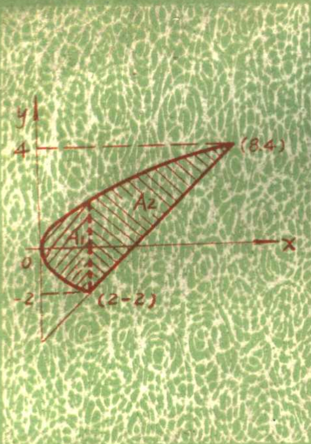
赵振藩 编



10

积分初步

积分初步

赵振藩 编

黑龙江人民出版社
1982年·哈尔滨

责任编辑　田兆民　孙怀川
封面设计　蒋　明

积　分　初　步

赵振藩　编

黑　龙　江　人　民　出　版　社　出　版
（哈尔滨市道里森林街42号）
黑龙江新华印刷厂印刷　　黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米 1/32 印张5 8/16·字数97,000
1982年9月第1版　　1982年9月第1次印刷
印数1—12,350

统一书号：13093·58　　定价：0.46元

出 版 说 明

为加速实现四个现代化，迅速培养和造就大批又红又专的建设人材的需要，我们将陆续出版一套《中学生课外读物》。

这套读物包括数学、物理、化学、语文、历史、地理等基础知识和典型题解答几十种。这本《积分初步》就是其中的一种。

本书以全国统编中学数学教学大纲为基础，适当扩大了知识范围，系统地介绍了不定积分和定积分的基本知识。对于不定积分，在给出不定积分的定义和积分法则后，着重介绍了几种初等函数的积分方法；对于定积分，在给出定积分的定义之后，较深入地讨论了定积分存在的条件和定积分的基本性质，着重介绍了定积分的计算方法，还介绍了定积分在几何学、物理学等方面的应用。书中配有适量的典型例题及练习题，并附有练习题答案。

本书可供中学生、知识青年自学之用，也可供中学数学教师参考。

目　　录

不 定 积 分

一　不定积分的定义

（一）问题的提出

我们知道，导数是从物理、几何等实际问题中抽象出来的一个数学概念，已知一个整体量求其局部量就归结为求函数的导数的问题．就函数的抽象形式来说，即是求已知函数的局部变化率．但是，实际上有很多问题不是归结为寻求一个已知函数的导数，恰恰相反，而是寻求一个未知函数 $F(x)$，使之以一个已知函数 $f(x)$ 为其导数，即 $F'(x)=f(x)$．例如，物理学中由已知运动着的物体在各个时刻的瞬时速度来求其运动规律；几何学中由已知曲线上各点的切线斜率来求其曲线的方程等等．这些问题正是求导问题的逆问题．又如求一连续曲线 $f(x)$ 下的图形的面积 $S(x)$（图 1），也可归结为求一未知函数 $S(x)$，而它是以已知函数 $f(x)$ 为其导数的问题．

设 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的图象是在上半平面上的一条连续曲线．令 $S(x)$ 表示在线段 $[a,x]$ 上曲线 $f(x)$ 下的图形的面积，则 $S'(x)=f(x)$．

事实上，给 x 一个增量 Δx，则面积 $S(x)$ 相应地得到一个增量 ΔS．令 M、m 分别表示 $y=f(x)$ 在 $[x,x+\Delta x]$ 上

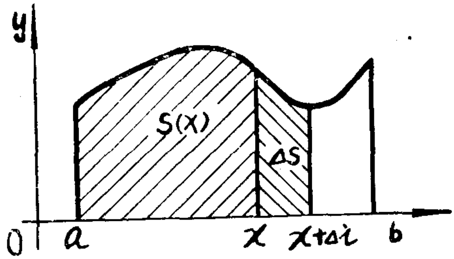


图 1

的最大值与最小值，则

$$m|\Delta x| \leqslant |\Delta S| \leqslant M|\Delta x|,$$

于是

$$m \leqslant \frac{\Delta S}{\Delta x} \leqslant M.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，所以当 $\Delta x \to 0$ 时，$m \to f(x)$，$M \to f(x)$。因此

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

上面的例子就是寻求一个函数 $F(x)$，使它的导数等于已知函数 $f(x)$，这正是积分学的任务。

（二）不定积分的定义

设 $f(x)$ 定义在区间 I 上，如果存在一个函数 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$，$x \in I$。则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在这个区间 I 上的一个原函数。

这个定义促使我们考虑两个问题：原函数的存在问题和原函数的个数问题。

存在问题是第一性问题，应该首先加以考虑。例如，$\frac{1}{1+x^2}$的原函数存在，这是因为

$$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2},$$

所以，$\frac{1}{1+x^2}$的原函数是 $\mathrm{arctg}x$。但是

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

没有原函数。这是因为，如果 $f(x)$有原函数 $F(x)$，即

$$F'(x)=f(x).$$

于是当 $x>0$ 时，$F'(x)=0$，这时 $F(x)\equiv C$。当 $x<0$ 时，$F'(x)=0$，这时 $F(x)\equiv C_1$。又 $F(x)$ 在 $x=0$ 时的导数为 1，故知 $F(x)$ 在 $x=0$ 连续，于是 $C=C_1$，从而 $F(x)\equiv C$。这与 $F'(0)=f(0)=1$ 相矛盾。这就是说 $f(x)$ 没有原函数。因此并不是所有的函数都有原函数。可以证明任何一个连续函数都有原函数。

其次，我们考虑原函数的个数问题。由微分学可知：(1) 若 $F'(x)=f(x)$，则 $[F(x)+C]'=f(x)$，其中 C 为任意常数。这就是说，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数。(2) 若 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的导数相等：$F'(x)=G'(x)$，则 $G(x)=F(x)+C$，其中 C 为任意常数。这就是说，若 $F(x)$与 $G(x)$都是 $f(x)$ 的原函数，则它们之间相差一个常数。综合 (1)、(2) 我们得到，如果 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则它有无穷多个原函数，而且每一个原函数都可以表成 $F(x)+C$ 的形式。

$f(x)$的全体原函数称为 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)dx.$$

$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式.

若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

其中 C 为任意常数. 常数 C 不能省略.

从已知函数 $f(x)$ 求它的原函数或不定积分的手续称为积分 $f(x)$ 或积分 $f(x)dx$.

由定义可知：

1. 积分与微分这两种运算之间的关系是

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),$$

$$\int \frac{d}{dx}F(x)dx = F(x)+C.$$

2. 由基本导数表可以得到基本积分表：

（1） $\int 0dx = C$；

（2） $\int 1dx = x+C$；

（3） $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$；

（4） $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$；

（5） $\int e^{x}dx = e^{x}+C$；

（6） $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}+C$；

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

(8) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(9) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$;

(10) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

(11) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$;

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$;

(13) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

(14) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

(15) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$;

(16) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$.

3. 不定积分的表示法从形式上看不是唯一的。

例如，因为

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)\right|\right) = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right) = \frac{1}{1-x^2},$$

所以

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)\right| + C$$

或 $$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+c.$$

后面的例子中还会遇到由截然不同的形式表出的不定积分，其结果是否正确，只要看它们的导数是否等于被积函数即可。

二 积分法则

所谓求积分$\int f(x)\,dx$，就是要用初等函数的有限形式把这个积分表示出来。而定义只告诉我们原函数（和不定积分）是一个（和一族）函数，其导数等于已知函数这样一个基本特征，并没有指明求法，甚至没有告诉我们如何着手去求它们。原函数和不定积分的这种"非构造性"的定义，给它们的求法——积分法带来许多困难。因此，需要建立一套积分法则，利用这些法则对被积函数或被积表达式进行变形，成为基本积分表中的被积函数，根据基本积分表，就可以把已给函数的不定积分表示成为初等函数的有限形式。

下面介绍求不定积分的三个基本法则。

（一）分项积分法

设 $f(x)$，$g(x)$ 是连续函数，C 为非零常数，则

$$\int Cf(x)\,dx=C\int f(x)dx; \tag{1}$$

$$\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx. \tag{2}$$

证明 因为

$$\frac{d}{dx}[C\int f(x)dx]=C\frac{d}{dx}\int f(x)dx=Cf(x),$$

$$\frac{d}{dx}[\int f(x)\,dx+\int g(x)dx]$$

$$=\frac{d}{dx}\int f(x)dx+\frac{d}{dx}\int g(x)dx$$

$$=f(x)+g(x),$$

所以

$$\int Cf(x)dx=C\int f(x)dx;$$

$$\int[f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$$

由（1），（2）得

$$\int[C_1f(x)+C_2g(x)]dx$$

$$=C_1\int f(x)dx+C_2\int g(x)dx, \tag{3}$$

其中 C_1，C_2 是非零常数.

在应用这个法则的时候，首先要将被积函数分解.

例 1 求 $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$.

解 $$\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$=\int(1-\frac{1}{x^2+1})dx$$

$$=\int 1dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=x-\operatorname{arctg}x+C.$$

例 2 求 $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$。

解 $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$

$$= \int (e^x-1)dx$$

$$= \int e^x dx - \int 1dx$$

$$= e^x - x + C.$$

例 3 求 $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$。

解 因为

$$\sqrt{1-\sin 2x} = |\cos x - \sin x|$$

$$= \begin{cases} \sin x - \cos x, & \text{当 } \cos x - \sin x < 0, \\ 0, & \text{当 } \cos x - \sin x = 0, \\ \cos x - \sin x, & \text{当 } \cos x - \sin x > 0. \end{cases}$$

又

$$\int (\sin x - \cos x)dx = -(\sin x + \cos x) + C,$$

$$\int 0 dx = C,$$

$$\int (\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x + C,$$

所以

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$$

$$= (\cos x + \sin x)\,\mathrm{sgn}(\cos x - \sin x) + C.$$

（二）换元积分法

若 $g(t)$，$\omega(t)$，$\omega'(t)$ 都是连续函数，又

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

则

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C. \qquad (4)$$

证明 因为 $\frac{d}{dt}G(t) = g(t)$，又由复合函数的微分公式

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x)) = \frac{d}{dt}G(t) \cdot \frac{dt}{dx} = g(t)\omega'(x)$$

$$= g(\omega(x))\omega'(x),$$

可见

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C.$$

公式(4)可表成

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)\,dx = \int g(t)dt, \qquad (4')$$

其中 $t = \omega(x)$。

要想利用换元积分法求 $\int f(x)dx$，关键在于选取适当的变换 $t = \omega(x)$，把问题转化为求 $\int g(t)\,dt$。如果 $f(x)$ 可表成 $g(\omega(x))\omega'(x)$，则变换 $t = \omega(x)$ 自然也就得到了。因此，利用换元法计算积分就需要把被积函数 $f(x)$ 表成 $g(\omega(x))\omega'(x)$ 的形式。

例 4 求$\int\cos^3x\sin x dx$。

解 因为$\cos^3x\sin x=-(\cos x)^3(\cos x)'$，
故设 $t=\cos x$。所以

$$\int\cos^3x\sin x dx=-\int t^3 dt=-\frac{1}{4}t^4+C$$

$$=-\frac{1}{4}\cos^4x+C。$$

注意，积分结果中必须将 t 代以 $\omega(x)$。

例 5 求$\int e^{x^2}xdx$。

解 因为 $e^{x^2}x=\frac{1}{2}e^{x^2}(2x)=\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2)'$，

故设 $t=x^2$，则

$$\int e^{x^2}xdx=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C。$$

在运算熟练之后，可省略上述步骤，观察被积函数特点得到变换 $t=\omega(x)$。

例 6 求$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$。

解 设 $t=\sqrt{x^2-1}$，这时 $tdt=xdx$。则

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$=\operatorname{arctg}t+c=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+C。$$

由公式(4)可以得到下面两个常用的结果。

若 $\int f(t)dt=F(t)+C$，则

$$\int f(ax+b)dx = F(ax+b)+C. \qquad (5)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C. \qquad (6)$$

例 7 求$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$，$a>0$。

解 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx\right)$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

例 8 求$\int \cos^2 x dx$。

解 $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

例 9 求$\int \frac{1}{1+e^x}dx$。

解 $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$$= \int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$= x - \int \frac{d(e^x+1)}{1+e^x}$$

$$= x - \ln(1+e^x)+C.$$

例 10 求$\int \frac{1}{\sin x\cos x}dx$。

解法一 $\int \frac{1}{\sin x\cos x}dx = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}x}$

$= \ln|\operatorname{tg}x| + C$.

解法二 $\int \frac{1}{\sin x\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C$

$= \ln|\operatorname{tg}x| + C$.

例 11 求 $\int \frac{1}{\sin x}dx$.

解法一 $\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$

$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

解法二 $\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx$

$= \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C$

$= \ln|\csc x - \operatorname{ctg}x| + C$.

例 12 求 $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$.

解 $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \frac{1}{n}\int \frac{x^n}{x^n+1}dx^n$

$= \frac{1}{n}\int \frac{x^n+1-1}{x^n+1}dx^n$