面向21世纪课程教材辅导用书

高等数学学习指南

赵翠萍　张海燕　主编

NANKAI UNIVERSITY PRESS

南开大学出版社

高等数学学习指南

赵翠萍　　张海燕　　主编

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(C I P)数据

高等数学学习指南 / 赵翠萍，张海燕主编. 一天津：南开大学出版社，2003.12
ISBN 7-310-01974-1

Ⅰ.高... Ⅱ.①赵...②张... Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 067677 号

出版发行 南开大学出版社
地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮编:300071
营销部电话:(022)23508339 23500755
营销部传真:(022)23508542
邮购部电话:(022)23502200

出版人 肖占鹏
承　印 南开大学印刷厂印刷
经　销 全国各地新华书店
版　次 2003 年 12 月第 1 版
印　次 2003 年 12 月第 1 次印刷
开　本 880mm×1230mm 1/32
印　张 15.75
字　数 450 千字
印　数 1—5000
定　价 23.00 元

主　编　赵翠萍　　张海燕

参编者　（按姓氏笔画排）

马志宏　　王学会

孙国红　　陈立新

张海燕　　房　宏

赵翠萍

内　容　简　介

本书共 13 章，包括一元函数微分学与积分学，多元函数微分学与积分学，级数，微分方程，高等数学在经济中的应用等。各章每一节开始都有内容提要，概括本节的主要知识内容，然后是例题解析和小结，每章最后给出自测题，供读者练习。

本书对学习高等数学的同学是一本很好的辅导教材，同时也可作为报考研究生的理想复习资料及高等数学任课教师的教学参考用书。

前　言

编写本书的目的,是想对正在学习和复习高等数学的同学们提供一些辅导,帮助同学们加深对高等数学中基本概念的理解,引导同学们掌握高等数学的解题方法和技巧,启发、培养同学们学习高等数学的兴趣。

本书是通过对例题的分析、讲解、解题方法的总结等方式提供辅导的,例题的选择基本上符合农科、工科、经济类等专业高等数学课程教学的基本要求。因此,不管读者使用什么样的教材,都能使用此书。

本书的例题中有介绍基本概念和基本运算方法的计算题或证明题,有初学者容易在计算中出现错误或不易理解的澄清题,有一题多解的开扩思路题,也有较灵活的综合题。不少例题在讲解前作了如何思考或如何解题的分析,在讲解完后又有"注"或"说明",内容涉及基本概念和基本理论的深入理解、解题方法小结及常见错误的剖析、某些例题中结论的推广等。

由于本书主要是为初学者提供的辅导材料,在每一节前面都有内容提要及例题解析。我们建议读者对每一节的内容提要先看一看,想一想,再去看例题解析的题目,先自己动手算一算,然后看题解,这样会帮助大些。在每章最后都有相应内容的自测题。

参加本书编写的教师有:马志宏(第一章),王学会(第二章),张海燕(第三、十三章),房宏(第四、七、八章),孙国红(第五、六章)、赵翠萍(第九、十二章),陈立新(第十、十一章)。

编写本书时,参阅了许多书籍,引用了许多经典例子,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢。

编者虽然对本书的编写作出了最大努力,但由于水平与经验有限,加之时间仓促,难免有错误与不妥之处,敬请读者指正。

编　者

2003 年 7 月

目　　录

第一章　函数与极限

1.1　函数

一、内容提要

1. 函数的定义

设 D 为一实数集，若按某种确定的对应规律 f，对任意 $x \in D$ 都有惟一确定的实数 y 与其对应，则称 y 是 x 的函数，记作：

$$y = f(x).$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量；x 的取值范围 D 叫做函数的定义域，y 的变化范围叫做函数的值域，用 W 表示.

2. 函数的几种性质

(1)有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$. 如果存在数 k_1，使得

$$f(x) \leqslant k_1$$

对任意 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 k_1 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个上界；如果存在数 k_2，使得

$$f(x) \geqslant k_2$$

对任意 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 k_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 如果存在正数 M，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对任意 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界；如果这样的 M 不存

在，就称函数$f(x)$在X上无界.

(2)单调性

设函数$f(x)$的定义域为D，且区间$I\subset D$. 如果对于区间I上任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间I上单调增加；如果对于区间I上任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间I上单调减少. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

(3)函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称. 如果对于任一$x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为偶函数；如果对于任一$x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为奇函数.

(4)函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为D. 如果存在一个正数l，使对于任一$x\in D$，都有$(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为周期函数，l称为$f(x)$的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

3. 反函数与复合函数

(1)反函数

设函数$f:D\to f(D)$是单射，则它存在逆映射$f^{-1}:f(D)\to D$，称此映射f^{-1}为函数f的反函数. 对于每个$y\in f(D)$，有惟一的$x\in D$，使得

$$f(x)=y,$$

于是有

$$f^{-1}(y)=x.$$

这就是说，反函数f^{-1}的对应法则完全由函数f的对应法则确定.

(2)复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\qquad x\in D$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数. 它的定义域为 D，称变量 u 为中间变量.

4. 初等函数

(1)几类基本初等函数

幂函数：$y=x^u$ （u 是常数）.

指数函数：$y=a^x$ （$a>0$，且 $a\neq 1$）.

对数函数：$y=\log_a x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$；特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$）.

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等.

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

(2)初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成、并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

二、例题解析

1. 关于定义域的求法

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；　　(2) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$.

解 (1)当 $\begin{cases}\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0,\\ \dfrac{5x-x^2}{4}>0\end{cases}$ 时，函数有定义，

即 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1\Rightarrow(x-1)(x-4)\leqslant 0$. 故得定义域为：$1\leqslant x\leqslant 4$ 或 $[1,4]$.

(2)当$\sqrt{16-x^2}$与 $\lg\sin x$ 同时有定义时,函数才有定义,所以

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi\quad(n=0,\pm 1\cdots)\end{cases}$$

求解联立不等式,得:函数的定义域为 $-4\leqslant x<-\pi, 0<x<\pi$.

例 2 设 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$. 求 $\varphi(x)$ 的定义域.

解 因为 $f(x)=e^{x^2}$,所以 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$. 而 $f[\varphi(x)]=1-x$,即 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$,故 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$.

由 $\varphi(x)\geqslant 0$,可得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 因此当 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 时,$\varphi(x)$ 有定义,即 $x\leqslant 0$ 或 $(-\infty,0]$.

例 3 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$, $\varphi(x)=1-\sin x$. 求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域.

解 令 $t=\varphi(x)$. 由题意知 $f(t)$ 的定义域为 $[-1,1]$,即 $-1\leqslant 1-\sin x\leqslant 1$. 解得 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$. 所以函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

注 (1)求复杂函数的定义域,通常将复杂函数看成一系列初等函数的复合,然后考查每个初等函数的定义域,得到对应的不等式,通过联立求解不等式,就可得到原函数的定义域.

(2)熟记基本初等函数的定义域.

2. 关于表达式的求解

例 4 设 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$, $x>0$. 求 $f(x)$.

解 因为 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$,

$$\text{所以} f\left(\frac{1}{x}\right)\xlongequal{\text{分子有理化}}\frac{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}{x-\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}\xlongequal{\text{分子分母同除}x}\frac{-\frac{1}{x}}{1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

令 $y=\frac{1}{x}$,故 $f(y)=\frac{-y}{1-\sqrt{y^2+1}}=\frac{1}{y}(1+\sqrt{y^2+1})\quad(y>0)$,

即 $$f(x)=\frac{1}{x}(1+\sqrt{x^2+1})\quad(x>0).$$

例 5 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(1-x)=\frac{c}{x}$,其中 a,b,c 都为常数,且 $|a|\neq|b|$,求 $f(x)$.

解 因为 $$af(x)+bf(1-x)=\frac{c}{x}, \tag{1}$$

取 $x=1-t$,则 $t=1-x$. 于是有 $af(1-t)+bf(t)=\frac{c}{1-t}$,

所以 $$af(1-x)+bf(x)=\frac{c}{1-x}. \tag{2}$$

联立式(1)和式(2),解得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-\frac{bc}{1-x}\right)$.

3. 关于反函数的求解

例 6 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　　(2) $y=2\sin 3x$;　　(3) $y=\ln(x+2)+1$.

解 因为 $x\in R$,有 $y\in R$.

(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$,有 $x=y^3-1$,故 $y=x^3-1$ 为 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

(2) 由 $y=2\sin 3x$,有 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,所以 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$ 为 $y=2\sin 3x$ 的反函数.

(3) 由 $y=1+\ln(x+2)$,得 $x=\frac{e^y}{e}-2$,所以 $y=e^{x-1}-2$ 为 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数.

4. 函数有界性的判别

例 7(选择题) 函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为________.

A. 有上界无下界　　B. 有下界无上界

C. 有界且 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$　　D. 有界且 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$

解 $|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}$.

因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$，所以 $|f(x)|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$.

故应选 C.

注 本题适当运用不等式进行放缩. 在求解函数有界性问题时可考虑用不等式放缩来处理.

例 8 指出下列两个函数是否有界.

(1) $y=\frac{1}{x^2}$ $(a\leqslant x\leqslant 1$ 且 $a>0)$；　　(2) $y=x\cos x$.

解 (1) 由 $a\leqslant x\leqslant 1, a>0$，有 $a^2\leqslant x^2\leqslant 1$，故 $1\leqslant\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{a^2}$，$(0<a<1\Rightarrow\frac{1}{a^2}>1)$. 即 $y=\frac{1}{x^2}$ 当 $x\in[a,1]$ 时有界. 显然，$\frac{1}{a^2}$ 是一个上界.

(2) $\forall M>0$，取 $x=(2[M]+1)\pi$，其中 $[M]$ 表示不超速 M 的最大整数，则 $\cos x=-1$. 此时 $|f(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M$. 由定义可得，$y=x\cos x$ 无界.

5. 函数单调性判别

例 9 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且 $x_1>0, x_2>0$. 证明：若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

证 不妨设 $x_2>x_1>0$，于是有 $\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}$，故 $x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$.

已知 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降，所以

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2},$$

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2),$$

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2).$$

又因 $x_2>x_1$，所以 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

例 10 判断函数 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的单调性.

解 $\forall x_1,x_2\in(0,\pi)$，设 $x_1<x_2$，则 $\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}$，其中 $0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi$，$0<\frac{x_2-x_1}{2}<2$，即 $\sin\frac{x_1+x_2}{2}>0$，$\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$.

所以 $\cos x_2-\cos x_1<0$. 故 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调减少.

6. 函数奇偶性判别

例 11（选择题） 设 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，对 $\forall x,y\in R$ 都成立，且 $f(x)\neq0$，则 $f(x)$ 是(　　).

A. 有界函数　　　B. 单调函数

C. 周期函数　　　D. 偶函数

解 由 $f(x-y)+f(x+y)=2f(x)\cdot f(y)$，用 $-y$ 代 y，有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(-y)$，故 $2f(x)f(y)=2f(x)\cdot f(-y)$.

因 $f(x)\neq0$，所以 $f(y)=f(-y)$. 故 $f(x)$ 是偶函数. 答案应选 D.

例 12（选择题） 若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)=x^3f(x^2)$ 为(　　).

A. 奇函数　　　B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　　D. 非奇非偶函数

解 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x^2)$ 为偶函数. 又因 $f(-x^2)=f(x^2)$，令 $t(x)=x^3$，则 $t(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=t(x)f(x^2)$ 为奇函数. 故答案选 A.

注 判断函数奇偶性的主要方法：

(1) 根据函数的奇偶性或利用函数的运算性质，即奇函数的代数和为奇函数；偶函数的代数和为偶函数；偶数个奇函数之积为偶函数；一个奇函数与一个偶函数的乘积仍为奇函数.

(2) $f(-x)+f(x)=0$ 或 $f(-x)-f(x)=0$ 也是判断函数奇偶性常用方法之一.

(3) 函数奇偶性是相对于对称区间而言的. 如果函数的定义域不

关于原点对称,则无奇偶性可言.

三、小结

函数是高等数学的基础,函数类型的题目遍及高等数学各个章节.本节要求重点掌握和深刻理解函数的有关概念和基本性质,熟记基本初等函数的图形和性质。

1.2 极限

一、内容提要

1. 数列极限的定义

设$\{x_n\}$为一数列,如果存在常数a,对于任意给定的ε(不论ε多么小),总存在正整数N,使得当$n>N$时,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立,那么就称a是数列$\{x_n\}$的极限,或称数列$\{x_n\}$收敛于a,记作:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad 或\quad x_n\to a\quad (n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数a,就说数列$\{x_n\}$没有极限,或称数列$\{x_n\}$发散.

2. 函数极限的定义

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义,如果存在常数A,对任意正数$\varepsilon>0$(ε不论多小),总存在$\delta>0$,使得当x满足不等式

$$0<|x-x_0|<\delta 时,$$

对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A\quad (x\to x_0).$$

注 (1)本书中只给出了函数$x\to x_0$时的极限定义.至于$x\to\infty$,$x\to x_0^-$或$x\to x_0^+$时函数极限的定义,与$x\to x_0$时的定义完全类似.