等值关系有以下性质:

①自反性,即对任意的公式 A,有 $A = A$;

②对称性,即对任意的公式 A 和 B,若 $A = B$,则 $B = A$;

③传递性,即对任意的公式 A, B, C,若 $A = B, B = C$,则有 $A = C$.

因此,命题公式之间的这种等值关系是数学上的一种等价关系.

关于等值,还要注意一点,不要将符号"="和"↔"混淆."↔"是命题间的一种运算,而"="是公式之间的一种关系.两个公式间的关系除等值外,后面还要讨论另一种"蕴涵关系".虽然等价运算和等值关系是两个不同的概念,但我们可通过下面的定理了解二者的联系.

定理 1.2.1　$A = B$ 的充要条件是$A \leftrightarrow B$ 是永真式.