前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則徹底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

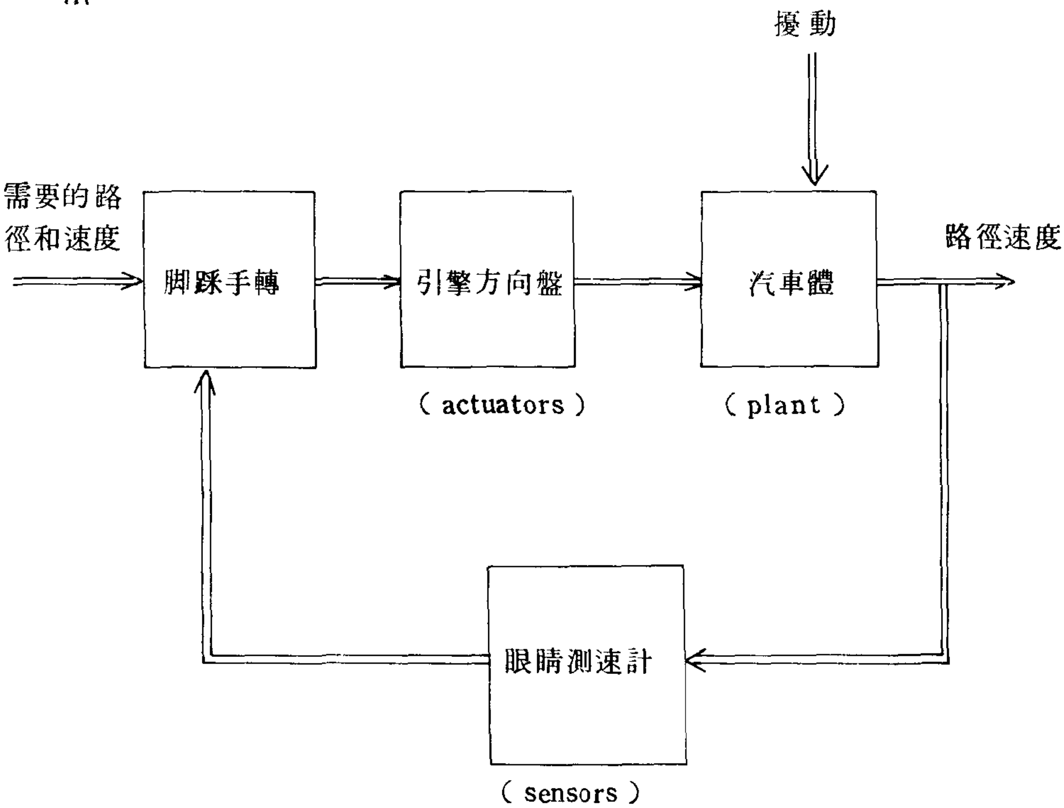
一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

動 態 系 統
回 授 控 制
習 題 詳 解

第一章　回授控制的概述與簡史

1.1　畫出駕駛汽車系統的回授圖。考慮以希冀的路徑及速度作爲參考輸入。標出方塊圖中，受控系統、致動器及感測器的部分。

解

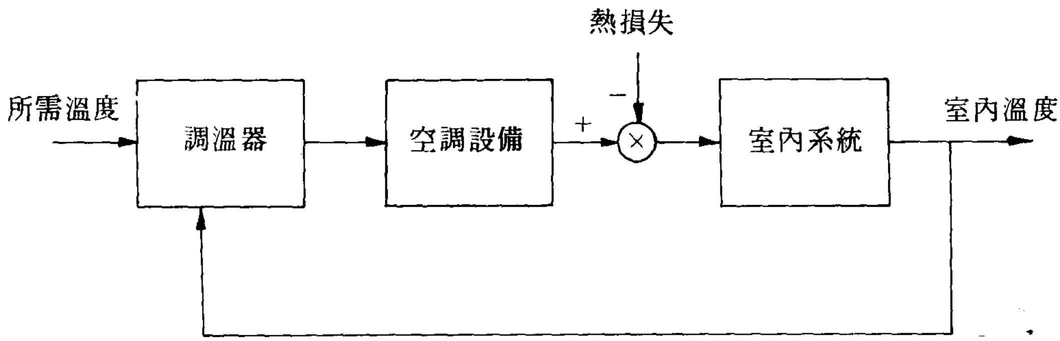


1.2　在房間或辦公室中的溫度控制器可能是下列幾種之一，可能是用充滿液體的管子、雙金屬片、彈簧式鼓風箱（spring bellows），或一電子式開／關控制器。詳細說明其工作原理。

解　在房間中的調溫器的類型很多，但其功能都是一樣。若室中溫度高於參考溫度，則調溫器產生一個負信號進入控制器，以使室中溫度降低。

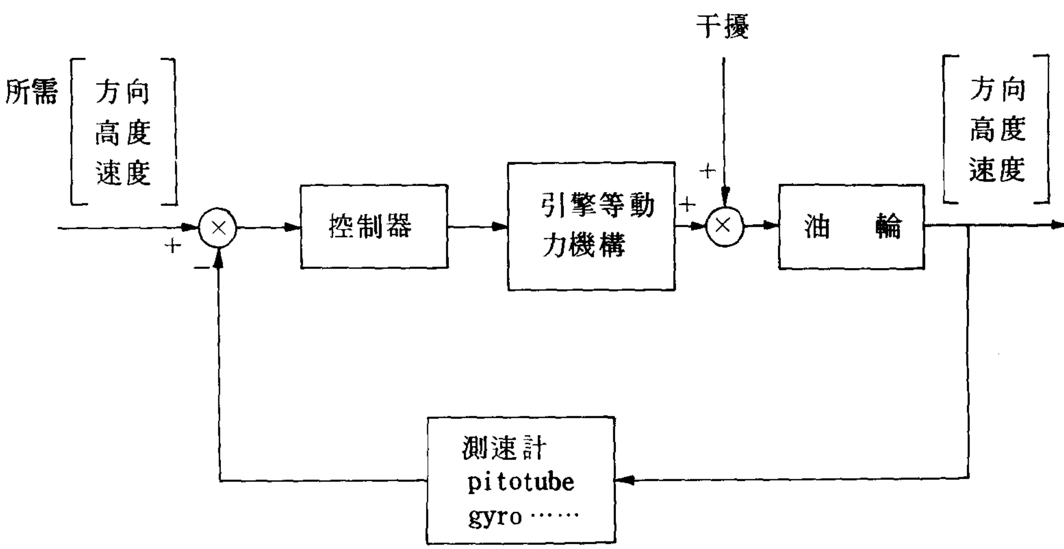
若室中溫度低於參考溫度，則調溫器產生一個正信號進入控制器，以使室中溫度升高。

其作用可以下面 block diagram 說明



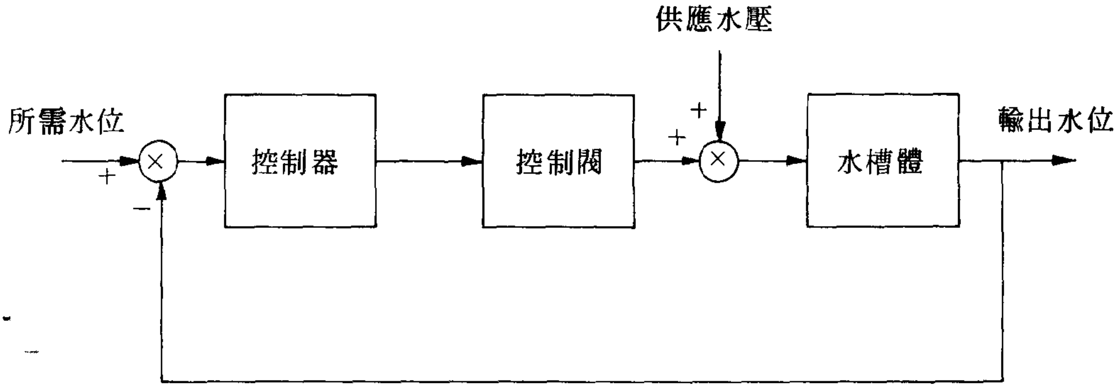
1.3 畫出油輪自動駕駛的回授圖。

解



1.4 畫出有水位調整器的洗臉枱之回授圖。

解



1.5　用於交通號誌燈及彈出式烤麪包機是那一種控制系統？

解　(1)　交通燈在平時是 open-loop control，因時間和順序都是固定的。但在特殊狀態（如尖峯時期）則爲Closed-loop control, 因有交通警察在執行 sensor 的 feedback 作用，而予以適當調整。

(2)　烤麪包機是 open-loop control，因時間和溫度，都是已經定好各種段數，而任人選擇。

1.6　有一種造紙機器用來控制紙原料厚度及水含量（濕氣）的，在乾燥及捲壓階段之前，控制輸出原料的濃度是很重要的。從機器室來的厚原料由“線”下來回的白水稀釋。白水的流量是由控制閥（CV）控制的。濃度計置於管路接頭有一段距離之處，如圖 1.8 所示。畫出此系統的回授圖。

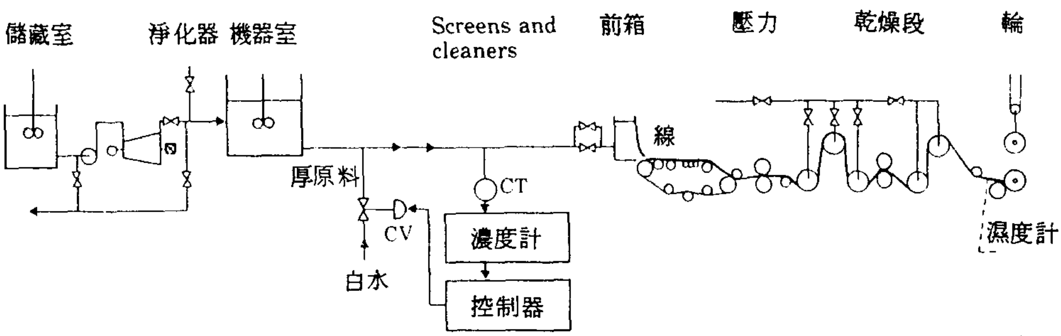
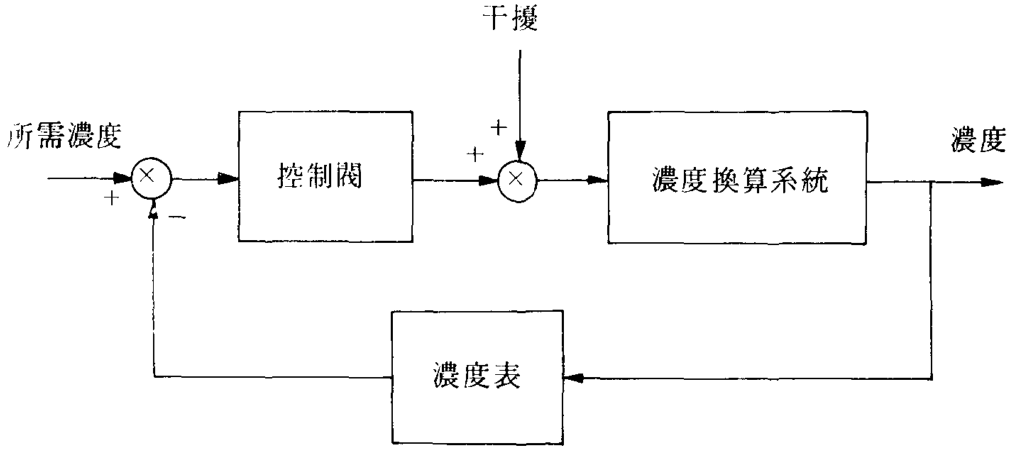


圖 1.8　造紙機器的示意圖（取自 Åström, 1970, 192 頁。經同意重印）。

解



1.7 人體中的很多變數是在回授控制下的。對下列各變數，盡你所能列出你知道的或認爲量測變數的感測器，使變數增加或減少的致動器，構成回授路徑的資信路徑，以及擾亂變數的干擾。

(a) 血壓　(b) 血醣濃度
(c) 心跳速率　(d) 眼視角
(e) 眼睛瞳孔直徑　(f) 血鈣值

解 (a) sensor：脈搏，血壓計。
actuator：心臟。
path：血管。
disturbance：情緒，藥物。

(b) sensor：尿液化驗。
actuator：心臟負荷，藥物，食物。
path：排泄系統。
disturbance：情緒，藥物，食物。

(c) sensor：量脈搏，心電圖。
actuator：心臟。
path：神經系統。
disturbance：情緒，運動量。

(d) sensor：大腦，眼部肌肉神經。
actuator：眼部肌肉。
path：神經系統，外人觀察。
disturbance：外界影像。

(e)　sensor：眼睛觀察。
actuator：瞳孔組織。
path：神經系統，外人觀察。
disturbance：情緒，光線。

(f)　sensor：骨骼表徵，牙齒表徵。
actuator：骨髓。
path：觀察。
disturbance：藥物，健康情形。

1.8　由梅雅所給及歸功於杜列伯之孵蛋器圖樣示於圖 1.9 中。畫出此溫度控制回授系統的方塊圖，標出參考輸入、感測器、致動器、受控系統及干擾等部分。

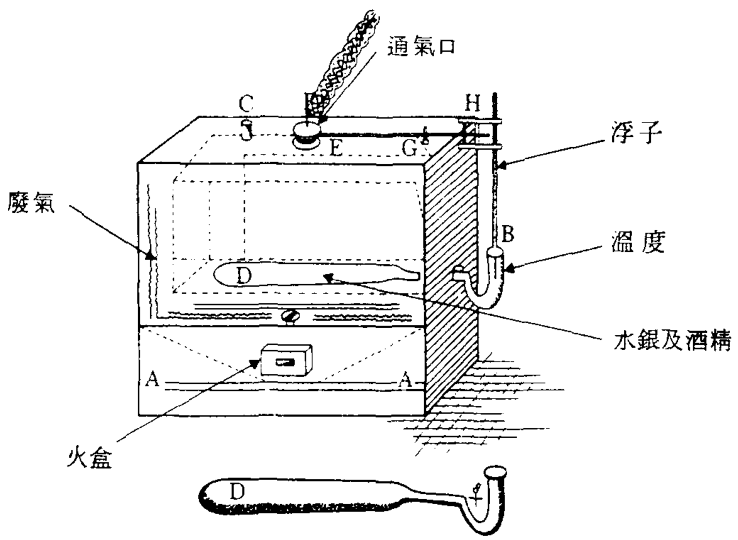
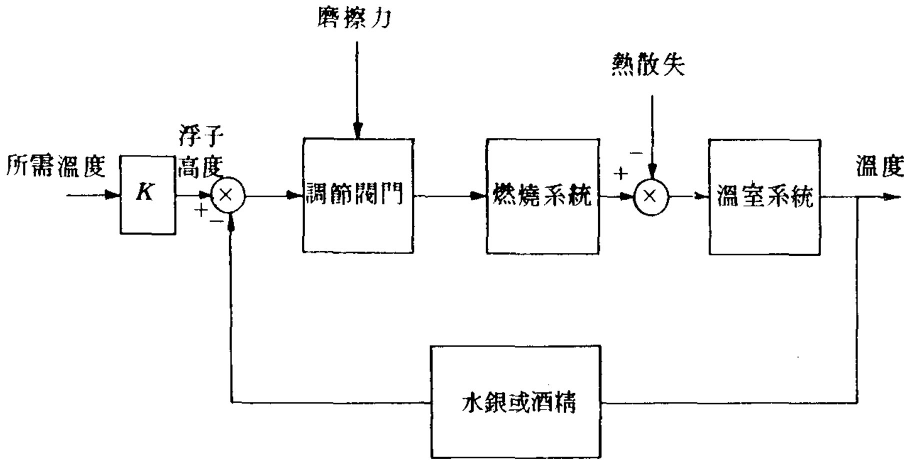


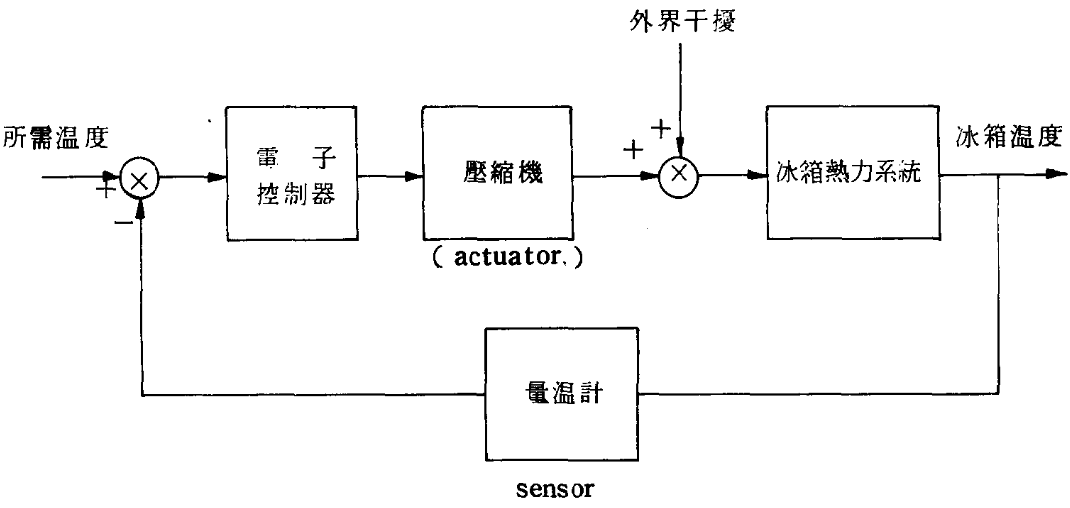
圖 1.9

解　controller：調節閥門。
actuator：燃燒系統。
process：溫度系統。
sensor：水銀或酒精。
disturbance：熱散失和摩擦力。



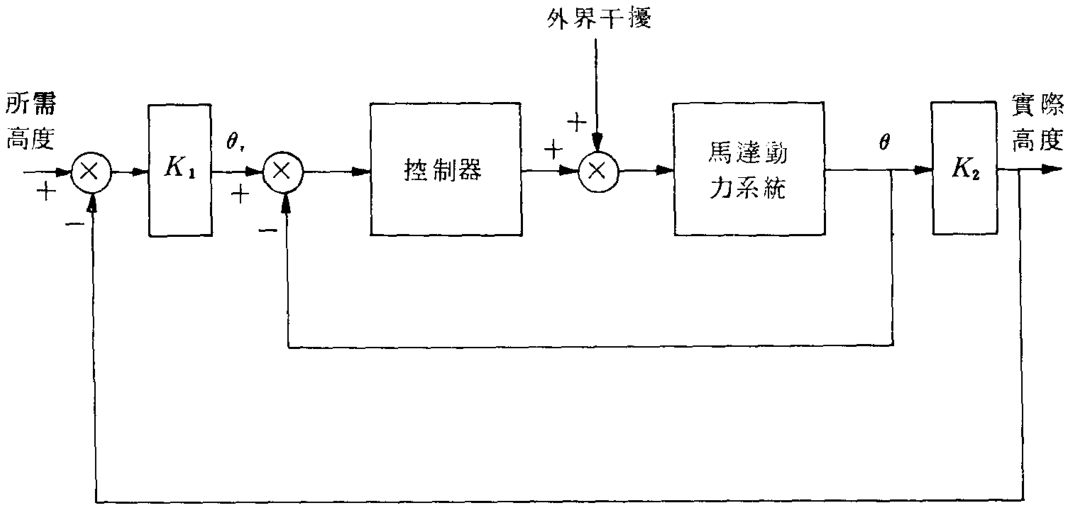
1.9 畫出冰箱溫度控制的回授圖。

解



1.10 畫出電梯位置控制的回授圖。如何測量電梯車箱的位置？你可以一種結合"粗略"及"精細"的測量系統。你建議精確度應爲多少？

解 升降梯的高度，原只需量馬達的轉角即可，因馬達的回授控制需要的是轉角量。但因繩索的粗度關係，致使換算的高度具有誤差，因此本系統再加入實際高度的回授，可使輸出高度達到最準確的要求。



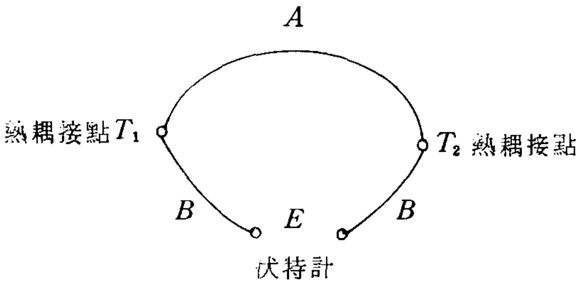
1.11 要作回授控制必須測出控制中變數的量。由於電信號容易傳輸，放大及一般性的處理，吾人常要感測器輸出一與量測中變數成比例的電壓。設計出這樣的工作原理並畫出方塊圖來解釋能量測下列物理量之各種不同感測器的工作原理。

(a) 溫度
(b) 壓力
(c) 液位
(d) 管中的流量（或血管中的血液）
(e) 位置（線性的或轉動的）
(f) 速度（線性）
(g) 速率（轉動的）
(h) 加速度（平移的、轉動的）
(i) 力量
(j) 轉矩

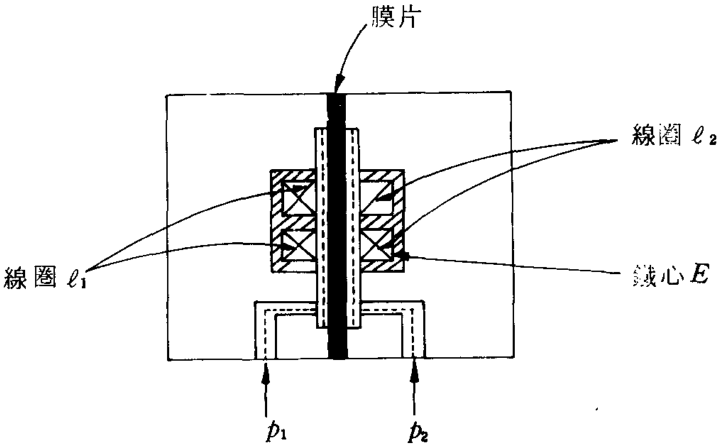
在每一情況中註明動態範圍、線性及信號／雜訊比。

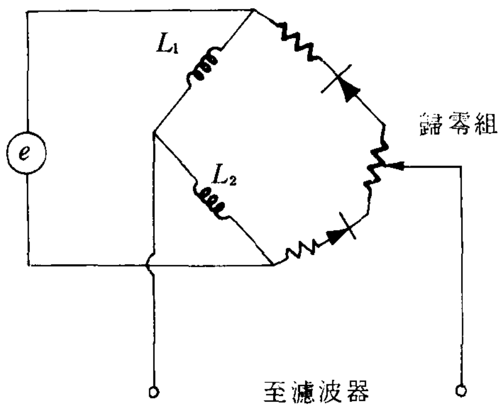
解 (a) 溫度：

熱電耦其中一個接點的溫度爲T_1，另一個接點的溫度爲T_2，若接一個無限大電阻的伏特計，則可量出電動勢E。



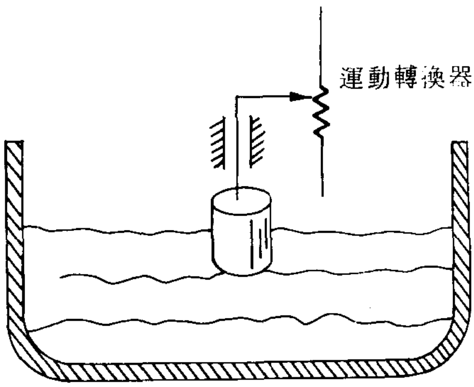
(b) 壓力：





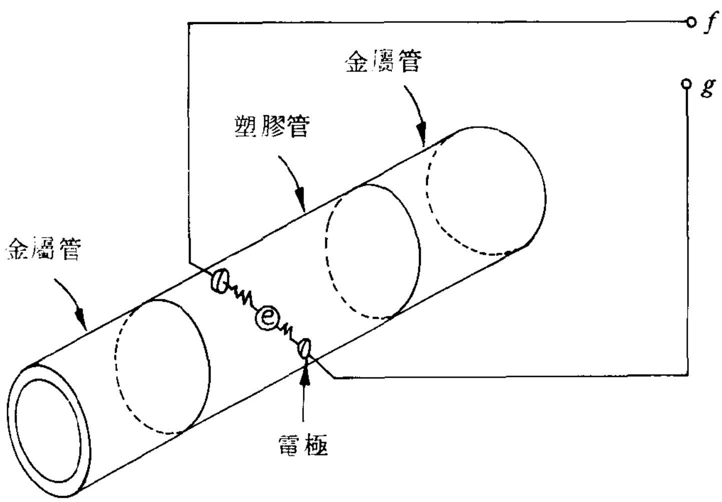
此爲可變電感壓力拾訊器，通常磁性不銹鋼膜片是用來當作兩 E 形線圈之運動"鐵片"，此兩 E 形線圈安排成半橋（ half bridge)電路。此種拾訊器的特性爲膜片可以互換，由於此種拾訊器的膜片雙面均耐腐蝕，故可用來量測計壓力或差壓力。

(c)　水位：



圖中的簡易浮筒裝置可和適當的運動轉換器耦合，以產生一電子訊號正比於液位。

(d)　流量：



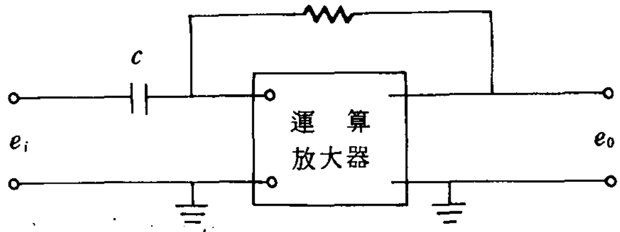
由 $e = BD_P v$ 的關係，可量得管內流速 v 。

(e)　位置：

可由“電阻電位計”包括一電阻元件，再加上一可滑動的接觸臂，其接點運動可以是平移，旋轉，或者兩者的混合，因此可用來量測旋轉位移和平行位移。

(f)　速度：

任何位移轉換器的輸出電壓（前小題），可以送至微分電路，得到正比於速度的電壓。



（微分電路）

(g) 轉速：

一個普通的直流發電機，所產生的轉出電壓，約與其轉速成正比。若某些特徵特別設計，可成爲很準確的速率測量儀器。

(h) 加速度：

交流轉速計發電機是一種測加速度的可能裝置，其他可行方法爲將速度訊號送入微分電路得到加速度訊號。

(i) 力：

利用應變計的組合，並配上適當的機械件，就可測量壓力和張力。

(j) 力矩：

可由應變計力矩台來量測力矩。

（註：本題更詳細的介紹，請參考孫如意譯之"量測系統應用與設計"）。

第二章　動態模型與響應

2.1 (a) 寫出圖 2.49 中機械系統的微分方程式。

(b) 求出圖 2.49 中機械系統由 y 到 x_1 及 y 到 x_2 的轉移函數。

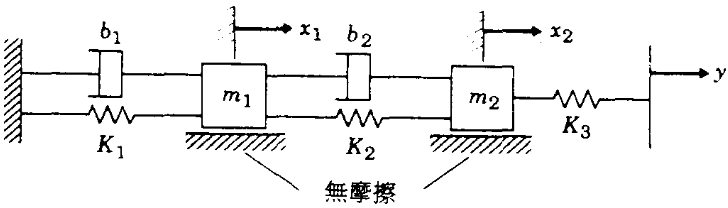
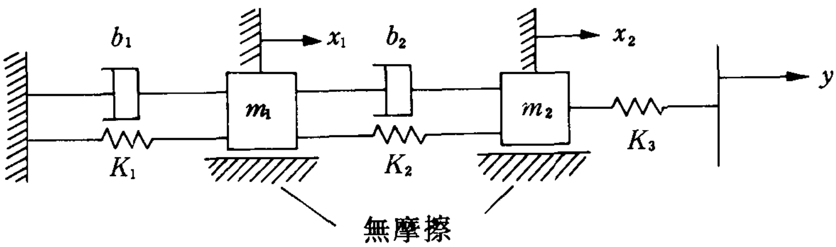


圖 2.49

解 (a)



從上圖分別考慮 m_1 和 m_2 可得如下運動方程式：

$$0 = m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$0 = m_2 \ddot{x}_2 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_2 - y) \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

(b) 將①和②式做 laplace transform 可得：

$$\begin{cases} 0 = m_1 s^2 X_1 + b_1 s X_1 + k_1 X_1 + b_2 s (X_1 - X_2) + k_2 (X_1 - X_2) \\ 0 = m_2 s^2 X_2 + b_2 s (X_2 - X_1) + k_2 (X_2 - X_1) + k_3 (X_2 - Y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}[m_1 s^2+(b_1+b_2)s+k_1+k_2]X_1 \\ =(b_2 s+k_2)X_2 \cdots\cdots\cdots ③ \\ (m_2 s^2+b_2 s+k_2+k_3)X_2-(b_2 s+k_2)X_1 \\ =k_3 Y \cdots\cdots\cdots ④\end{cases}$$

由③式可得

$$\begin{cases}X_1=\dfrac{(b_2 s+k_2)X_2}{m_1 s^2+(b_1+b_2)s+k_1+k_2}\cdots\cdots\cdots ⑤ \\ \text{或}\quad X_2=\dfrac{[m_1 s^2+(b_1+b_2)s+k_1+k_2]}{b_2 s+k_2}X_1 \cdots\cdots ⑥\end{cases}$$

將⑤式代入④式可得 y 到 x_2 的 transfer function 如下

$$\begin{aligned}X_2/Y &= k_3/\{[(m_2 s^2+b_2 s+k_2+k_3)-(b_2 s+k_2) \\ &\quad \cdot (b_2 s+k_2)/[m_1 s^2+(b_1+b_2)s+k_1+k_2]\} \\ &= k_3 [m_1 s^2+(b_1+b_2)s+k_1+k_2] \\ &\quad /\{m_1 m_2 s^4+[m_1 b_2+m_2(b_1+b_2)]s^3 \\ &\quad +[m_1(k_2+k_3)+m_2(k_1+k_2)+b_1 b_2]s^2 \\ &\quad +[(b_1+b_2)(k_2+k_3)+b_2(k_1+k_2) \\ &\quad +2b_2 k_2]s+(k_1+k_2)(k_2+k_3)+k_2^2\}\end{aligned}$$

（註：此類題目一般來說不用把係數乘開）

將⑥式代入④式可得 y 到 x_1 的 transfer function 如下：

$$\begin{aligned}X_1/Y &= k_3/\{(m_2 s^2+b_2 s+k_2+k_3)\cdot[m_1 s^2+(b_1+b_2)s \\ &\quad +k_1+k_2]/(b_2 s+k_2)-(b_2 s+k_2)\} \\ &= k_3(b_2 s+k_2)/\{(m_2 s^2+b_2 s+k_2+k_3) \\ &\quad \cdot [m_1 s^2+(b_1+b_2)s+k_1+k_2] \\ &\quad -(b_2 s+k_2)^2\} \\ &= k_3(b_2 s+k_2)/\{m_1 m_2 s^4+[m_1 b_2+m_2(b_1+b_2)]s^3 \\ &\quad +[m_1(k_2+k_3)+m_2(k_1+k_2)+b_1 b_2]s^2 \\ &\quad +[(b_1+b_2)(k_2+k_3)+b_2(k_1+k_2) \\ &\quad +2b_2 k_2]s+(k_1+k_2)(k_2+k_3)+k_2^2\}\end{aligned}$$

（註：注意 X_1/Y 和 X_2/Y 的 characteristic equation 相同）

2.2 證明在式（2.15）中之“推車上桿子”問題的運動方程式經由適當的正規化，可寫為

$$\ddot{\theta}=\theta+u$$
$$\ddot{y}=\theta+\alpha u$$

此處 u 爲輸入的力（圖 2.50）。

(a) 以 u 爲輸入 y 爲輸出，僅用積分器作爲動態元件，畫出此系統的方塊圖。

(b) 從 u 到 y 的轉移函數爲何？（小心正回授環）

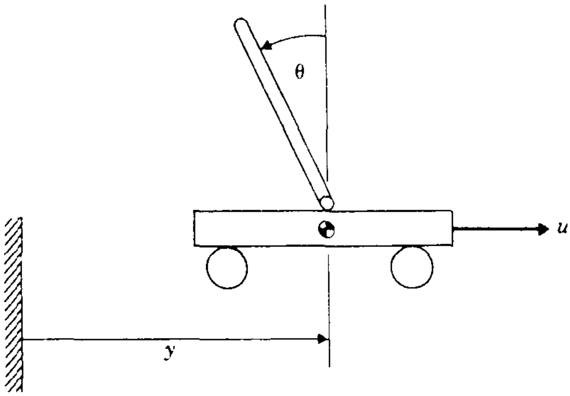


圖 2.50

解　式（2.15）是

$$(I+m\ell^2)\ddot{\theta}-mg\ell\theta=m\ell\ddot{x}$$

$$(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}-m\ell\ddot{\theta}=u$$

由於式（2.15）是由課本圖 2.11 導證出來，所以含有 damping 這一項，但現在圖 2.50 明顯沒有 damping 的作用，所以式（2.15）可簡化成

$$(I+m\ell^2)\ddot{\theta}-mg\ell\theta=m\ell\ddot{x}\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$(M+m)\ddot{x}-m\ell\ddot{\theta}=u\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

將②式代入①式得

$$\left(I+m\ell^2-\frac{m^2\ell^2}{M+m}\right)\ddot{\theta}=mg\ell\theta+\frac{m\ell}{M+m}u\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

一般人可能會直接令上式的係數相等，但事實上控制系統多是對已存在的系統進行控制（即 M，m，I，ℓ 固定），所以要 normalize ③式只有作參數變化如下：

$$\begin{cases} t=\dfrac{z}{\omega_0} \\ \theta=\theta_0\Theta \end{cases}\quad \omega_0\text{，}\theta_0\text{ 是待決定的常數}$$

並使 $(\ )''=\dfrac{d^2}{dz^2}(\ )$，所以③式變成

$$\left(I + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m} \right) \theta_0 \omega_0^2 \Theta''$$

$$= mg\ell\theta_0\Theta + \frac{m\ell}{M+m} u \cdots\cdots\cdots ④$$

現在令

$$\frac{mg\ell}{\left(I + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m} \right)\omega_0^2} = 1$$

$$\frac{1}{\left(I + m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{M+m} \right)\theta_0\omega_0^2} \times \frac{m\ell}{M+m} = 1$$

則④式可簡化成

$$\Theta'' = \Theta + u \cdots\cdots\cdots ⑤$$

同樣②式可改寫成

$$(M+m)\omega_0^2 x'' = m\ell\theta_0\omega_0^2\Theta' + u \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤式代入⑥式得

$$(M+m)\omega_0^2 x'' = m\ell\theta_0\omega_0^2(\Theta + u) + u$$

$$\frac{(M+m)}{m\ell\theta_0}\frac{d^2x}{dz^2}$$

$$= \Theta + \left(1 + \frac{1}{m\ell\theta_0\omega_0^2} \right) u \cdots\cdots\cdots ⑦$$

現在令

$$y = \frac{(M+m)}{m\ell\theta_0} x$$

$$\alpha = 1 + \frac{1}{m\ell\theta_0\omega_0^2}$$

所以⑦式變成

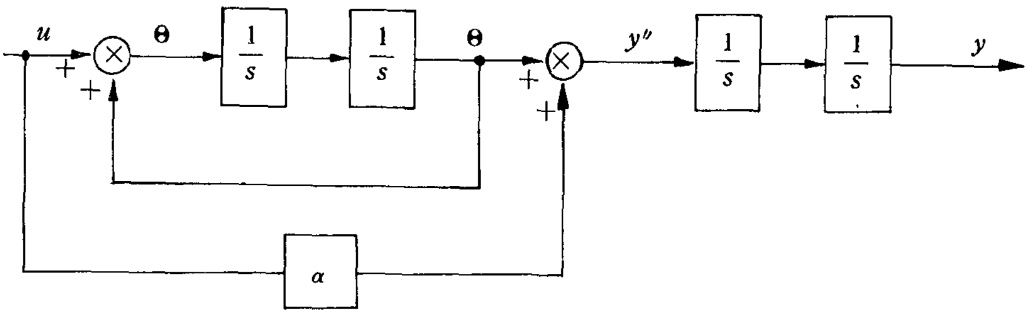
$$y'' = \Theta + \alpha u \cdots\cdots\cdots ⑧$$

由⑤式和⑧式得

$$\Theta'' = \Theta + u$$

$$y'' = \Theta + \alpha u$$

(a)



(b)

$$\frac{y}{u}=\frac{\frac{\alpha}{s^2}\left(1-\frac{1}{s^2}\right)+\frac{1}{s^4}}{1-\frac{1}{s^2}}$$

$$=\frac{\alpha(s^2-1)+1}{s^2(s^2-1)}$$

2.3 利用節點分析來計算指定電路的轉移函數。假設每一電路中為理想運算放大器。對問題(b)與(c)求其極點位置。

(a) 圖 2.51 中前引網路（lead network）。

(b) 圖 2.52 中的沙令-基電路（Sallen-Key circuit）；令 $R=1$，1.9，2.0。

(c) 圖 2.53 中的雙 T（twintee）。

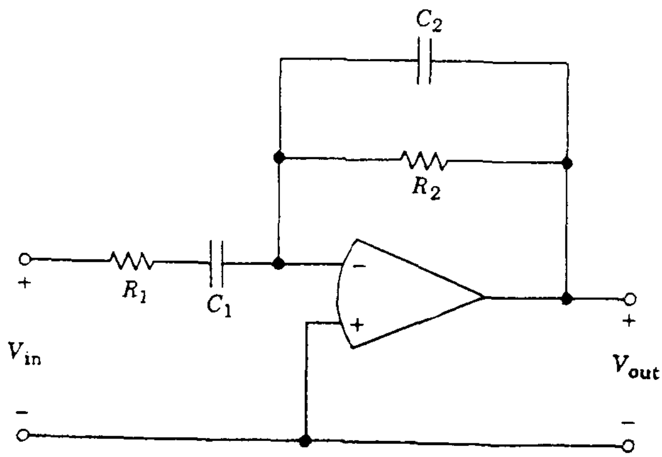


圖 2.51