

怎样解初中数学题

江苏省数学学会科普委员会主编

赵振威 编写

中数学辅助读物

江苏教育出版社

SHUXUE

江苏省数学学会科普委员会 主编

赵 振 威 编写

江苏教育出版社

怎样解初中数学题

赵振威 编写

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行 淮阴新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 3.75 字数 77,000

1984 年 6 月第 1 版 1984 年 6 月第 1 次印刷

印数 1-132,500 册

书号: 13351·026 定价: 0.35 元

责任编辑 何震邦

编 者 的 话

数学在实际生活中的应用是很广泛的。对于一个中学生或任何一个青少年来讲，不管你将来是在哪一个部门里工作，还是进哪一个学校，都必须要有最基本的数学知识，才能作出某些成绩。因此，每一个同学和青少年都应该努力打好数学基础。

学习数学，首先应该掌握一定的数学概念和数学规律，这是学好数学的基础。同时，也要学会把学到的知识用之于实际。如果掌握了知识不会灵活运用，那么，这些知识便只是一堆废物。因此，我们在学习数学时，必须注意理论和实际两个方面，注意领会有关的数学思想，掌握数学思维的方法，从根本上提高分析问题、解决问题的能力。为了达到这样的目的，在正课学习的基础上，适当看一点课外数学读物，以开拓知识领域，扩大视野，启迪智慧，是十分必要的。

基于这样的指导思想，我们组织部分长期从事中学数学教学和研究的专家、教授、中学教师编写了这套初中数学辅助读物。

这套丛书的内容密切结合现行初中课本，注意数学教材中各个方面的联系及应用，采用以点带面、纵横贯通的方法，阐述初中数学里的重要概念、定理和法则，疏通学习中的难点，剖析教材中的重点。书中涉及的数学知识一般不超越初中数学的范围，某些地方虽稍有拓宽加深，但以初中学

生能看懂为原则。文字上力求适合初中学生的年龄特点，做到生动活泼，浅显通俗。

这套丛书第一批编辑出版的有五种：《怎样列方程解应用题》（沈超编写），《三角形的巧合点》（涂世泽编写），《距离与角度》（王永建编写），《怎样解初中数学题》（赵振威编写），《数学命题和证明》（范惠民编写）。以后将根据初中学生和广大青少年学习初中数学知识需要，继续出版。

由于当前初中学生的程度不一，这套书在选题与编写方面都可能存在一些缺点，欢迎各地教学研究部门、中学教师以及广大青少年读者多多提出意见，帮助我们编好这套丛书。

江苏省数学学会科普委员会

一九八三年十一月二十九日

引 言

学习数学，离不开解题。一方面，通过解题练习，有助于牢固掌握数学的基础知识和基本技能，有助于发展思维的灵活性和创造性，从根本上提高分析问题和解决问题的能力。另一方面，解题能力又是衡量数学水平的重要标志，任何数学考试，常常是通过解题来进行的。

本书根据全日制初中数学教学内容，系统地介绍初中数学题的常见类型，解答数学题的基本要求、一般步骤和书写格式，并针对初学者解题中的薄弱环节，有重点地讨论解答数学题的常用思考方法，比较全面地分析提高解题能力的主要途径。

为了便于读者检查自己的解题能力，体会解题的意义和作用，第一部分第一节中的例子均未给出详细解答，各题后面的括号里，提供了本题的答案或提示。有兴趣的读者可以逐一进行解答，如果一时解不出来，也不要着急。当您认真地读完本书的时候，这些问题是不难解出的。

目 录

引言	1
一、初中数学题解题常识	1
§1 初中数学题的常见类型	1
§2 解答数学题的基本要求	17
§3 解答数学题的一般步骤	28
二、解答数学题的常用思考方法	45
§1 枚举寻径	45
§2 特殊探路	49
§3 逆推尝试	52
§4 简化条件	57
§5 辅助设元	60
§6 变更结论	65
§7 待定系数	68
§8 初等变换	69
三、提高解题能力的主要途径	77
§1 探索解题关键	77
§2 总结解题规律	89
§3 研究定理应用	93
§4 分析多题一解	98
§5 思考一题多解	100
§6 考察变化形式	106

一、初中数学题解题常识

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学。它的应用非常广泛,是学习现代科学技术必不可少的基础知识,是人们认识自然,改造自然,和大自然作斗争的重要工具。

解答数学题,是学好数学的重要环节。对照学习内容,有步骤地进行解题练习,有助于深刻理解数学概念,牢固掌握法则、公式、性质等数学规律;有助于提高实际运算能力、空间想象能力、抽象概括能力和逻辑思维能力等数学基本能力,学会运用基本方法的技能和技巧;也有助于发展思维的灵活性和创造性,提高分析问题和解决问题的能力。

这一部分主要介绍解答初中数学题的基础知识,从初中数学题的常见类型入手,比较详细地分析解题的基本要求,解题的一般步骤,以及探索解题方法的基本思想。

§1 初中数学题的常见类型

任何一个数学题,都反映一定的空间形式和数量关系。常见的初中数学题有是非题、选择题、填空题、问答题、改错题、计算题、证明题、讨论题、作图题、应用题等。熟悉各类数学题的特点和作用,对于提高解题能力是很有帮助的。

1. 是非题

是非题又称**判断题**，一般是给出一个判断，要求确定其真假。例如：

例 1 下列说法是否正确，正确的在括号内填“√”，错误的填“×”：

- (1) 有理数包括整数、分数和零。…………… ()
- (2) 整数分为正整数和负整数。…………… ()
- (3) 0 是最小的整数。…………… ()
- (4) 两个数中，绝对值较小的数就是较大的数。… ()
- (5) 如果 a 是实数，那么 $2a$ 是偶数。…………… ()
- (6) 五个连续自然数的平方和必是合数。…………… ()
- (7) 两个连续奇数的积加上 1 一定是一个完全平方数。…………… ()
- (8) 如果 $|a| = a$ ，那么 a 必是正数。…………… ()
- (9) 如果一个数大于它的平方，那么这个数一定是小于 1 的正数。…………… ()
- (10) 无理数是开方开不尽的数。…………… ()
- (11) 10 的整数幂以外的正数的常用对数都是无理数。…………… ()
- (12) 两个无理数的和不一定是无理数。…………… ()
- (13) 任何数的零次幂等于 1。…………… ()
- (14) 如果 $a \neq 0$ ， $b \neq 0$ ，那么 $a + b \neq 0$ 。…………… ()

是非题就其内容来说，大多是关于概念和性质的辨析。

例 1 是一组关于数的概念和性质的是非题，其中(6)、(7)、(9)、(12)是正确的，其余都是错误的。

解答是非题，可以帮助我们澄清一些似是而非的认识，提高利用基础知识进行判断的能力。由于是非题只有真假两

种可能，解答时要细心推敲，周密思考，切莫凭侥幸猜测答案。

2. 选择题

选择题是在每个题目后面提供几个供选择的答案，一般只有一个是正确的或适合的，要求把这个答案选出来。例如：

例2 每小题各选出一个正确的答案，把它的号码填入括号内。

(1) 如果 $yz:zx:xy = 1:2:3$ ，那么 $\frac{x}{yz} : \frac{y}{zx}$ 等于... ()

① 3:2 ② 1:2 ③ 1:4 ④ 2:1 ⑤ 4:1

(2) 如果第一个正方形的一边是第二个正方形的对角线，那么第一个正方形和第二个正方形的面积之比等于... ()

① 2 ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

(3) 如图1， $\widehat{BQ} = 42^\circ$ ， $\widehat{QD} = 38^\circ$ ，则 $\angle P$ 与 $\angle Q$ 的和是... ()

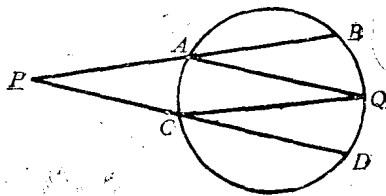


图1

① 80° ② 62° ③ 40° ④ 46° ⑤ 这些都不对

(4) 如果 $x < -2$ ，那么 $|1 - \sqrt{(1+x)^2}|$ 等于... ()

- ① $2+x$ ② $-2-x$ ③ x ④ $-x$ ⑤ -2

(5) 已知 $N = \frac{\sqrt{\sqrt{5+2}} + \sqrt{\sqrt{5-2}}}{\sqrt{\sqrt{5+1}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$,

那么 N 等于 ()

- ① 1 ② $2\sqrt{2}-1$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ⑤ 这些

都不对

(6) 下列命题中正确的是 ()

- ① 如果 $x < 0$, 那么 $x^2 > x$.
 ② 如果 $x^2 > 0$, 那么 $x > 0$.
 ③ 如果 $x^2 > x$, 那么 $x > 0$.
 ④ 如果 $x^2 > x$, 那么 $x < 0$.
 ⑤ 如果 $x < 1$, 那么 $x^2 < x$.

(7) 如图 2, $AF:FC = 1:2$, $BG = GF$, 那么 $BE:EC$ 等于 ()

- ① 1:4 ② 1:3 ③ 2:5 ④ 4:11 ⑤ 3:8

(8) 在单位圆中, 弦 PQ 和 MN 平行于单位圆的半径 OR , 弦 MP 、 PQ 、 NR 都是 s 单位长, 弦 MN 是 d 单位长. 下列三个方程:

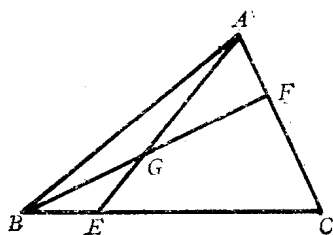


图 2

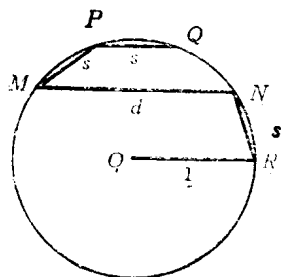


图 3

$$\text{I. } d-s=1; \text{ II. } ds=1; \text{ III. } d^2-s^2=\sqrt{5}$$

中, 正确的是..... ()

①只有 I ②只有 II ③只有 III

④只有 I 和 II ⑤ I, II 和 III

(答案: (1) ⑤; (2) ①; (3) ③; (4) ②; (5) ①;

(6) ①; (7) ②; (8) ⑤.)

选择题的内容比较广泛, 题目的难易程度可以有较大的差别. 例 2 (1)、(2) 通过简单计算或观察图形特征, 即可选出正确答案; 而 (7)、(8) 等题, 则需经过一系列的推证和计算, 才能选得正确答案.

解答选择题, 可以帮助我们提高思维的灵活性, 增强正确、迅速的计算能力. 解题时要做到取之有据, 舍之有理. 如果随意猜测答案, 那就会失去练习的意义.

3. 填空题

填空题一般是给出某些条件, 要求在空白处填上正确的答案. 例如:

例 3 填空:

(1) 适合 $|\omega| < \pi$ 的偶数 ω 有_____.

(2) 一个三位数, 个位上的数字是 a , 十位上的数字是 b , 百位上的数字是个位与十位上的数字之和, 那么这个三位数可表为_____.

(3) 一个正数的平方等于 $3+2\sqrt{2}$, 则这个数的立方等于_____.

(4) 2^{100} 是_____位整数. ($\lg 2 = 0.3010$)

(5) 函数 $y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \lg(5-x)$ 的定义域

是_____.

(6) 凸 n 边形的外角和是_____.

(7) 两个相似三角形的对应高之比为 4:5, 那么这两个三角形的周长之比为_____; 面积之比为_____.

(8) 设 $\lg \theta = \sqrt{2}$, 则 $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta =$ _____.

(答案: (1) $\pm 2, 0$; (2) $101a + 110b$; (3) $7 + 5\sqrt{2}$;

(4) 31; (5) $2 \leq x < 5$, 且 $x \neq 3$; (6) 360° ;

(7) 4:5; 16:25; (8) $-\frac{1}{3}$.)

填空题的结构比较活泼, 一般需要灵活运用数学概念, 经过适当计算才能得解.

解答填空题, 可以帮助我们深刻理解数学概念, 灵活运用数学基础知识.

从例 1 到例 3 可以看出, 解答是非题、选择题、填空题时, 只要求写出合适的结果, 不必写解题过程和理由. 因此, 在解答这几类问题时, 需要更加细心谨慎, 任何微小的疏忽, 都会造成解答的错误.

4. 问答题

问答题一般是提出一个问题, 要求口头或书面回答. 例如:

例 4 回答下列问题:

(1) 零是不是正数? 是不是负数? 是不是偶数? 是不是奇数? 是不是整数? 是不是有理数? 是不是实数?

(2) 有没有最小的有理数? 有没有绝对值最小的有理数? 有没有最小的整数? 有没有最小的正整数? 有没有最大的负整数?

(3) 两个数的和一定大于这两个加数吗? 试举一例说

明。

(4) 举例说明什么叫加法交换律, 什么叫加法结合律?

(5) 如果 $|a| > |b|$, 那么 a 一定大于 b 吗? 什么时候 $a > b$? 什么时候 $a < b$? 会不会 $a = b$? a 会不会等于零呢?

(6) 什么叫做乘方? 举例说明乘方运算中的底数、指数和幂。

(7) 等式和方程有什么区别? 试举两个例子来说明。

(8) 不等式的解和方程的解有何区别?

问答题大多是围绕概念、性质、法则等基本内容展开的, 结构不太复杂, 一般利用学过的基础知识就可回答。

解答问答题, 有助于巩固学得的知识, 提高口头和书面的表达能力。

5. 改错题

改错题一般是给出一个含有错误的数学题解, 要求指出错在什么地方, 并分析产生错误的原因。例如:

例 5 下列各题解得对不对? 如果不对, 错在哪里? 应该怎样改正?

(1) 化简: $3x^2 - [7x - (6x - 8) - x^2]$ 。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \text{原式} &= 3x^2 - 7x - (6x - 8) - x^2 \\ &= 3x^2 - 7x - 6x - 8 - x^2 \\ &= 2x^2 - 13x - 8.\end{aligned}$$

(正确答案: $4x^2 - x - 8$.)

(2) 解方程: $\frac{3x+1}{5} = 1 - \frac{x+3}{5}$ 。

解 去分母, 得

$$3x + 1 = 1 - x - 3,$$

$$\therefore 4x = -3, \quad x = -\frac{3}{4}.$$

(正确答案: $x = \frac{1}{4}$.)

(3) 解方程: $\frac{x}{x-a} = 2 + \frac{a}{x-a}.$

解 去分母, 得

$$x = 2x - 2a + a,$$

$$\therefore x = a.$$

(正确答案: 原方程无解.)

(4) 某工厂第三季度的产值为 331 万元, 已知七月份产值为 100 万元, 求第三季度的月平均增长率.

解 设第三季度的月平均增长率为 x , 则八、九两月增产为 $200x$, 从而可列出方程

$$300 + 200x = 331,$$

$$\therefore x = 0.155 = 15.5\%.$$

答: 第三季度的月平均增长率为 15.5%.

(正确答案: 10%.)

(5) 解不等式: $\lg(x^2 - 1) < 1.$

解 $x^2 - 1 < 10,$

$$\therefore x^2 < 11.$$

则 $-\sqrt{11} < x < \sqrt{11}.$

(正确答案: $1 < x < \sqrt{11}$ 或 $-\sqrt{11} < x < -1$.)

(6) 已知 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 都是无理数, 试证: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 也是无理数.

证明 根据已知条件, $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 都是无理数, 而无理数与无理数的和仍是无理数, 所以 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 也必是无理

数。

(提示: 考虑论据是否正确.)

(7) 试证: 圆内接四边形的对角互补。

证明 如图 4, 矩形 $ABCD$

是圆的内接四边形, 它的四个内角都是直角, 即

$$\begin{aligned}\angle A &= \angle B = \angle C \\ &= \angle D = 90^\circ.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle A + \angle C \\ &= \angle B + \angle D = 180^\circ.\end{aligned}$$

即圆内接四边形对角互补。

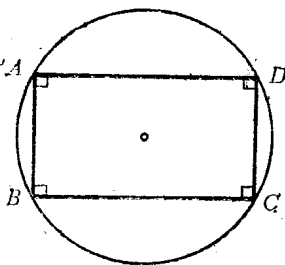


图 4

(提示: 因以特殊代一般, 造成错误.)

(8) 在 $\triangle ABC$ 中, BC 、 CA 边上的中线 AD 与 BE 交于点 I (图 5). 求证: AB 边上的中线也必通过点 I .

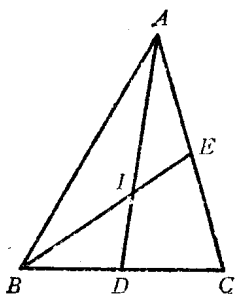


图 5

证明 因为任何三角形的三条中线相交于一点, 而两条已知直线相交时只有一个交点, 所以点 I 就是 $\triangle ABC$ 的重心. 因此, AB 边上的中线也必通过点 I .

(提示: 是否循环论证?)

改错题有时还以诡辩的形式出现。

例如:

例 6 指出下列诡辩中的错误, 并分析产生错误的原因。

(1) $2 = 1$.

证明 设 $a = b$, 则 $a^2 = ab$. 所以

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

即 $(a+b)(a-b) = b(a-b).$

两边同除以 $a-b$, 得 $a+b=b$. 因为 $a=b$, 所以上式就是 $2b=b$. 两边同除以 b , 即得

$$2=1.$$

(提示: 零能不能作除数?)

(2) $n=n+1$. (n 为自然数)

证明 $\because (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$

两边同加 $-(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2$, 整理后得

$$\left[(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1) \right]^2 = \left[n - \frac{1}{2}(2n+1) \right]^2,$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\left[(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1) \right]^2} \\ = \sqrt{\left[n - \frac{1}{2}(2n+1) \right]^2} \end{aligned}$$

即 $(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1) = n - \frac{1}{2}(2n+1).$

$$\therefore n = n+1.$$

(提示: 联系算术根的定义.)

(3) $\frac{1}{64} > \frac{1}{5}.$

证明 依对数性质, 有 $\lg \frac{1}{4} > \lg \frac{1}{5}$. 而 $3 > 1$. 把这两个不等式的两边分别相乘, 得

$$3 \lg \frac{1}{4} > \lg \frac{1}{5}.$$