级数 线性代数与数理统计

鲁石 编著

山东教育出版社

责任编辑：徐世典
封面设计：范开玉

ISBN 7-5328-1325-8/G·1130
定价：4.50元

级数　线性代数与数理统计

鲁　石　编著
李元中　审校

山东教育出版社
1991年·济南

鲁新登字2号

级数　线性代数与数理统计

鲁　石　编著

李元中　审校

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　16.625印张　354千字

1991年12月第1版　1991年12月第1次印刷

印数1—1,000

ISBN 7—5328—1325—8/G·1130

定价 4.50 元

前　言

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学。在高等院校，无论是数学专业还是非数学专业，都要学习它。对于大专院校不同专业来说，根据大纲的要求，教学的需要，选择适合本专业使用的数学教材，无疑对提高教学质量是至关重要的。鉴于目前国内尚未出版适合地理专业使用的数学教材，作者按照教学大纲的要求并结合大专院校地理专业的实际，以及多年来的教学经验，在查阅大量资料的基础上编写了这套地理专业使用的高等数学教材。

本教材共分两册：《空间解析几何与微积分》、《级数　线性代数与数理统计》。本书共分四章。第一章在讲述数项级数及其收敛性判别法的基础上，重点论述了幂级数的性质、运算和应用；第二章，以求解线性方程组为主线，讲了行列式、矩阵运算、矩阵的秩、初等变换，以及它们在求解线性方程组中的应用，最后介绍了线性方程组的实用解法：消去法和迭代法；第三章，讲解了概率论中的一些基本概念和基本理论。重点是随机事件及其概率，一元随机变量及其分布；第四章，介绍了数理统计中的一些基本概念和几种常用数理统计方法，重点是假设检验和线性回归。为了配合地理专业教学，最后结合实例讲解了多元线性回归的方法步骤。

本书稿曾在陕西师范大学地理系六届学生中连续试用，

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

效果较好，得到了广大师生的肯定与支持。在集中学生和同仁们意见的基础上，作者对稿件进行了多次修改，后经李元中教授审校而定稿。本套教材在内容和结构上作了精心选择和安排；在解题思路和方法上叙述详细，通俗易懂，并多用几何直观和实际意义阐述数学概念和理论。同时，对重点、难点和疑点作了提示。为方便教学，各节都配有适量习题，书末附有习题答案。

本教材适用于高等院校地理类专业，也可作为旅游、地质、水文、气象、农林医等专业的高等数学试用教材或教学参考书，电大、职大、函大、夜大有关师生及广大自学高等数学者也可使用。

本书在编写过程中得到了众多同学和同仁的关心支持，值此一并深切致谢。对书中缺点和不足之处，恳望读者批评指正。

鲁　石

1990年9月

目 录

第一章　无穷级数

无穷级数是与数列密切相关的一个概念，它是表示函数、研究函数，以及进行近似计算的一种重要工具．无穷级数的种类很多，我们主要讨论其中最简单、最重要的一种，叫幂级数．

为了讨论幂级数，我们先简单地介绍有关数项级数的一些知识．

§1·1　数项级数

一、级数概念

在实际工作中，常常遇到无穷多个数量相加的问题，例如计算半径为r的圆的面积s．

历史上曾有人如下进行：

如图 1—1 所示，先作圆的内接正四边形．设这正四边形的面积为A_1，它是圆面积s的一个近似值，即$s \approx A_1$．

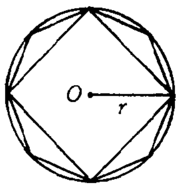

图 1—1

再以这正四边形的每一条边为底边作顶点在圆周上的等腰三角形，设得到的四个等腰三角形面积的和为A_2，则这个正八边形的面积$s_2 = A_1 + A_2$，

它也是圆面积s的一个近似值，即$s \approx s_2 = A_1 + A_2$，其近似程度比前一个好.

同样，再以这正八边形的每一边为底边，作顶点在圆周上的等腰三角形，设所作的这八个等腰三角形面积的和为A_3，则所得的正十六边形的面积$s_3 = A_1 + A_2 + A_3$，它也是s的一个近似值，即$s \approx s_3 = A_1 + A_2 + A_3$，其近似程度比前面的都好.

依次类推，作n次，得到的正2×2^n边形的面积$s_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$，它是圆面积$s$的一个近似值，并且$n$越大，其近似程度越好，当$n$无限大时，$s_n$就无限接近于$s$，因此圆面积的精确值$s$就应当定义为当$n$无限增大时$s_n$的极限.

即 $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$

这里就遇到了无穷多个数相加的数学式

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots \tag{1·1·1}$$

这种数学式就叫做级数。我们把$\lim\limits_{n \to \infty} s_n$称为这无穷多个数的和.

当圆半径r给定时，各个量A_n（$n = 1, 2, \cdots$）都是常数，这时级数(1·1·1)叫做常数项级数.

当r变化时，各个量A_n（$n = 1, 2, \cdots$）都是r的函数：$A_n(r)$，这时级数(1·1·1)叫做函数项级数.

一般级数定义如下：

定义 设给定了序列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

用加号把各项顺次联结起来所得的式子

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1·1·2}$$

叫做无穷级数，简称为级数，一般简记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，其中第$n$项$u_n$叫做级数(1·1·2)的一般项，又叫做通项．

如果每一项$u_n(n=1,2,\cdots)$都是常数，则级数(1·1·2)叫做常数项级数，又简称为数项级数．

如果每一项都是x的函数，即$u_n=u_n(x)(n=1,2,\cdots)$，则级数(1·1·2)叫做函数项级数．

例如 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，

$1+2+3+\cdots+n+\cdots$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，

$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$．

都是数项级数．

而 $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$，

$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx+\cdots$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$，

都是函数项级数．

我们先讨论数项级数．

二、级数收敛与发散的概念

我们知道，任何有限个数的和总是存在的，并且总可以用人工或计算机把它们累加起来，求得它们的和．

人们自然会问，无穷多个数相加是否一定有和呢？存在

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

时又如何求得它们的和呢？

从上面的例子可看到，圆面积s是级数（1·1·1）前n项和$s_n=A_1+A_2+\cdots+A_n$，当$n\to\infty$时的极限.

可见，一般级数(1·1·2)的和，可用级数(1·1·2)的前n项和$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$的极限来求，于是有如下的级数收敛与发散的定义.

定义 设给定了数项级数(1·1·2)，其前n项和为

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

当n依次取1，2，…时，可得到一个数列

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots$$

这个数列叫做级数(1·1·2)的前n项和数列.

如果这数列的极限$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$存在，则称级数（1·1·2）是收敛的，并称该极限值为级数(1·1·2)的和，记作$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=s$.

如果极限$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$不存在，则称级数(1·1·2)是发散的，这时级数(1·1·2)没有和.

因为数列前面有限项的情况与数列极限是否存在无关，所以，由此定义知，在级数的前面添上或去掉有限项后，不改变级数的收敛性.

例1 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

的收敛性.

解 由等比数列前n项和公式

$$s_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

得该级数的前n项和

$$s_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$存在，所以，该级数收敛，并且其和为1，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

例2 讨论级数

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

的收敛性.

解 该级数的前n项和$s_n=\frac{1+n}{2}n$，而

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2}\cdot n\right)=\infty\text{不存在},$$

所以此级数发散.

例3 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$$

的收敛性.

解 其一般项$u_n=(-1)^n$.

∵ 其前n项和

$$s_n=-1+1-1+\cdots+(-1)^n=\begin{cases}-1, & \text{当}n\text{为奇数时},\\ 0, & \text{当}n\text{为偶数时}.\end{cases}$$

当$n\to\infty$时，s_n总在-1，0上跳跃，不趋于某个确定的数．

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n$不存在．

故该级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散．

三、等比级数及其收敛性

上面的例1、例3中的级数都是把等比数列的各项顺次相加得到的，这种级数叫做等比级数，一般定义如下：

定义　形如

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1} \qquad (1\cdot1\cdot3)$$

的级数叫做等比级数，又叫几何级数．即从第二项起，各项与前项之比都等于同一个常数r的级数，叫等比级数．其中r叫做等比级数(1·1·3)的公比．

例如，例1中等比级数的公比$r=\frac{1}{2}$，例3中公比$r=-1$．

下面讨论等比级数(1·1·3)的收敛性．

（1）当$|r|\neq 1$时

由等比数列的前n项和公式知，这时级数(1·1·3)的前n项和

$$s_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

①当$|r|<1$时，

$\because$这时　$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$，

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}\right)=\frac{a}{1-r}.$$

故这时级数(1·1·3) 收敛，并且其和为$\frac{a}{1-r}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}.$$

②当$|r|>1$时

$\because$这时 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}\right)$$

$$=\frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n=\infty.$$

故此时级数(1·1·3)发散，即没有和。

（2）当$r=1$时

$\because$此时$s_n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{项}}=na$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty} na=\infty$.

故此时级数(1·1·3)发散，没有和。

（3）当$r=-1$时

$$\because \text{此时} s_n=a-a+a-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot a=\begin{cases} a, & \text{当}n\text{为奇数时},\\ 0, & \text{当}n\text{为偶数时},\end{cases}$$

当$n\to\infty$时，s_n总在a，0上跳跃，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n$不存在。

故此时级数(1·1·3)发散，没有和。

总之，$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}，当|r|<1时，\\ 发散，当|r|\geqslant 1时.\end{cases}$

由上面讨论知道，判断一个级数是否收敛（即是否有和），只需要判断出其前n项和的极限$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$是否存在，但是，直接讨论这极限是否存在，一般很难，以后我们将介绍判断级数收敛性的一些简便方法。

同样，对于收敛级数，求出其和s的精确值一般也很困难，但由前面实例知道，可以用级数的前n项和s_n作为级数和s的近似值，于是引出了级数的余项概念。

四、级数的余项

定义 收敛级数的和s与前n项和s_n之差

$$r_n=s-s_n$$

叫做收敛级数的n项后的余项，简称为级数的余项。

显然，以s_n代替s以后所产生的误差$|r_n|=|s-s_n|$。

注意 因为发散级数没有和，所以对于发散级数没有n项后的余项这一概念。

判断级数的收敛性是级数理论的首要问题，下面研究如何简便地判断出级数的收敛性。

五、级数收敛性判别法

1.级数收敛的必要条件

定理1 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots 收敛，$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$．

即级数收敛的必要条件是一般项u_n趋于0．

证明 $\because s_n=u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n=s_{n-1}+u_n$,

$\therefore$ $u_n=s_n-s_{n-1}$.

又$\because$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$存在，不妨设该极限值为$s$,

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}$$

$$=s-s=0.$$

例如，我们知道级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛的，并且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，这与定理相符．

此定理给出了判断级数发散的一个准则：

若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散．

例4 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\Sigma n+1}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$$

的收敛性．

解 $\because n\to\infty$时，该级数的一般项$u_n=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}\neq0$,

$\therefore$该级数发散．

注意 条件$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$不是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分条件．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c