

地震的 数学力学模型 及解析解

范家参 侯明明 李向阳著

云南大学出版社

本书受云南省教育厅高校学术著作基金资助出版

地震的数学力学模型及解析解

范家参 侯明明 李向阳 著

云南大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

地震的数学力学模型及解析解/范家参, 侯明明, 李向阳著.
- 昆明: 云南大学出版社, 2003
ISBN 7-81068-681-X
I. 地... II. ①范... ②侯... ③李... III. 地震学:
力学-数学模型 IV. P315.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 120027 号

书 名: 地震的数学力学模型及解析解

著 者: 范家参 侯明明 李向阳

责任编辑: 万 鹏

封面设计: 丁群亚

出版发行: 云南大学出版社

网 址: <http://www.ynup.com>

E-mail: service @ ynup.com

社 址: 云南省昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内 (邮编: 650091)

电 话: 发行部 (0871) 5033244

印 装: 云南国浩印刷有限公司

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 8.5

字 数: 208 千字

版 次: 2004 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

印 数: 001 - 500

书 号: ISBN 7-81068-681-X/P·14

定 价: 20.00 元

目 录

第一章 固体力学和地震 (代前言)	(1)
第二章 预备知识	(6)
第一节 三种典型破裂	(8)
一、I 型 (张开型) 破裂	(8)
二、II 型 (滑开型) 破裂	(14)
三、III 型 (撕开型) 破裂	(14)
第二节 一种平面应变理想塑性体 Mises 屈服条件的精确解	(15)
第三节 偏微分方程的分类及其解的定义域	(20)
第三章 构造地震的孕震阶段和水库气爆地震	(32)
第一节 孕震阶段的受力分析——某种弹塑性断裂静力学控制方程的解	(32)
第二节 弹性断裂静力学和动力学中裂缝端点应力分量奇异性的探讨	(34)
第三节 论地震破裂过程中不可能存在塑性变形	(36)
第四节 孕震阶段地震波波速比异常的理论证明	(42)
第五节 水库地震气爆成因初探——以乌江渡水库地震为例	(49)
第四章 断裂动力学的解析解及其在构造地震中造成的强震地面运动	(56)
第一节 粘弹性拉张型 (I 型) 地震破裂过程的解析解	(56)
第二节 II 型弹性破裂过程的解析解	(64)
第三节 II 型粘弹性破裂过程的解析解	(74)
第四节 非线性化的 II 型弹性破裂过程的解析解	(80)
第五节 Voigt 型二元件粘弹性介质 III 型破裂的解析解	(85)
第六节 三元件标准线性粘弹性固体 III 型破裂的解析解	(89)
第七节 Rayleigh 阻尼非线性化的弹性介质 III 型断裂动力学的解析解	(97)
第八节 几何非线性弹性介质 III 型断裂动力学的解析解	(100)
第九节 两条相交断层间地壳垂直地震的解析解	(103)
第十节 用断裂动力学研究强震地面运动	(110)
第五章 内含矩形片状裂缝的三维断裂动力学的解析解——未穿透地壳的隐藏断层的 地震破裂	(116)
第一节 非线性 Rayleigh 阻尼作用时弱非线性问题的解析解	(116)
第二节 非线性 Rayleigh 阻尼作用时强非线性问题的解析解	(123)
第三节 几何非线性问题的解析解	(126)
结束语	(131)

第一章 固体力学和地震 (代前言)

科学技术是第一生产力, 它的应用必然会产生巨大的经济效益和社会效益. 当前, 各种新技术、新材料和新工艺的大量引进及推广应用已是大家所热心和熟知的事. 但根据笔者多年从事固体力学和地震工程理论研究工作的心得, 有相当一部分比较严密的研究成果还没有在工程实践中得到应用. 这些由一大堆数学公式表达的理论成果, 如何应用到工程实践中, 是一个有一定难度的研究课题. 本书将就此谈一些初浅体会, 主要是讨论在构造地震临震前的孕震阶段地壳中发震断层端部因应力集中而进入塑性变形, 以及由此造成的地震波波速比异常. 这两个问题是我们将要尝试解决的. 在孕震阶段, 一旦塑性变形越过断裂韧性, 失稳破裂突然发生, 将形成为害最烈的构造地震. 对此, 我们将用断裂动力学的研究成果来研究构造地震的强震地面运动, 它是研究一切结构抗震设计的根据和基础资料. 此外, 我们还得出了弹性体内含矩形片状裂缝这个三维断裂动力学的解析解. 除构造地震之外, 我们还研究了水库地震气爆成因. 这些成果都是我们多年研究工作的结晶, 特写成此书供大家参考指正.

1. 非线性 Rayleigh 阻尼是最好的阻尼公式

在地震工程中, 最简单的力学模型是一个自由度的单质点弹性体系. 其地面产生水平加速度 $\ddot{u}_g$ 而得出的控制方程是 (参见参考文献[1])

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_g. \quad (1.1)$$

方程 (1.1) 的解就是大家熟知的 Duhamel 积分

$$u(t) = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

在 (1.1) 和 (1.2) 式中, u 是单质点的水平振幅, ξ 是阻尼比, ω 是体系自振圆频率, $\omega_D = \sqrt{1-\xi^2}\omega$, t 是时间自变量.

(1.1) 式中的阻尼项 $2\xi\omega\dot{u}$ 就是线性粘滞性阻尼, 它与单质点的运动速度 $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ 成正比, 其结果是在 (1.2) 式中出现衰减项 $e^{-\xi\omega(t-\tau)}$ 项, 即运动受地面水平地震产生的加速度激发而使单质点的运动只有衰减而无加剧. 这显然不符合强震地面运动激发的结构动力响应规律.

另一种在地震工程中常用的复阻尼公式是 (参见参考文献[2])

$$\sigma_{ik} = \frac{2\mu}{1 + \frac{i}{\omega\tau}} u_{ik}. \quad (1.3)$$

在 (1.3) 式中, σ_{ik} 是应力分量, u_{ik} 是应变分量, μ 是弹性系数, $i = \sqrt{-1}$, τ 为应力松弛所需时间. (1.3) 式假定 σ_{ik} 和 u_{ik} 都依赖于时间因子 $e^{-i\omega\tau}$ 产生衰减的周期运动: 当 $\omega\tau \gg 1$ 时, 有 $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$ 为弹性固体的胡克定律, 而当 $\omega\tau \ll 1$ 时, 有 $\sigma_{ik} = -$

$2i\mu\tau\omega u_{ik} = 2\mu\tau\dot{u}_{ik}$, 而适用于粘滞率为 $\mu\tau$ 的牛顿流体. 总之, 复阻尼公式是随时间衰减的简谐运动所表达的阻尼公式, 不适宜引进到地震工程的研究中.

众所周知, 强震地面运动及其激发的结构动力响应是随机性很强且杂乱无章的, 绝不会是有规律的周期性的简谐运动. 地壳中发震断层因其端部能量积累达到断裂韧性而突然失稳破裂产生的构造地震, 会因能量突然释放而使地面运动加速. 但由于断层两侧产生的外摩擦和地壳内部分子之间产生的内摩擦, 将使地面运动达到最高速度后开始衰减, 直到运动停止. 一次强震产生的地面运动虽然只有几秒到二十几秒的短暂过程, 却包括了低速运动的初始阶段、有激发而加速、到最大速度后开始衰减直至运动停止的复杂过程. 因此, 只有引进非线性 Rayleigh 阻尼 (参见参考文献[3]) 才能完整地表达这一运动过程. 我们仍以一个自由度的单质点弹性体系为例, 此时控制方程为

$$\ddot{u} + (-A + B\dot{u}^2)\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_g. \quad (1.4)$$

在 (1.4) 式中, A 和 B 是两个正的常数. (1.4) 式是一个二阶常系数非线性常微分方程, 求其解析解要比 (1.1) 式困难些, 但其解析解能全面而完整地反映包括激发和衰减过程的强震地面运动和结构动力响应的规律, 这是其他线性阻尼所反映不了的 (本书第一作者从 1982 年开始采用 Rayleigh 阻尼研究 II 型断裂动力学的解析解, 并在以后结合 I 型和 II 型破裂研究水平强震地面运动和用 III 型破裂研究垂直地面运动, 得出了与实际强震地面运动记录相吻合的结果 (参见参考文献[5])).

2. 用断裂动力学研究构造地震产生的强震地面运动

强烈地震产生的地面运动是地面上结构物抗震设计的基础资料和依据, 因此政府颁布的各地地震烈度区划就成了建筑结构抗震设计和加固的法律依据. 世界各国几乎都有自己制定的地震烈度区划表. 到目前为止, 世界各国的地震烈度区划工作大致经过了“三代”: 1874 年意大利地震学家 M.S.de Rossi 以及 1881 年瑞土地震学家 F.A.Forel 不谋而合地制定了一种定性描述的十度烈度标准 (我国第一代地震烈度区划就是依此来制定的), 这可视为第一代的地震烈度区划工作; 第二代的地震烈度区划则以地面运动的水平加速度的大小来作为区划的标准 (参见参考文献[6]); 我国在 20 世纪 80 年代制定的第三代地震烈度区划标准, 则是用建筑结构 50 年或 20 年或其使用寿命的若干年限内, 发生最大地震时受到破坏的概率不超过一定的比例制定的 (例如不超过 5%), 对重要性不同的建筑结构规定了不同的超越概率, 这就是现行烈度区划方法. 但是, 概率统计是人们在还没有确切掌握事物的发展规律以前, 根据记录下来的看似带有偶然性的实际数据, 推演事物的发展规律的数学方法. 例如, 推算出某地发生 50 年一遇的地震时, 水平地面运动加速度为 250cm/s^2 , 从而将该地定为地震烈度 8 度区. 但此地面水平加速度也许在第二年该地又发生地震时被超过, 也或许在其后 50 年内该地都不发生地震, 从而为 8 度区抗震设计造成不足或造成浪费. 其实, 世间万事万物的发生有其偶然性更有其确定性, 只是在人们还没有掌握事物发生的内在因素和外部条件以前, 只能看到它们发生的偶然性. 因此, 基于概率统计方法而制定的第三代地震烈度区划已不能完全满足社会发展的需要, 人们正在努力寻找确定性地制定第四代地震烈度的方法.

因地壳中发震断层的端部应力集中而积累了巨大能量, 当它超过地壳的断裂韧性而突然失稳破裂所产生的构造地震是最危险的一种地震. 对此, 参考文献[7]中写道: “地

震力理论中基于发震断力学作用的地震力理论还只是初步设想”。其实，早在 1978 年，著名的断裂力学专家、丁积分的创始人 J.R.Rice 就已经提出用断裂动力学研究强震地面运动的想法（参见参考文献[8]），但其专著只举出了各种适用公式而没有给出问题的解。其后的研究工作是使用 Fourier 变换加上 Laplace 变换求问题控制方程（组）的解析解，但在求解的最后一步，要求 Laplace 逆变换求围道积分时，无法得出此积分的表达式，只能用数值积分法求解（参见参考文献[9]、[10]），故未能得出解析解的最后结果。但是，这两项成果均假定断层破裂速度不变，显然不符合实际情况，应采用在初期有激发和在后期有衰减的变速度的断层破裂速度公式，结合非线性 Rayleigh 阻尼来描述断裂过程的运动，用于断裂动力学的控制方程（组），求出其解析解，从而用于研究强震地面运动，这就是我们试图制定确定性的第四代地震烈度区划的研究工作。一般来说，I 型和 II 型破裂用于研究水平强震地面运动，III 型破裂用于研究垂直强震地面运动。在地面运动不太剧烈，断层端部的快速扩张没有出现分岔时，则可采用小参数摄动法使非线性控制方程（组）变成一系列的线性化渐近控制方程（组），代入适合所有边界条件的振型函数入渐近控制方程（组），用 Fourier 级数的运算化为一个标准 Mathieu 方程，最后用 WKB 方法得出在稳定区域的解析解（此解有惟一性）。在笔者相关著作（参见参考文献[5]）中，笔者结合 I、II 两型破裂得出了水平强震地面运动的解析解，并用 III 型破裂得出了垂直强震地面运动的解析解，所得的表达式代入确定的参数后，绘成地面运动的位移、速度和加速度曲线，与实地记录的强震地面运动曲线相比较，二者十分近似。故我们的结果是可信的，符合“实践是检验真理的惟一标准”。

在地震十分剧烈时的地面运动中，断层端部在快速扩张时有分岔出现，即端部由一枝扩张变为两枝扩张，这种情况在问题的解析解中必须在同一瞬间出现两个值（即多值性存在）。多值性的解只存在于非线性的微分方程中。这时用小参数展开法使构成控制方程（组）线性化的办法已经不适用了，因为线性化的渐近控制方程（组）的解有惟一性，而非线性的微分方程甚至代数方程则在其解中有多值性，最简单的二次代数方程有两个根（可以相同也可相异）。因此，我们在著作（参见参考文献[11]）中对 III 型破裂非线性化，而是直接将适合边界条件的振型函数代入控制方程，用 Fourier 级数的运算把非线性偏微分方程约化为一无穷组的二阶非线性常微分方程组，用逐次逼近法每次只求解一个未知函数，把问题的求解化为一个以时间为自变量的未知振幅函数的 van der pol 方程，得出它的头两次渐近解，并讨论了解的多值性问题。对 II 型破裂的非线性解也已经完成并写在本书中，后面这部分非线性化的解适用于地震烈度在 8 度以上和震级在 7 级以上的极震区。

由于强震地面运动使地壳的分子间发生剧烈运动产生的内摩擦对地震波的传播有显著效应，只考虑介质的弹性而忽略内摩擦产生的粘滞性是不够的（参见参考文献[12]），因此我们把地壳介质当作两元件的 Voigt 粘弹性体（参见参考文献[13]、[14]）。为克服 Voigt 体的不足，我们还把地壳介质当作三元件的标准线性粘弹性固体得出 III 型破裂问题的解析解，放在本书第四章第七节里。

把断裂动力学研究成果用于制定第四代的地震烈度区划，需在全国主要活动断层端部附近安置可监测记录其应变的仪器，在发震前的孕震阶段，从记录到应变发现已超过

弹性阶段进入塑性应变, 我们已提出一种方法计算这个弹塑性断裂静力学的解析方法 (参见参考文献[15]). 当记录到的应变显示发震断层端部的能量积累已达到断裂韧性时, 便是地震爆发之时, 可根据记录的应变值加上计算的结果, 准确地预报发震的地点、时间、震级大小三要素, 还可以算出发震后地面的振幅、速度和加速度, 用于结构抗震设计的依据.

3. 讨论

(1) 当地震烈度每增加一度时, 因加强对建筑结构的抗震设防要使建筑费用增加 15%. 因此, 如果把一个地区的地震烈度定得过高, 将浪费巨大的财富及资源. 反之, 如果把地震烈度定得过低, 一旦地震发生, 将给人民的生命和财产造成巨大的损失. 现在, 当某地或某区域发生一次强震以后, 原来所定的该地的地震烈度几乎都要重新修订一次, 因为现行地震烈度区划已不够准确. 例如昆明市区原定为地震烈度 7 度区, 但近来因邻近的禄劝、丽江等地先后发生了强烈地震, 于是便把昆明市区改为 8 度区.

(2) 通行的地震波传播理论是假定波在各向同性介质中传播. 虽然岩石是各向异性体, 大范围内地球是垂直或辐射分层, 其弹性性质和密度随深度变化, 但是地震波长比这些各向异性的特征长度大, 这就产生了平均效应而为各向同性均匀介质 (参见参考文献[16]).

参考文献

- [1] 胡聿贤, 地震工程学, 地震出版社, 北京, (1988), P219 ~ 222
- [2] 朗道等, 连续介质力学, 第三册, 彭旭麟译, 人民教育出版社, 北京, (1962), P844 ~ 846
- [3] A.H.Nayfeh, Introduction to Perturbation Techniques, John Wiley & Sons, New York, (1981), P147 ~ 148
- [4] 范家参等, 有激发和衰减的有限长裂纹 II 型破裂过程的研究, 应用数学和力学, 第三卷, 第五期, (1982), P689 ~ 705
- [5] 范家参等, 强震地面运动的解析解, 地震研究, 第十九卷, 第一期, (1996), P95 ~ 118
- [6] 中国科学院地球物理研究所, 地震学基础, 科学出版社, 北京, (1977), P24 ~ 38
- [7] 王前信等, 工程结构地震力理论, 地震出版社, 北京, (1979), P160 ~ 162
- [8] James R.Rice, The Mechanics of Earthquake Rupture, National Science Foundation Geophysics Programme Grant EAR 78 - 12948 and U.S.Department of Interior U.S.Geological Survey Contract 14 - 08 - 0001 - 17664 Mod.1 Report No.18, (1978)
- [9] K.S.Kim, Dynamic Propagation of a Finite Crack, Int 'l J.Solids & Structures, Vol.15, No.9, (1979)
- [10] 陆远忠等, 地震破裂过程的研究, 地球物理学报, 第二十三卷, 第二期, (1980)
- [11] 范家参, 非线性阻尼作用时 III 型断裂动力学的解析解, 工程力学, 第十四卷, 第 2 期, (1997)

- [12] N.H. 瑞克, 粘弹性介质中的地震波, 许云译, 地质出版社, 北京, (1981), P1 ~ 26
- [13] Fan Jiashen, Viscoelastic Asymptotic Solutions of Rupture Process Including Excitation and Attenuation for a Dip-Slip Fault, Proc. Int 'l Workshop on Earthquake Engineering, Tongji University, (1984), Vol.1, A - 9
- [14] 范家参, 包括激发和衰减的粘弹性 II 型破裂过程研究, 应用数学和力学, 第七卷, 第八期, (1986)
- [15] Fan Jiashen, The Analytical Solution of a Certain Elastic-Plastic Fracture Equation, Computational Plasticity, Pineridge Press, Swansea, U.K., (1987), P1171 ~ 1176
- [16] W.L.Pilant, Elastic Waves in the Earth, Developments in Solid Earth Geophysics 11, Elsevier Science Publishers Ltd., London, (1979)

第二章 预备知识

三种典型破裂中的Ⅰ型和Ⅱ型破裂都是平面问题中的平面应变问题, 若为平面应力问题, 则只要把前者的杨氏弹性系数 E 变为 $(1 - \mu^2)E$ (其中 μ 为泊松比), μ 变为 $\mu(1 - \mu)$ 即可. 因为平面问题的控制方程都是艾雷应力函数 ϕ 的双调和方程

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad \left(\text{其中 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad (2.1)$$

只是 (2.1) 式在Ⅰ型和Ⅱ型破裂中分别有不同的边界条件. Ⅲ型破裂的控制方程是

$$\nabla^2 W = 0. \quad (2.2)$$

在 (2.2) 式中, W 是 z 方向的位移.

因此由 Fourier 变换求解 (2.1) 式和 (2.2) 式是一种有效的方法, 对此简述如下: 按照导数的 Fourier 变换定理, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \phi e^{i\xi x} dx = \left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \phi e^{i\xi x} dx = \left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2 \right) \bar{\phi}, \quad (2.3)$$

$$\bar{\phi}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) e^{i\xi x} dx. \quad (2.4)$$

经 Fourier 变换后, (2.1) 式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \nabla^2 \phi e^{i\xi x} dx = \left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2 \right)^2 \bar{\phi} = 0. \quad (2.5)$$

于是像函数 $\bar{\phi}$ 所定义的 (2.5) 式这个四阶常微分方程的解为

$$\bar{\phi}(\xi, y) = [A(\xi) + B(\xi)y] e^{-|\xi|y} + [c(\xi) + D(\xi)y] e^{|\xi|y}, \quad (2.6)$$

下面得应力分量和位移分量的像函数式

$$\bar{\sigma}_{xx}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xx}(x, y) e^{i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} e^{i\xi x} dx = \bar{\phi}''_y(\xi, y), \quad (2.7)$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(x, y) e^{i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} e^{i\xi x} dx = -\xi^2 \bar{\phi}(\xi, y), \quad (2.8)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(x, y) e^{i\xi x} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} e^{i\xi x} dx = i\xi \bar{\phi}'_y(\xi, y). \quad (2.9)$$

在以上三式中, $\bar{\phi}''_y(\xi, y) = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2}$, $\bar{\phi}'_y(\xi, y) = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}$.

由平面应变的胡克定律有

$$\frac{E}{1 + \mu} \frac{\partial u}{\partial x} = (1 - \mu) \sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}. \quad (2.10)$$

对 (2.10) 式进行 Fourier 变换后, 应用 (2.7) 及 (2.8) 式, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\xi x} dx = \frac{1 + \mu}{E} [(1 - \mu) \bar{\phi}''_y + \mu \xi^2 \bar{\phi}].$$

将导数的 Fourier 变换定理用于这里,得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\xi x} dx = -i\xi \bar{u}(\xi, y),$$

$$\bar{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\xi x} dx.$$

即得出

$$\bar{u}(\xi, y) = \frac{i}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\xi x} dx = \frac{i(1+\mu)}{\xi E} [(1-\mu)\bar{\phi}''_y + \mu\xi^2\bar{\phi}]. \quad (2.11)$$

再由另一胡克定律,得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

经过相同的步骤运算可得

$$\bar{v}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y) e^{i\xi x} dx = \frac{1+\mu}{\xi^2 E} [(1-\mu)\bar{\phi}'''_y - (2-\mu)\xi^2\bar{\phi}'_y]. \quad (2.12)$$

从(2.10)到(2.12)各式中, u 和 v 分别是 x 和 y 方向上的位移, $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 分别是 u 和 v 的 Fourier 变换式, 即像函数.

在推导 Airy 应力函数、各应力分量和各位移分量的像函数时, 都假定当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, 各函数值均为零.

由 Fourier 变换的逆变换公式可得

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (2.13)$$

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}''_y(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \bar{\phi}(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (2.15)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \bar{\phi}_y(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (2.16)$$

$$u(x, y) = \frac{i(1+\mu)}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} [(1-\mu)\bar{\phi}''_y(\xi, y) + \mu\xi^2\bar{\phi}(\xi, y)] e^{-i\xi x} d\xi, \quad (2.17)$$

$$v(x, y) = \frac{1+\mu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} [(1-\mu)\bar{\phi}'''_y(\xi, y) - (2-\mu)\xi^2\bar{\phi}'_y(\xi, y)] \frac{d\xi}{\xi^2}. \quad (2.18)$$

于是, 由(2.6)式求出 $\bar{\phi}(\xi, y)$ 后, 代入(2.13)至(2.18)各式, 各应力分量及位移分量便可求出. 在(2.6)式的 $A(\xi)$ 、 $B(\xi)$ 、 $C(\xi)$ 、 $D(\xi)$, 由(2.5)式可知, 它们对 x 和 y 而言是常数, 其值由边界条件决定.

现在给出导数的 Fourier 变换定理. 设函数 $f(x)$ 及其各阶导数满足绝对可积条件, 即当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 、 $f'(x)$ 、 $\cdots$ 、 $f^{(n)}(x)$ 都趋于零. 按定义, $f'(x)$ 的 Fourier 变换是

$$\bar{f}'(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\alpha x} dx. \quad (2.19)$$

用分部积分法, 并利用条件当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(\infty) \rightarrow 0$, 得

$$\begin{aligned}
 \bar{f}'(\alpha) &= f(x)e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx \\
 &= -i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx \\
 &= -i\alpha \bar{f}(\alpha)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

同样, 可以证明

$$\begin{aligned}
 \bar{f}''(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)e^{i\alpha x} dx \\
 &= f'(x)e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\alpha x} dx \\
 &= (-i\alpha)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx \\
 &= (i\alpha)^2 \bar{f}(\alpha) \\
 &= -\alpha^2 \bar{f}(\alpha)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

以此类推, 可得导数的一般 Fourier 变换的表达式为

$$\bar{f}^{(n)}(\alpha) = (-i\alpha)^n \bar{f}(\alpha). \tag{2.21}$$

(2.21) 式就是导数 Fourier 变换的通用公式, 它适用于 $n = 1, 2, 3, \dots, N$ 等阶导数的 Fourier 变换.

第一节 三种典型破裂

一、I 型(张开型) 破裂

如图 2-1 所示, 在板的中央有一长为 $2a$ 的穿透板厚的直线状裂纹, 在板的两端作用着外加拉应力 $p(x)$.

由于此问题具有明显的对称性, 因此仅研究 $y > 0$ 的半平面即可. 这个问题可以利用线性迭加原理, 分成两个问题处理(设 p 为常数):

(甲) 无裂纹的板, 其端部作用着常量拉应力 P , 这时物体力应力分布是熟知的, 它是

$$\sigma_{yy} = P, \sigma_{xy} = \sigma_{xx} = 0. \tag{2.22}$$

(乙) 有裂纹的板, 其端部自由, 在裂纹表面上即在 $y = 0, |x| \leq a$ 处作用着常数压应力 $\sigma_{yy} = -P, \sigma_{xy} = 0$, 如图 2-2 所示.

这两个问题的迭加, 就合成图 2-1 所示的 I 型破裂. 问题(甲)的解已知, 即 (2.22) 式, 问题(乙)的解将在下面给出来.

考虑裂缝的尺寸较板的两个方向的尺寸小得多, 因而近似地认为板是无限大的. 问题(乙)的边界条件如下:

在 $y = 0, |x| \leq a$ 处, 有

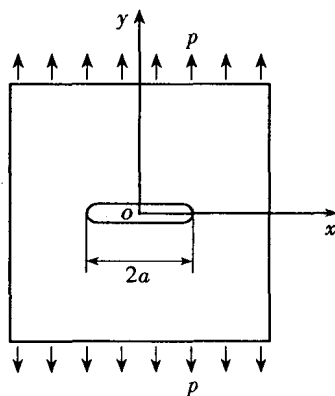


图 2-1 I 型破裂示意图

$$\sigma_{yy} = -P, \sigma_{xy} = 0. \quad (2.22)$$

在 $y=0$; $|x| > a$ 处, 有

$$\sigma_{xy} = 0, v = 0. \quad (2.23)$$

在 $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ 处, 有

$$\sigma_{xx} \rightarrow 0, \sigma_{xy} \rightarrow 0, \sigma_{yy} \rightarrow 0. \quad (2.24)$$

I 型破裂中问题 (乙) 的像函数解仍是 (2.6) 式, 但考虑到边界条件 (2.24), 则 (2.6) 式中的两个常数应有 $C(\xi) = D(\xi) = 0$. 此时 (2.6) 式化为

$$\bar{\phi}(\xi, y) = (A + B\gamma)e^{-|\xi|y}. \quad (2.25)$$

于是 (2.14) 式至 (2.18) 式简化为

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\xi)\xi^2 + B(\xi)|\xi|(-2 + |\xi|y)e^{-i\xi x - |\xi|y}] d\xi \quad (2.26)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 [A(\xi) + B(\xi)\gamma] e^{-i\xi x - |\xi|y} d\xi \quad (2.27)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi [-A(\xi)|\xi| + B(\xi)(1 - |\xi|y)e^{-i\xi x - |\xi|y}] d\xi \quad (2.28)$$

$$u(x, y) = \frac{i(1+\mu)}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A(\xi)\xi + B(\xi) \frac{\xi}{|\xi|} [-2(1-\mu) + |\xi|y] \right\} e^{-i\xi x - |\xi|y} d\xi \quad (2.29)$$

$$v(x, y) = \frac{1+\mu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A(\xi)|\xi| + B(\xi)[(1-2\mu) + |\xi|y] \right\} e^{-i\xi x - |\xi|y} d\xi \quad (2.30)$$

由 (2.26) 式至 (2.30) 式得出的应力分量和位移分量已满足控制方程 (2.1) 式和无穷远处的边界条件 (2.24) 式, 但 $A(\xi)$ 和 $B(\xi)$ 的值将由 $y=0$, 即裂纹的边界条件来确定.

令 (2.27)、(2.28)、(2.30) 三式中的 $y=0$, 然后代入边界条件 (2.22) 和 (2.23) 两式, 得

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 A(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = 2\pi P, & |x| \leq a, \\ \int_{-\infty}^{\infty} [|\xi|A(\xi) + (1-2\mu)B(\xi)] e^{-i\xi x} d\xi = 0, & |x| > a, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \xi [-|\xi|A(\xi) + B(\xi)] e^{-i\xi x} d\xi = 0, & |x| \leq a, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \xi [-|\xi|A(\xi) + B(\xi)] e^{-i\xi x} d\xi = 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (2.31)$$

由 (2.31) 的最后两式, 可知

$$-|\xi|A(\xi) + B(\xi) = 0$$

所以

$$B(\xi) = |\xi|A(\xi). \quad (2.32)$$

将 (2.32) 式代入 (2.31) 的前两式, 得

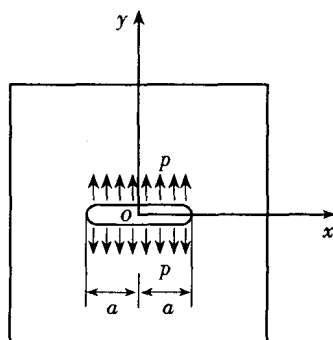


图 2-2 迭加原理的第二部分

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 A(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = P, & |x| \leq a, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \xi |A(\xi)| e^{-i\xi x} d\xi = 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (2.33)$$

(2.33)式是决定 $A(\xi)$ 的对偶积分方程. 因 I 型破裂的对称性, 可以假定 $A(\xi)$ 是偶函数, 于是 $\xi^2 A(\xi)$ 和 $|\xi| A(\xi)$ 都是偶函数, 故 (2.33) 式可以写成余弦 Fourier 变换的形式, 即以 $\overline{F}_c(\xi)$ 表示函数 $F(x)$ 的余弦变换

$$\overline{F}_c(\xi) = \xi^2 A(\xi) = \int_0^{\infty} F(x) \cos \xi x dx.$$

则逆变换公式是

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{F}_c(\xi) \cos \xi x d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 A(\xi) \cos \xi x d\xi.$$

同理, 可有

$$\overline{G}_c(\xi) = \xi A(\xi) = \int_0^{\infty} G(x) \cos \xi x dx.$$

则有

$$G(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{G}_c(\xi) \cos \xi x d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \xi A(\xi) \cos \xi x d\xi.$$

于是 (2.33) 式可写成

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 A(\xi) \cos \xi x d\xi = P, & |x| \leq a, \\ \int_0^{\infty} \xi A(\xi) \cos \xi x d\xi = 0, & |x| > a, \\ \cos \xi x = \left(\frac{\pi \xi x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\xi x). \end{cases} \quad (2.34)$$

若令

$$\xi^{\frac{3}{2}} A(\xi) = f(\xi) = f(\eta), \quad \eta = a\xi, \quad \rho = \frac{x}{a}, \quad g(\rho) = a \left(\frac{\pi a}{2\rho} \right)^{\frac{1}{2}} P, \quad (2.35)$$

则 (2.34) 式的对偶积分方程化为

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \eta f(\eta) J_{-\frac{1}{2}}(\eta \rho) d\eta = g(\rho), & 0 \leq \rho \leq 1, \\ \int_0^{\infty} f(\eta) J_{-\frac{1}{2}}(\eta \rho) d\eta = 0, & \rho > 1. \end{cases} \quad (2.36)$$

方程 (2.36) 的解由 Sneddon 和 Elliot 给出^[2] (此解的求法已在相关文献^[1] 给出, 本书不再重复), (2.36) 式中的 $J_{-\frac{1}{2}}(\eta \rho)$ 是 $-\frac{1}{2}$ 阶的 Bessel 函数. (2.36) 式的解是

$$f(\eta) = \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}} \pi P^{-\frac{1}{2}} J_1(\eta). \quad (2.37)$$

在 (2.34) 式, $J_1(\eta)$ 是 1 阶 Bessel 函数. 由 (2.35) 和 (2.37) 两式, 得

$$A(\xi) = \frac{\pi a P}{2} \xi^{-2} J_1(a\xi). \quad (2.38)$$

于是

$$B(\xi) = \frac{\pi a P}{2} \xi^{-1} J_1(a\xi). \quad (2.39)$$

把得到的 $A(\xi)$ 及 $B(\xi)$ 的表达式(2.38)和(2.39)两式代入应力与位移分量的表达式(2.26)至(2.30)各式, I 型断裂的问题就解决了. 因为已得问题(乙)的解, 再迭加问题(甲)的已知解, 就是 I 型断裂的解.

取复数自变量 $z = x + iy$, 由 Bassel 函数的积分公式(见参考文献[1]附录三), 得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi e^{i\xi z} J_1(a\xi) d\xi &= a[a^2 + (iz)^2]^{-\frac{3}{2}} \\ &= ia(r_1 r_2)^{-\frac{3}{2}} e^{-3i(\theta_1 + \theta_2)/2}, \\ \int_0^\infty e^{i\xi z} J_1(a\xi) d\xi &= \frac{1}{a} - \frac{iz}{a}[a^2 + (iz)^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{a}[1 - re^{i\theta}(r_1 r_2)^{-\frac{1}{2}} e^{-i(\theta_1 + \theta_2)/2}]. \end{aligned}$$

以上两式中的 r_1 、 r_2 和 θ_1 、 θ_2 如图 2-3 所示.

故有

$$\frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + i\sigma_{xy} = -p \frac{r}{a} \left(\frac{a^2}{r_1 r_2} \right)^{\frac{3}{2}} i \sin\theta e^{-3i(\theta_1 + \theta_2)/2}, \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -pa \operatorname{Re} \frac{1}{a} [1 - re^{i\theta}(r_1 r_2)^{-\frac{1}{2}} e^{-i(\theta_1 + \theta_2)/2}]. \quad (2.41)$$

(2.40) 和 (2.41) 两式是问题(乙)的应力分量初等函数的表达式, Re 是函数的实数部分. 分开这两式的实部和虚部, 再迭加问题(甲)的均匀应力场 $\sigma_{yy} = P$, $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$, 最后得到 I 型断裂的应力分量的初等函数表达式

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -P \frac{r}{a} \left(\frac{a^2}{r_1 r_2} \right)^{\frac{3}{2}} \sin\theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) - P \left[1 - \frac{r}{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} \cos\left(\theta - \frac{1}{2}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2\right) \right], \\ \sigma_{yy} = P \frac{r}{a} \left(\frac{a^2}{r_1 r_2} \right)^{\frac{3}{2}} \sin\theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + P \frac{r}{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} \cos\left(\theta - \frac{1}{2}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2\right), \\ \sigma_{xy} = P \frac{r}{a} \left(\frac{a^2}{r_1 r_2} \right)^{\frac{3}{2}} \sin\theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2). \end{cases} \quad (2.42)$$

在裂纹端点附近, 由(2.42)第二式可知, 当 $y=0$ 时, 有

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| \leq a, \\ \frac{px}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}, & |x| > a. \end{cases} \quad (2.43)$$

在裂纹端点附近, 即 $y=0$, $x=a+\delta$, $\delta \ll a$, 则有

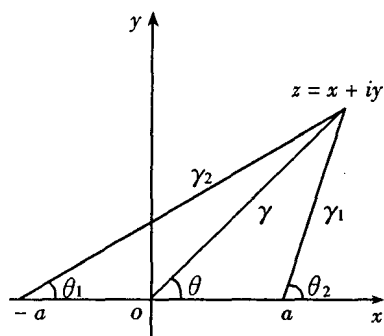


图 2-3 复平面上裂纹的直角和极坐标

$$\sigma_{yy} \propto \frac{1}{\sqrt{\delta}}. \quad (2.44)$$

由于 δ 很小, 在裂纹端点附近 σ_{yy} 很大, 当 $\sigma \rightarrow 0$ 时 $\sigma_{yy} \rightarrow \infty$, 故应力分量有 $\sigma^{-\frac{1}{2}}$ 阶的奇异性, 这是弹性断裂静力学中的一个重要性质. 事实上, 裂纹端部不会出现无穷大的应力, 只是在裂纹端部由于应力高度集中, 这里就由弹性变形进入塑性变形. 随着裂纹端部附近的应力增加, 塑性变形区域逐渐扩大, 当应变能量的积累达到断裂韧性时, 裂缝的开稳失稳破裂就开始了. (在此, 笔者对 I 型破裂的断裂韧性 $K_{IC} = \text{常数}$ 略加解释: 令 P_c 表示裂缝拉断时所需外拉应力, 则 $K_{IC} = \sqrt{a}P_c$ 是与裂缝长度无关的常数, 是材料抵抗拉断能力的一个韧性指标, 这个物理量称之为断裂韧性.)

I 型破裂的动力学问题求解, 其控制方程大多采用位移法, 即以 x 和 y 方向上的位移 u 和 v 为未知函数, 以 t 表示时间自变量, 则平面应变的动力控制方程, 在不计及阻尼时为⁽³⁾

$$\begin{cases} E_1 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-2\mu_1}{2(1-\mu_1)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu_1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ E_1 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-2\mu_1}{2(1-\mu_1)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu_1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (2.45)$$

在 (2.45) 式中, ρ 是介质的质点密度, 还有

$$E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

(2.45) 式的定解条件, 除了边界条件 (2.22) 至 (2.24) 三式之外, 还要有两个初始条件, 即已知初速度和初位移, 因此给定初始条件为

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}_0(x, y), \quad (2.46)$$

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{v}_0(x, y). \quad (2.47)$$

我们要把 (2.45) 式及本构方程组和定解条件无量纲化⁽⁴⁾, 故引无量纲参数定义如下:

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a}, \quad \bar{u} = \frac{u}{a}, \quad \bar{v} = \frac{v}{a}, \quad \bar{t} = \frac{E_1 a}{\rho} c_p^2. \quad (2.48)$$

在 (2.48) 式中, $c_p = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}}$ 是介质中纵波的速度. 横波速度 $c_s = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}}$, $k = \frac{c_s}{c_p} < 0$, 因 $\mu < 0.5$.

无量纲平面应变动力问题的控制方程组为⁽⁴⁾

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + k^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + (1-k^2) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2}, \\ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + k^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + (1-k^2) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{t}^2}. \end{cases} \quad (2.49)$$

无量纲用位移分量表示应力分量的公式是

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_x = \frac{1}{k^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{1}{k^2} - 2 \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}, \\ \bar{\sigma}_y = \left(\frac{1}{k^2} - 2 \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}, \\ \bar{\sigma}_{xy} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}. \end{cases} \quad (2.50)$$

以上三式中无量纲的应力分量之值是由有量纲之值除以介质的剪切弹性系数所得到的。

因为 (2.45) 和 (2.49) 两式是偏微分方程中的双曲线型方程，而 I、II 型断裂静力学的控制方程 (2.1) 式是偏微分方程中的椭圆型方程，前者的解因定义域有限而称之为局部解 (local solution)，后者的解则因定义域无限而称之为整体解 (global solution)，故不能假定 (2.45) 和 (2.49) 两式的边界条件为在无穷远处的边界上给定作用外应力而求在坐标原点的邻域中的应力分量 (对此，我们将在本书第三章第二节中加以详细讨论)。因此，我们的边界条件是给定在裂纹边上的作用外应力，即只研究动力问题中的 (乙) 问题作为整个问题的边界条件，即^[5]

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{yy}(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \bar{\sigma}_{yy}(\bar{x}, \bar{t}), \\ \bar{\sigma}_{xy}(\bar{x}, 0, \bar{t}) = 0. \end{cases} \quad \text{已知 } |\bar{x}| \leq \bar{a}(t) \quad (2.51)$$

由于与 x 轴对称，因此有

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{xy}(\bar{x}, 0, \bar{t}) = 0, & |\bar{x}| > 1 + \bar{a}(t) \\ \bar{v}(\bar{x}, 0, \bar{y}) = 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

无量纲的初始条件只须把 (2.46) 和 (2.47) 两式改为无量纲形式即可。

用类似力法求解弹性断裂动力学的方法^[6]如下。

引入以下两个函数 Φ 和 Ψ ，定义如下

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2.53)$$

则 Φ 和 Ψ 满足波动方程

$$c_P^2 \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad c_S^2 \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (2.54)$$

有关应力分量的表达式是

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + 2\nu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right), \\ \sigma_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + 2\nu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right), \\ \sigma_{xy} = \nu \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right). \end{cases} \quad (2.55)$$

在 (2.55) 式中， $\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ ， $\nu = \frac{E}{2(1+\mu)}$ 是两个 Lamé 系数，而 (2.54) 式中的两个控制方程仍然是偏微分方程中的双曲线型方程。