

ZHONGXUE SHUXUE SIWEIFANGFACONGSHU

中学数学思维方法丛书

走向数学发现

蒋 声 编著

ZOUXIANGSHUXUEFAXIAN

JIANGSHENG

ZHONGXUE
SHUXUE
SIWEIFANGFA
CONGSHU



大象出版社

中学数学思维方法丛书

- 走向数学发现
- 原则与策略
- 猜想与合情推理
- 直觉探索方法
- 逻辑探索方法
- 整体方法
- 逻辑与演绎
- 综合与构造
- 转化与化归
- 抽象与模式
- 反思与监控
- 计算机与思维
- 观念与文化

ISBN 7-5347-2334-5



9 787534 723346 >

ISBN 7-5347-2334-5/G · 1927

定价: 5.90 元

中学数学思维方法丛书

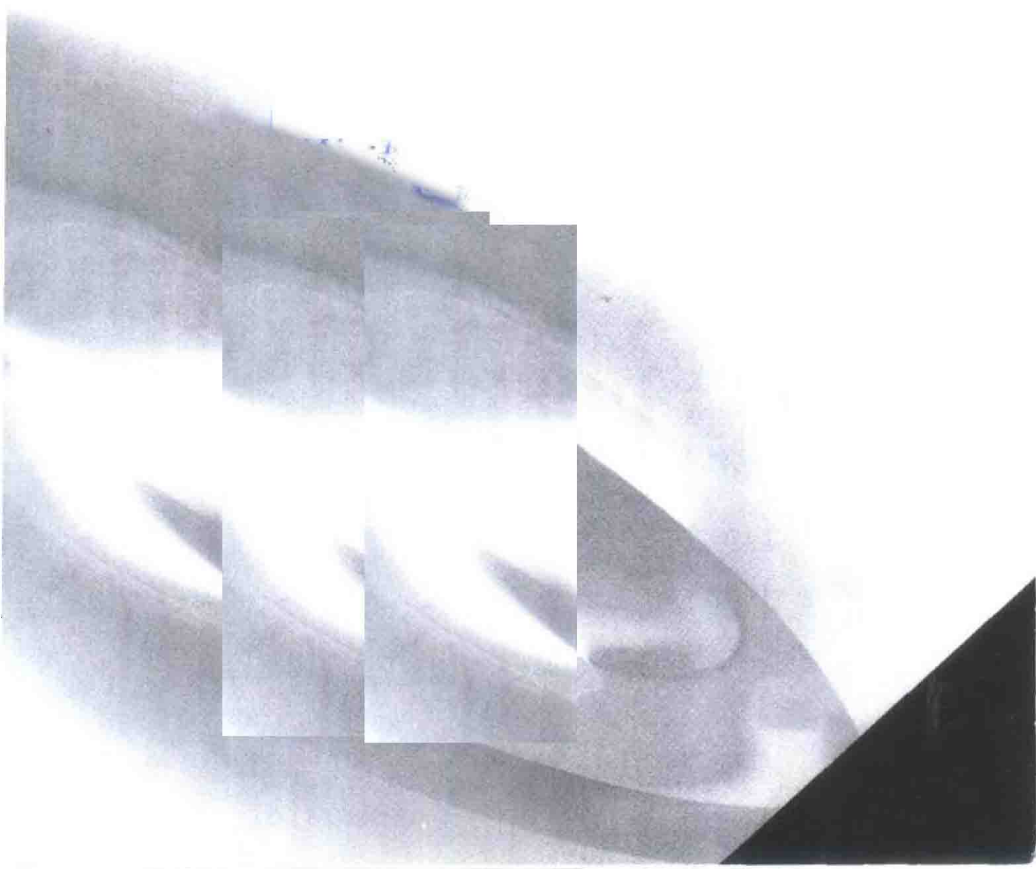
走向数学发现

蒋 声 编著

大象出版社

ZOUXIANGSHUXUEFAXIAN

JIANGSHENG



图书在版编目(CIP)数据

走向数学发现/蒋声编著. - 郑州:大象出版社,1999

(中学数学思维方法丛书/王梓坤,张乃达主编)

ISBN 7-5347-2334-5

I. 走… II. 蒋… III. 数学课 - 初中 - 学习方法 IV. G63
4.604

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17294 号

责任编辑 谢 凯	责任校对 霍红琴
大象出版社出版(郑州市农业路 73 号 邮政编码 450002)	
新华书店经销	河南省瑞光印务股份有限公司印刷
开本 850 × 1168	1/32 印张 5 字数 106 千字
1999 年 9 月第 1 版	1999 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—2 500 册	定 价 5.90 元

若发现印、装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换。

印厂地址 郑州市二环路 35 号

邮政编码 450053

电话 (0371)3822319

中学数学思维方法丛书

主 编 王梓坤 张乃达

编 委 (以姓氏笔画为序)

王梓坤 过伯祥 杨世明

张乃达 蒋 声

本册作者 蒋 声

序

早在 1995 年 8 月,大象出版社(原河南教育出版社)在扬州举办了一个座谈会,邀请十余位教学水平很高的数学教师参加,商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为,这是一个富有创见的倡议,因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础,又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书,对中学数学教学,无疑会是非常有益的;而更主要的,广大的中学生,将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面,学到很多的东西。这对将来无论做什么工作,都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景,总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣,而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼,必须东拼西凑,多一只兔便比鸡多了两条腿,好不容易才能做出一题。而学过代数,这类问题便变得极为简单。做几何题也一样,必须具体问题具体解决,而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积,如果不用积分便会相当麻烦。由此可见,方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研,从事创新、发现或发明,那就更应重视方法,特别是思维方法。没有新思想,没有新方法,要超过前人是很困难的。有鉴于此,一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们,要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家 G. Pólya 写过好几种关于数学思想方法的书,如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》,后来都成为世界名著,很受欢迎。

学习任何一门科学,都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来,前者比较容易。因为知识已经成熟,而且大都已经过前人整理,成为循序渐进的教材。但能力则不然,那是捉摸不定、视之无形的东西,主要自己去思考,去探索,去总结,去刻苦锻炼。老师的培养固然重要,但只能起辅导作用。只可意会,不可言传,而有时甚至连意会都做不到。正如游泳,只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师,则应无保留地传授自己的经验和体会,尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗:“鸳鸯绣出凭君看,不把金针度与人。”意思是说知识可以输出,但能力不可传授。前一句话意思很好,后一句应改为“急把金针度与人”。这套丛书,正是专门传授金针的。

一般的科学研究方法,可分为演绎与归纳两大类。在数学中,演绎极为重要,而归纳则基本上用不上,除了 C. F. Gauss 等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后,这种情况已大为改

观。混沌学主要靠计算机而发展起来,数学模拟也主要靠计算机。再者,以往数学中极少实验,还是由于计算机的广泛使用,现在不少数学系已有了实验室,特别是统计实验室。可以期望,计算机对改变数学的面貌,对改善数学的思维方法,都会起到越来越大的作用。

在此之前,我国已经出版了几本关于数学方法的书,它们都各有特色。如就规模之大,选题之广,论述之精而言,这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中,将会起到令人鼓舞的作用。

王梓坤

99.7.6.

引 言

“发现”，是一个美妙的词。

发现引人注目。在长篇大论里忽然看见“发现”二字，读者的眼睛顿时为之一亮。电视剧的人物对话里飘过来“发现”二字，电视机前的观众立刻安静下来，电视机旁的过客也好奇地探过头来。发现了什么呢？

发现使人鼓舞。一宗迷案发现侦破线索，办案人顷刻间忘记了疲劳，忘记了饥渴。一道难题发现解法，解题者马上变愁容为笑容，乐滋滋地说：“这个题目真伤脑筋！”众里寻她千百度，“发现”原来在此处，多么开心，多么高兴！

发现令人神往。法国著名数学家彭加勒有一天夜晚违反习惯，喝了黑咖啡，久久不能入眠，各种想法纷至沓来，结果在第二天早晨发现了一类新的高等超越函数。如果我今晚喝一杯浓浓的雀巢咖啡，会不会发生奇迹呢？

在各种各样的发现里，最容易接近的是数学发现。因为数学就在我们身旁。生活中处处有图形，时时讲数量。生活离不开分析、判断、推理，生活需要插上想象的翅膀。形和数是数学的研究对象，从

感性到理性的思考是数学的特长.数学不但是各行各业必不可少的工具,数学还有林的幽静,雾的朦胧,山的崎岖,曲的和谐,舞的韵律,诗的想象.各行各业的发现,都是数学发现的邻居,可以将数学发现中的规律借来参考.浏览数学风光不需要门票,拈一支笔,铺一张纸,捧一本书,就可以凭借生活经验,登上数学之舟扬帆试航.数学是大众的数学,数学热情欢迎所有来宾观光,数学给每一位辛勤劳动者提供丰厚的报偿.

现在这本书的目的,就是探讨通往数学发现的道路.

练字从临摹开始.打开第一章,我们就开始进入角色,顺次扮演欧几里得、笛卡儿、牛顿和高斯历代数学四大名家,以今天的心境,唱那古老的歌谣,走马观花,寻访旧时的机遇,体会发现的心情.

然后我们回到自己的生活,自己的学习和工作,讨论怎样从大家熟悉的中学数学环境出发,打开发现的门户,踏上发现的道路,向发现要潜力,向发现要时间.由于寻求发现而提高素质,因为获得发现而减轻负担.排解日常的烦恼,探讨身边的问题,疏通秘诀的源泉,清扫登攀的阶梯.例题有解法又有想法,问题谈背景也谈前景,既欣赏前台演出效果,又参观后台准备过程.希望能对中学数学教师、中学生、师范院校数学系学生和业余爱好者有所帮助.

在准备本书内容的过程中,参考了很多有关书籍和文章,借此机会,谨向这些资料的作者和译者表示由衷的感谢.

本书话题,说古论今,通上贯下,意义重大,难度也很大.学海无涯,作者才疏学浅,勉力为之,不过抛砖引玉而已.书中疏漏及错误在所难免,恳切期待各方面专家和朋友们热情指正.

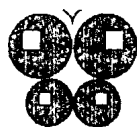
蒋 声

1997年5月

目 录

引言	(1)
一、重访数学伟大时刻	(1)
1. 如果你是欧几里得	(1)
2. 如果你是笛卡儿	(13)
3. 如果你是牛顿	(20)
4. 如果你是高斯	(29)
二、各种数学发现	(37)
1. 小发现小改进	(37)
2. 重新发现定理	(48)
3. 解决遗留问题	(56)
4. 新方向新课题	(63)
三、英雄有用武之地	(68)
1. 中学生	(68)
2. 中学数学教师	(84)
3. 大学生和研究生	(96)
4. 业余爱好者	(106)

四、千里之行始于足下	(118)
1. 磨砺智慧之剑	(118)
2. 博览参考文献	(122)
3. 认定大致方向	(126)
4. 小心探索前进	(130)
主要参考书目	(145)



一、重访数学伟大时刻

在谋求发展时,人们常说,要抓住机遇.

要想在数学上有所发现,也必须及时抓住机遇.小机遇常有,大机遇难逢.

数学史上有多次重大发现机遇,本章将考虑其中的四次.设想我们恰好生逢其时,分别充当大数学家欧几里得、笛卡儿、牛顿和高斯的角色,那么我们将会怎样作出发现,怎样理解发现,以及怎样向后人介绍发现呢?

1. 如果你是欧几里得

(1) 老朋友欧几里得

在数学故事和有关数学史的书籍、文章里,经常介绍古代希腊数学家欧几里得和他的名著《几何原本》.

《几何原本》大约完成于公元前 300 年左右,最初是手抄本,



图1 欧几里得

1482年开始有印刷版本,至今已累计出版了1000多种不同的版本,被翻译成各种文字.除去《圣经》,世界上没有其它书籍拥有过这样多的读者.

《几何原本》里有代数也有几何,其中的几何部分被用来作为中学几何教材蓝本长达两千多年.直到现在,中学《几何》课本里仍有许多《几何原本》的痕迹.欧几里得的伟大身影跨越时空,陪

伴现代中学生成长.

在大学数学课程里,欧几里得的名字常与“空间”、“几何”、“算法”等连结成数学名词,出现在老师和同学们的嘴边和笔下.写得多、说得多了,图个方便,就来个长姓短读,把欧几里得简称为欧氏,尽管他并不姓欧.

在群星灿烂的历代数学家中,欧几里得显得特别平易近人.很多人在说起欧几里得的时候,像是谈论一位老朋友那样熟悉和亲切.

(2)从羽毛球谈起

羽毛球是不是球?

有人说羽毛球当然是球,有人说羽毛球肯定不是球.

这是概念的争论,逻辑的交锋.

几何最讲究概念的严密,逻辑的清晰.如果几何大师欧几里得还在,请他来做裁判,谁是谁非,立刻就能见分晓了.

现在你来扮演欧几里得.请你判定,“羽毛球是球”和“羽毛球不是球”这两个命题,谁对谁错?

这个裁判不好当.

如果判定“不是球”,数学系的学生一致鼓掌,体育系的学生却群起攻击,说你一窍不通.

如果判定“是球”,体育系的学生把你高高举起,数学系的学生却愤怒谴责,说你满口胡言.

稳扎稳打,小心为妙.首先宣布:

结论分为两点.第一点,两个命题都是正确的!

话音未落,掌声雷动.体育系欢庆自己的胜利,因为命题“羽毛球是球”正确;数学系也欢庆自己的胜利,因为命题“羽毛球不是球”也正确.

可是,欢呼的人群中,会闪现越来越多的怀疑目光.两个互相矛盾的命题,怎么可能同时都是正确的呢?

不等掌声平息,你赶快接着大声说:

第二点,但是,双方的命题叙述都有关键性的省略.

完整地说,第一个命题应该叙述成“羽毛球运动是球类运动”.命题正确,但是把关键词“运动”省略了,简单地说成“羽毛球是球”.

第二个命题,完整的说法是:“羽毛球的形状不是球形的.”命题正确,但是省略了关键词“形状”,简单地说成“羽毛球不是球”.

总之,“羽毛球运动是球类运动”,“羽毛球的形状不是球形的”,这两个命题,都是正确命题!

全场再次响起长时间热烈的暴风雨般的掌声.疑团已经全部

解开.只因说话过分简洁,造成概念模糊,互相混淆,引起麻烦.多说几个字,澄清了概念,避免了误解,用小小的麻烦消去了大大的麻烦.

由此可见,要能保证逻辑严密,首先必须概念准确.要用一丝不苟的严格定义,把概念解释得清清楚楚,明明白白.

如果你生活在欧几里得时代,你代替欧几里得为几何学埋下基石,那么你所要做的第一件事,就是下定义,像《几何原本》那样,力求把必需的概念都解释得毫不含糊.

(3)这图不是那图

下面是一个幽默小故事.

一位家长希望儿子成为美术家,要求他的儿子每天要画三幅图.儿子欣然同意,当天一会儿就交卷了.第一张纸上用圆规画了一个圆,儿子解释说,这是乒乓球.第二张纸上也画了一个圆,儿子说它是玻璃球.第三张纸上画的还是一个圆,这次儿子的解释说是铅球.

家长启发说,三种球的质地不同,乒乓球掉在地砖上弹起老高,玻璃球掉在地砖上跌得粉碎,铅球掉在地砖上砸坏了地面.你的图上能看出这些区别吗?

儿子回答说,用什么材料做球,谁撞坏了谁,自然有人去管,我不管.我画图只要注意形状、大小和位置关系.

于是家长笑了起来,说:看来应该指望你成为数学家了!

这个小故事说明了美术的图与几何的图有什么不同.美术的图更贴近生活,力求表现实物的色彩、质感、神韵,等等.几何的图经过了抽象概括,只考虑形状、大小和相关位置这三方面的共性.因而,一幅几何图形的适用范围,比一幅美术图形的适用范围广泛

得多。

数学是研究形和数的,其中有关形的问题主要是在几何里研究.如果你像欧几里得那样生活在古代希腊的亚历山大里亚城,几何学理论将在你手里诞生,那么你就要下功夫,把图形概念琢磨透彻。

(4)点无大小线无宽

在欧几里得的《几何原本》里,最初7个定义是关于点、线、面的.下面是这些定义的内容.一面看定义,一面就可以设想,如果你是欧几里得,你会不会这样下定义?

定义1 点是没有部分的那种东西。

定义2 线是没有宽度的长度。

定义3 一条线的两端是点。

定义4 直线是同其中各点看齐的线。

定义5 面是只有长度和宽度的那种东西。

定义6 面的边缘是线。

定义7 平面是与其上直线看齐的那种面。

这些定义虽然古老,却不很陌生。

首先是定义6——“面的边缘是线”和定义3——“一条线的两端是点”。这使我们想起现行初中《几何》课本里的讲法:“面与面交接的地方,形成线”,“线和线相交的地方是点”。文字稍有不同,意思大体相近。

其次是定义1、2、5,它们意味着点没有大小,线有长度但没有宽度,面有长、宽但没有厚度.这些观点在现今的几何参考书里仍然经常可以见到。

剩下的定义4和7,说法有些别扭,意思却很容易理解.上体