

二十一世纪高等院校标准教材配套辅导

高等数学(上)

——教材习题详解及自测提高题

配同济五版

主 编 黄晓英 刘文芬
主 审 清华大学数学系教授谭泽光

北京工业大学出版社

二十一世纪高等院校标准教材配套辅导

高等数学 (上)

——教材习题详解及自测提高题

(配同济五版)

主 编 黄晓英 刘文芬

副主编 滕吉红 彭昌勇

主 审 清华大学数学系教授谭泽光

北京工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上:教材习题详解及自测提高题/黄晓英, 刘文芬主编. —北京:北京工业大学出版社, 2003. 10 修订
ISBN 7-5639-1174-X

I. 高... II. 黄... III. 高等数学—高等学校—解
题 IV. 013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第073935号

高等数学(上)
——教材习题详解及自测提高题
(配同济五版)

主编 黄晓英 刘文芬

*

北京工业大学出版社出版发行
邮编:100022 电话:(010)67392308
各地新华书店经销
徐水宏远印刷厂印刷

*

2003年10月第1版 2003年10月第1次印刷
787 mm×960 mm 16开本 25印张 543千字
印数:0001~5000
ISBN 7-5639-1174-X/G·660
定价:30.00元

内 容 提 要

本书对高等学校教材《高等数学》(第五版)全部习题做了详解,是大学工科数学教材的一本辅助性参考书,旨在帮助学生更好地掌握数学的基本概念、基本定理,又在保证教学要求的前提下每章都配置了自测提高题,以扩大习题量,提高教学质量。

本书分上、下两册.上册习题内容包括:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数等内容.

该书具有习题量大,题型广泛,推理清楚,解题详细等优点,可供高等工科院校不同专业的学生使用,也可作为考研的参考读物.

序

高等数学是大学理工类专业的重要基础课，其知识和方法是研究连续模型的基本数学工具，是学习许多专业基础课和专业课的先选课程，在硕士研究生入学考试的数学科目中占到超过六成的分量。因此，掌握好这门课程，对理工科大学生来说，无疑是十分重要的。

要学好高等数学必须有一本好的教材和一本好的配套辅导书。好的教材是指它应具有科学性、可读性和启发性；而好的辅导书则应能起到引导、扩展和深入提高的作用。

同济大学编写的《高等数学》许多年来一直被不少大学选用为教科书。该教材经过多次修改与再版，在内容撰写与习题编选上日臻完善，特别是最近的第五版，在原有基础上又有较大的改进，应该说，这是目前国内一本较好的《高等数学》教材。

在这里向读者推荐一本与同济第五版《高等数学》配套的辅导书：《高等数学——教材习题详解及自测提高题》。这本书由黄晓英教授等编写，这是他们积讲授同济大学编写的《高等数学》教材十多年的经验和体会而写成的。该辅导书对同济五版教材中所有习题，依原有次序逐题作了比较详细的解答，为读者作出了解题的示范和适当的引导，如果读者能以正确的方法来利用这些材料，将会收到良好的效果。该辅导书还在相应章节配编了一批自测题，作为读者自我检测和深入提高之用，这些自测题按内容安排，题型比较多，由浅入深，不少题有较大难度，如果读者能认真习作，确能起到扩展、深入、提高的作用，是一本值得一读的参考书。

这里，我想对读者就使用数学习题辅导参考书的方法提出一点建议：一定不要把这种书当教材一样来“读题解”，而应该把它当作“验收清单”一样来检查学习的效果。也就是说，绝不能自己不动手，一道一道题去读解法。“数学不是读会的，是做会的”，这是许多数学成绩优秀者的共同经验。“读题解”的方法，不但使读者似懂非懂，似会不

会，而且使人眼高手低，变得懒惰，后患无穷。正确使用这种辅导书的方法应该是：首先认真阅读教材，尽量正确理解其概念及方法，在此基础上尽量独立地完成教材中的相应习题，把辅导书上的结果作为检查自做习题正确性的“尺子”；如果做法或结果与辅导书上的不一致，则应比较其优劣，判断谁是谁非，分析原因；有些题目实在做不出来，看辅导书时，也不应一下子将相应题的解答从头看到尾，可以先看一部分，希望由此受些启发，尽量争取自己做的部分多一些，实在做不出来，读完辅导书的完整解答后，也应总结一下自己不会做的原因。如果坚持这种使用辅导书的方法，很好地掌握高等数学是不难做到的。

清华大学数学系教授

谭泽光

2003年9月

前 言

高等数学是工科院校的一门重要的基础课，它不仅是学生学习后续课程的基础，也是学生继续学习深造——考研的最重要的考试科目。我们根据多年的教学和辅导考研的经验，参考了大量的高等数学教辅材料，从学生的实际需要出发编写了本书。其内容包括两部分，一是给出了同济大学《高等数学》第五版教材中的所有习题的解答；二是精选了现行高等数学辅导教材中对概念理解和解题方法要求较高的题目并给出了详细解答。之所以如此安排本书内容，主要基于如下一些考虑：

(1) 同济大学版的《高等数学》是目前众多工科类高校选用的此课程的教材，该题解应拥有较为庞大的读者群体。

(2) 高等数学课程进度快，信息量大，课后练习多，学生很难将课后大量的练习按时完成，教师也不可能将所有作业全部批改。显然学生拥有一套与教材相互配套的参考书将会对课程的学习带来诸多方便。

(3) 学习的目的在于应用。要想得心应手地运用微积分的基本原理和公式就必须进行严格而充分的训练，多做练习才能达到理解和熟练。因而如能认真地做完本书中的习题，必能对牢固掌握所学知识大有裨益。

(4) 由于许多院校高等数学的课程考试试题均出自现有的试题库，而教材中的习题与试题库中的习题在题型上往往差距较大，而本书中的自测提高题由于题型多样、覆盖面广泛，恰恰能弥补这一缺陷。

(5) 当前大学生“考研热”方兴未艾，竞争日趋激烈，要想顺利通过研究生入学考试，就必须在一年级学习时打好基础，复习备考时多见识题型。本书的第二部分提高题中收入了许多历年入学试题的精华，同时注意了量与质的兼顾。

参加本书编写工作的均为长期工作在高等数学教学和考研辅导一线的教师，长期的教学实践使他们具有丰富的经验和对研究生入学考试发展过程的了解。全书分上、下两册，不仅可作为高校师生的教学参

考书，也可作为大学生考研的有效的辅导教材。我们衷心希望本书能为大家在高等数学的学习和考研复习时发挥重要的作用。

最后需要说明的是，本书习题题型丰富，不少题目的难度较大，如能认真习做，既可以巩固学到的知识又可以有效地提高运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合运用所学知识分析问题和解决问题。正因为如此，我们期望读者，特别是初学者一定要刻苦钻研、多用脑子，千万不要轻易查抄书中答案，因为任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版此书的初衷的。本书对所收入的习题均给出了解答，但数学题目的解法往往并非是惟一的，因此书中解答仅作参考，如有更好的解答或发现某些差错恳请告知，我们将不胜感谢！

编 者

2003 年 9 月

目 录

第一章 函数与极限

一、教材习题详解

习题1-1	1
习题1-2	8
习题1-3	10
习题1-4	13
习题1-5	16
习题1-6	18
习题1-7	21
习题1-8	23
习题1-9	26
习题1-10	28

总习题一	29
------------	----

二、自测提高题与解答

自测题1-1	35
自测题1-2	36
自测题1-3	36
自测题1-4	37
自测题1-5	38
自测题1-6	39
自测题1-7	39
自测题1-8	40
自测题1-1 解答	41
自测题1-2 解答	44
自测题1-3 解答	46
自测题1-4 解答	49
自测题1-5 解答	51
自测题1-6 解答	55
自测题1-7 解答	56
自测题1-8 解答	60

第二章 导数与微分

一、教材习题详解

习题2-1	63
习题2-2	68
习题2-3	76
习题2-4	80
习题2-5	86
总习题二	92

二、自测提高题与解答

自测题2-1	97
自测题2-2	98
自测题2-3	98
自测题2-4	99
自测题2-5	99
自测题2-6	100
自测题2-7	101
自测题2-1 解答	101
自测题2-2 解答	105
自测题2-3 解答	107
自测题2-4 解答	108
自测题2-5 解答	109
自测题2-6 解答	111
自测题2-7 解答	114

第三章 微分中值定理 与导数的应用

一、教材习题详解

习题3-1	119
习题3-2	124
习题3-3	127
习题3-4	130

习题3-5	140
习题3-6	148
习题3-7	153
习题3-8	156
总习题三	158

二、自测提高题与解答

自测题3-1	166
自测题3-2	168
自测题3-3	168
自测题3-4	169
自测题3-5	170
自测题3-6	171
自测题3-1 解答	171
自测题3-2 解答	174
自测题3-3 解答	176
自测题3-4 解答	179
自测题3-5 解答	183
自测题3-6 解答	186

第四章 不定积分

一、教材习题详解

习题4-1	188
习题4-2	192
习题4-3	197
习题4-4	202
习题4-5	207

总习题四	208
------------	-----

二、自测提高题与解答

自测题4-1	216
自测题4-2	217
自测题4-3	217
自测题4-4	218
自测题4-1 解答	219
自测题4-2 解答	221
自测题4-3 解答	223
自测题4-4 解答	227

第五章 定积分

一、教材习题详解

习题5-1	231
习题5-2	238
习题5-3	244
习题5-4	254
* 习题5-5	257

总习题五	260
------------	-----

二、自测提高题与解答

自测题5-1	268
自测题5-2	269
自测题5-3	270
自测题5-4	271
自测题5-5	271
自测题5-6	272
自测题5-1 解答	273
自测题5-2 解答	276
自测题5-3 解答	278
自测题5-4 解答	283
自测题5-5 解答	285
自测题5-6 解答	288

第六章 定积分的应用

一、教材习题详解

习题6-2	292
习题6-3	310

总习题六	316
------------	-----

二、自测提高题与解答

自测题6-1	320
自测题6-2	321
自测题6-3	322
自测题6-4	322
自测题6-1 解答	323
自测题6-2 解答	325
自测题6-3 解答	330
自测题6-4 解答	332

第七章 空间解析几何 与向量代数

一、教材习题详解

习题7-1	336
-------------	-----

习题7-2	340	自测题7-3	370
习题7-3	344	自测题7-4	371
习题7-4	347	自测题7-5	372
习题7-5	351	自测题7-1 解答	373
习题7-6	354	自测题7-2 解答	375
总习题七	360	自测题7-3 解答	377
二、自测提高题与解答		自测题7-4 解答	381
自测题7-1	369	自测题7-5 解答	383
自测题7-2	369		

第一章 函数与极限

一、教材习题详解

习题 1-1

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3]$, 写出 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \setminus B)$ 的表达式.

解 $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$, $A \cap B = [-10, -5)$,
 $A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$,
 $A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5).$

2. 设 A, B, C 是任意三个集合, 证明对偶律: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

证明 对 $\forall a \in (A \cap B)^c \Rightarrow a \notin A \cap B \Rightarrow a \notin A$ 或 $a \notin B$

$$\Rightarrow a \in A^c \text{ 或 } a \in B^c$$

$$\Rightarrow a \in A^c \cup B^c$$

因此

$$\Rightarrow (A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$$

①

反之, 对 $\forall a \in A^c \cup B^c \Rightarrow a \in A^c$ 或 $a \in B^c$

$$\Rightarrow a \notin A \text{ 或 } a \notin B$$

$$\Rightarrow a \notin A \cap B$$

$$\Rightarrow a \in (A \cap B)^c$$

因此

$$A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$$

由 ①、② 两式即得 $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$.

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset X$. 证明:

$$(1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$$

$$(2) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

证明 (1) 对 $\forall a \in f(A \cup B)$, $\exists x \in A \cup B$, $f(x) = a$.

因为 $a \in f(A) \cup f(B)$, 所以

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

反之, 对 $\forall a \in f(A) \cup f(B)$, 有 $a \in f(A)$ 或 $a \in f(B)$. 所以

$$\exists x \in A \text{ 或 } y \in B, \quad f(x) = a \text{ 或 } f(y) = a$$

$$a \in f(A \cup B)$$

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

(2) 对 $\forall a \in f(A \cap B), \exists x \in A \cap B$, 使得 $f(x) = a$. 所以

$$a \in f(A) \cap f(B)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

4. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使 $g \circ f = I_X, f \circ g = I_Y$, 其中 I_X, I_Y 分别是 X, Y 上的恒等映射, 即对于每一个 $x \in X$, 有 $I_X x = x$; 对于每一个 $y \in Y$, 有 $I_Y y = y$. 证明: f 是双射, 且 g 是 f 的逆映射: $g = f^{-1}$.

证明 欲证 f 是双射, 只要证明 f 既是单射, 又是满射即可.

对 $\forall y \in Y$, 因为 $f \circ g(y) = y$, 而 $g(y) \in X$, 所以 $f(x)$ 是满射.

若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, 所以 $x_1 = x_2$, f 是单射.

综上可知 f 是双射.

又因为对 $\forall y \in Y$, 若 $g(y) = x$, 则由 $f \circ g = I_Y$ 得 $f(x) = y$.

所以 g 为 f 的逆映射.

5. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X$. 证明:

$$(1) f^{-1}(f(A)) \supset A;$$

$$(2) \text{ 当 } f \text{ 是单射时, 在 } f^{-1}(f(A)) = A.$$

解 (1) $\forall x \in A$, 因为 $f: X \rightarrow Y$, 所以 $y = f(x) \in Y, x \in \{x' \in X, f(x') = y\}$.

(2) $\forall x \in f^{-1}(f(A))$, 因为 f 为单射, 所以 $\exists y \in f(A)$, 使 $y = f(x) \subset f^{-1}(f(A))$, $x \in A$.

6. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+2};$$

$$(2) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(3) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(5) y = \sin \sqrt{x};$$

$$(6) y = \tan(x+1);$$

$$(7) y = \arcsin(x-3);$$

$$(8) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \ln(x+1);$$

$$(10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

解 (1) 由 $3x+2 \geq 0, x \geq -\frac{2}{3}$, 求得定义域为

$$\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

(2) 由 $1-x^2 \neq 0, x \neq \pm 1$, 求得定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 由 $x \neq 0$ 且 $1-x^2 \geq 0$, 得 $x \neq 0$ 且 $|x| \leq 1$, 因此定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) $4-x^2 > 0, |x| < 2$, 求得定义域为 $(-2, 2)$.

(5) $x \in (0, +\infty)$.

(6) $x \in (k\pi - \frac{\pi}{2} - 1, k\pi + \frac{\pi}{2} - 1), k \in \mathbf{Z}$.

(7) $x \in [2, 4]$.

(8) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3]$.

(9) $x \in (-1, +\infty)$.

(10) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

7. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x - 1}$;

(4) $f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

解 (1) 因定义域不同, 所以函数不同.

(2) 因对应法则不同, $x < 0$ 时, $g(x) = -x$, 所以函数不同.

(3) 因定义域、对应法则均相同, 所以函数相同.

(4) 不相同, 因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不同.

8. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 函数的图形.

解 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}$.

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\varphi(-2) = 0.$$

$y = \varphi(x)$ 的图形如图 1-1.

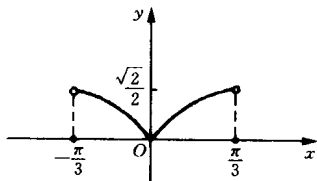


图 1-1

9. 试证下列函数在指定区间的单调性:

(1) $y = \frac{x}{1-x}, x \in (-\infty, 1)$; (2) $y = x + \ln x, (0, +\infty)$.

解 (1) $y = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调增.

(2) 因为 x 在 $(0, +\infty)$ 上单调增, $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上也单调增, 所以 $x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增.

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证明 设 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$, 且 $x_1 < x_2$ (此时 x_1, x_2 均为负数), 则 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$, 且 $-x_2 < -x_1$ (此时 $-x_1, -x_2$ 均为正数).

由 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 则 $f(-x_2) < f(-x_1)$.

因 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内是奇函数, 所以

$$f(-x_2) = -f(x_2), f(-x_1) = -f(x_1)$$

故 $-f(x_2) < -f(x_1)$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

因此, $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的积是偶函数, 两个奇函数的积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 令 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

$$\begin{aligned}\text{因为} \quad F(-x) &= f_1(-x) + f_2(-x) \\ &= f_1(x) + f_2(x) = F(x)\end{aligned}$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数, 令 $G(x) = g_1(x) + g_2(x)$.

$$\begin{aligned}\text{因为} \quad G(-x) &= g_1(-x) + g_2(-x) \\ &= -g_1(x) - g_2(x) = -G(x)\end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 令 $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

$$\begin{aligned}\text{因为} \quad F(-x) &= f_1(-x) \cdot f_2(-x) \\ &= f_1(x) \cdot f_2(x) = F(x)\end{aligned}$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 为奇函数, 令 $G(x) = g_1(x)g_2(x)$.

$$\begin{aligned}\text{因为} \quad G(-x) &= g_1(-x)g_2(-x) = [-g_1(x)][-g_2(x)] \\ &= g_1(x)g_2(x) = G(x)\end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 令 $H(x) = f(x)g(x)$.

$$\begin{aligned}\text{因为} \quad H(-x) &= f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] \\ &= -f(x)g(x) = -H(x)\end{aligned}$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y = x^2(1 - x^2);$

(2) $y = 3x^2 - x^3;$

(3) $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2};$

(4) $y = x(x - 1)(x + 1);$

(5) $y = \sin x - \cos x + 1;$ (6) $\frac{a^x + a^{-x}}{2}.$

解 (1) 因为
$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)^2[1 - (-x)^2] \\ &= x^2(1 - x^2) = f(x)\end{aligned}$$

故此函数为偶函数.

(2) 因为
$$\begin{aligned}f(-x) &= 3(-x)^2 - (-x)^3 \\ &= 3x^2 + x^3 \neq \pm f(x)\end{aligned}$$

故此函数既非奇函数又非偶函数.

(3) 因为
$$\begin{aligned}f(-x) &= \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} \\ &= \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = f(x)\end{aligned}$$

故此函数为偶函数.

$$(4) \quad \text{因为} \quad f(-x) = (-x)[(-x) - 1][(-x) + 1] \\ = -x(x-1)(x+1) = -f(x)$$

故此函数为奇函数.

$$(5) \quad \text{因为} \quad f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 \\ = -\sin x - \cos x + 1 \neq \pm f(x)$$

故此函数既非奇函数又非偶函数.

$$(6) \quad \text{因为} \quad f(-x) = \frac{a^{(-x)} + a^{-(-x)}}{2} \\ = \frac{a^x + a^{-x}}{2} = f(x)$$

故此函数为偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

- (1) $y = \cos(x-2)$; (2) $y = \cos 4x$;
(3) $y = 1 + \sin \pi x$; (4) $y = x \cos x$;
(5) $y = \sin^2 x$.

解 (1) 因为 $\cos(x-2) = \cos x \cos 2 + \sin x \sin 2$, 而 $\sin x, \cos x$ 的周期为 2π , 所以 $y = \cos(x-2)$ 是周期函数, 周期 $l = 2\pi$.

(2) 因为 $\cos(4x+2\pi) = \cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 4x$, 所以 $y = \cos 4x$ 是周期函数, 周期 $l = \pi/2$.

(3) 因为 $\sin \pi x$ 是周期函数, 所以 $y = 1 + \sin \pi x$ 是周期函数, 周期 $l = 2$.

(4) 设 $y = x \cos x$ 有一个周期 $T > 0$, 则 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$(x+T)\cos(x+T) = x\cos x$$

令 $x = 0$, 得 $T\cos T = 0$, 故 $\cos T = 0$, 从而

$$T = n_0\pi + \frac{\pi}{2}$$

于是有 $\left(x + n_0\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x + n_0\pi + \frac{\pi}{2}\right) = x\cos x$

再令 $x = n_0\pi + \frac{\pi}{2}$ 代入上式, 得到

$$(2n_0\pi + \pi)\cos \pi = 0$$

矛盾. 故 $y = x \cos x$ 不是周期函数.

$$(5) \quad \text{因为} \quad y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

而 $\cos 2x$ 的周期为 π , 所以 $y = \sin^2 x$ 是周期函数, 周期 $l = \pi$.

14. 求下列函数的反函数:

- (1) $y = \sqrt[3]{x+1}$; (2) $y = \frac{1-x}{1+x}$;
(3) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$); (4) $y = 2\sin 3x$;
(5) $y = 1 + \ln(x+2)$; (6) $y = \frac{2^x}{2^x+1}$.

解 (1) 将 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 改写为 $x = \sqrt[3]{y+1}$, 得 $y = x^3 - 1$.

(2) 将 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 改写为 $x = \frac{1-y}{1+y}$, 得 $y = \frac{1-x}{1+x}$.

(3) 将 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 改写为 $x = \frac{ay+b}{cy+d}$, 得 $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 将 $y = 2\sin 3x$ 改写为 $x = 2\sin 3y$, 得反函数

$$y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}$$

(5) 将 $y = 1 + \ln(x+2)$ 改写为 $x = 1 + \ln(y+2)$, 得反函数

$$y = \frac{e^x}{e} - 2$$

(6) 将 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$, 改写为 $x = \frac{2^y}{2^y+1}$, 得反函数

$$y = \log_2 \frac{x}{1-x}$$

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在数集 X 上既有上界又有下界.

证明 必要性: 若 $f(x)$ 在 X 上有界, 则 $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in X$ 都有

$$|f(x)| \leq M, \text{ 即 } -M \leq f(x) \leq M$$

显然, 由 $f(x) \leq M, x \in X$, 知 $f(x)$ 有上界; 由 $-M \leq f(x), x \in X$, 知 $f(x)$ 有下界.

充分性: 若 $f(x)$ 在 X 上有上界 M_1 , 下界 M_2 , 取 $M = \max(|K_1|, |K_2|)$, 则 M 为 $f(x)$ 在 X 上有界.

16. 在下列各题中, 求由所给函数构成的复合函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}$;

(2) $y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}$;

(3) $y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2$;

(4) $y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1$;

(5) $y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1$.

解 (1) $y = \sin^2 x, y(x_1) = \frac{1}{4}, y(x_2) = \frac{3}{4}$;

(2) $y = \sin 2x, y(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y(x_2) = 1$;

(3) $y = \sqrt{1+x^2}, y(x_1) = \sqrt{2}, y(x_2) = \sqrt{5}$;

(4) $y = e^{x^2}, y(x_1) = 1, y(x_2) = e$;

(5) $y = e^{2x}, y(x_1) = e^2, y(x_2) = e^{-2}$.

17. 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;

(2) $f(\sin x)$;