SHUXUE HAOWAN

数学好玩丛书——初中生的书

数学好玩

——好玩的几何

李毓佩 著

长虹出版公司

SHUXUE HAOWAN

数学好玩丛书——初中生的书

数学好玩

——好玩的几何

李毓佩 著

长虹出版公司

图书在版编目(CIP)数据

好玩的几何/李毓佩著 .—北京:长虹出版公司,2004.1
ISBN 7-80063-120-6

Ⅰ.好… Ⅱ.李… Ⅲ.几何课-初中-课外读物
Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 066794 号

书　名:好玩的几何

著　者:李毓佩
出版者:长虹出版公司
[北京地安门西大街 40 号/邮政编码 100035]
印刷者:北京长宁印刷有限公司
发行者:解放军出版社发行部
经销者:新华书店

开　本:787×1092 毫米　1/32
印　张:6.375
印　数:1—5000 册
字　数:140 千字
版　次:2004 年 1 月第 1 版
印　次:2004 年 1 月(北京)第 1 次印刷

书号:ISBN 7-80063-120-6/G·39
(如有印装差错,请与本社调换)
定价:14.00 元

目　　录

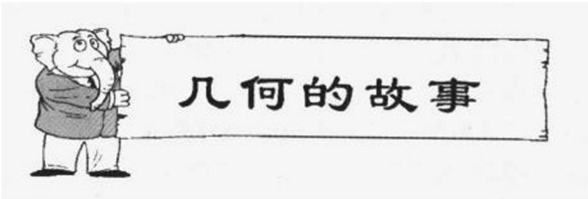
几何的故事

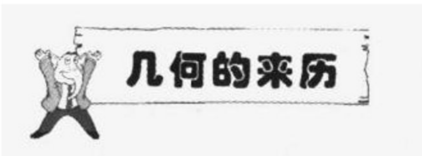
几何中的宝藏

圆面积之谜

几何列车

几何俱乐部





人最早是从自然界得到各种几何形式的.月亮有时是圆形的,有时是镰刀形的;光线是直的,有的树木长得也很直.接着是人类造出了圆形和方形的各种器皿……实践活动成了建立几何抽象概念的基础.

公元前4世纪,古希腊学者欧第姆斯曾写道:“几何是埃及人发现的,从测量土地中产生的.因为尼罗河水泛滥,经常冲去界线,所以这种测量对埃及人是必需的,这门科学和其他科学一样,是从人类的需要产生的,对于这一点是没有什么可惊异的.”

三千多年以前尼罗河经常泛滥.洪水冲走了庄稼、牲畜,给人们造成了损失;洪水也带来了丰富的有机肥,形成了沃土.洪水

退后，各部族要重新测量、标记自己的土地，这就需要计算各种地形的面积．现存的三千七百年前的“兰特纸草”中，就记载着许多计算土地面积的问题．几何学希腊文的原意是“测地术”，说明了几何学来源于土地面积的测量．

在我国的《九章算术》一书中，也讲述土地的测量．第一章“方田”，就是专门讲田亩面积的计算．“方”就是单位面积（如同现在的一亩、一平方米等等），“方田”就是计算一块田含有多少单位面积的方法．

古代测量土地的技术水平已达到了相当的高度．比如举世闻名的埃及大金字塔，它们大多数是四千年以前修建的．其中最著名的胡夫金字塔，高 146.5 米，底座是一个正方形，面积为 52900 平方米．胡夫金字塔虽然经历了四千多个春秋，塔顶都剥落了 10 米，可是经过现代技术的测量，其正方形底座的长度和角度计算都十分精确，平均误差仅为 1.52 厘米，可见古代测量技术之高．

几何学发展到今天，已经不单单是测地学了．几何学是专门研究空间形式、各种图形的性质及相互关系的一门科学．科学和技术的发展都离不开几何学．

杀百牛祭天神

1955 年希腊发行了一张邮票，图案由三个棋盘排列而成（图 1）．这张邮票是为了纪念两千多年前古希腊数学家毕达哥拉斯发现勾股定理而发行的．邮票中下面的正方形分成了

25 个小正方形，上面两个正方形，一个分成 16 个小正方形，另一个分成 9 个小正方形．每个小正方形面积都相等．$9+16=25$，说明上面两个正方形的面积和等于下面大正方形的面积．从另一个角度看，这三个正方形的边围成了一个直角三角形，该直角三角形三边长分别是 3，4，5．由 $3^2=9$，$4^2=16$，$5^2=25$ 可知，这个直角三角形两直角边平方和等于斜边平方，这就是著名的勾股定理．

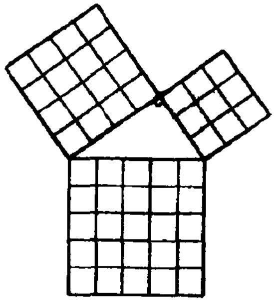


图 1

传说，有一次毕达哥拉斯去朋友家做客，客人们高谈阔论，又吃又喝，惟独毕达哥拉斯独自一个人望着方砖地(图 2)发愣．他用棍在地上勾出一个图形，中间有一个直角三角形 ABC．在直角三角形 ABC 的每条边上，都有一个正方形(图 3)．BC^2 等于正方形 $BCDE$ 的面积，正方形 $BCDE$ 是由两黑两白四个三角形组成的．AB^2 等于正方形 $ABFG$ 的面积，它由两个黑色三角形组成．同样 AC^2 等于正方形 $ACHM$ 的面积，它也由两个黑色三角形组成．由于白三角形和黑三角形面积相等，因此有

$$BCDE\text{ 的面积}=ABFG\text{ 的面积}+ACHM\text{ 的面积}.$$

也就是 $AB^2+AC^2=BC^2$.

方砖地的启示使毕达哥拉斯得到了勾股定理．毕达哥拉斯认为这个定理太重要了，他所以能发现这个重要定理，一定是“神”给予了启示，于是他下令杀一百头牛祭祀天神，并为其

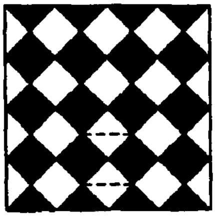


图 2

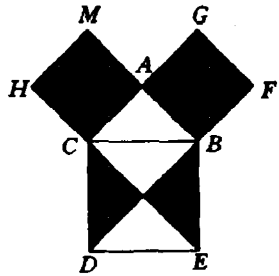


图 3

起名为“百牛定理”，也叫做“毕达哥拉斯定理”.

其实，这个定理不独是毕达哥拉斯发现的，下面介绍两千多年前我国周代人测日高的方法，你会发现是我国最早使用了勾股定理.

由于受科学水平的限制，周代人还不知道地球是圆的，认为地面就是一个大平面.他们于农历夏至时在地面上立一根 8 尺长的标杆，测量出标杆的影子长度为 6 尺.又假设把标杆每向南移动一千里，日影就要缩短一寸.由于标杆的影长为 6 尺，如果我们把标杆连续向南移动 60 个一千里（1 里 = 500 米）的话，标杆的影长就缩短为零了，这时标杆就跑到了太阳的正下方（图 4）.

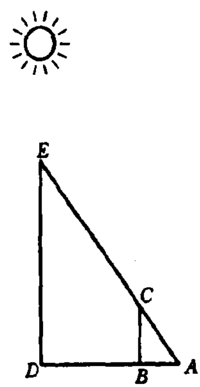


图 4

由$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，得：

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}.$$

$$DE = \frac{BC \times AD}{AB} = \frac{8 \times 6}{6} = 8(\text{万里}).$$

这样就求出了太阳的高度为 8 万里.

以上求法最早见于我国的《周髀算经》,该书记载了两千多年前我国在数学和天文学方面的许多重要成就,内容十分丰富.书中除了求出了太阳距地面的垂直高度为 8 万里,还进一步求出了太阳到 A 点的距离 AE:

$$AE = \sqrt{ED^2 + AD^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(\text{万里}).$$

就是说太阳到测量地点的距离为 10 万里.

《周髀算经》中把太阳高度 DE 叫做“股”,把 AD 叫做“勾”,斜边 AE 叫做“弦”,得到关系式:勾^2 + 股^2 = 弦^2,也就是

$$AE^2 = ED^2 + DA^2,$$

这就是著名的“勾股定理”.勾股定理给出了直角三角形三条边的确定关系.勾股定理的发现是我们的祖先对数学的一大贡献.

日高 8 万里对不对呢?不对.现代测得太阳光大约需要 8 分钟才能到达地球.光每秒钟走 30 万千米,8 分钟是 480 秒,由此推算,太阳到地球的距离大约等于

$$30 \times 480 = 14400(\text{万千米}),$$

即 1.44 亿千米.[①]8 万里合 4 万千米,与 1.44 亿千米相差太大了.周代人错在哪里呢? 一、"假设标杆向南移动一千里,日影缩短一寸"是错误的;二、大地是个球面,但被看成了平面,这也是错误的.但是他们所使用的数学原理却是完全正确的.

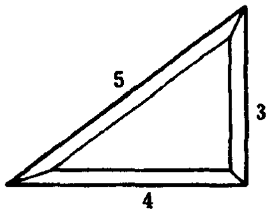


图 5

"勾股定理"用语言叙述是:"在一个直角三角形中,两直角边的平方和等于斜边的平方."或说成"勾方加股方等于弦方".勾股定理的逆定理也是对的,即"在一个三角形中,如果有两条边的平方和等于第三边的平方,那么第三边所对的角必定是直角."这个逆定理也早就被古埃及人发现了,他们利用这个定理来做直角.方法是取三边分别为 3、4、5(长度单位不限)构成一个三角形(图 5),长边所对的角就是直角.

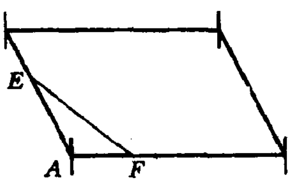


图 6

古埃及人定直角的方法至今还在许多地方使用着.比如盖房子时先要定好地基,地基多是长方形的.怎样检查地基所划出的长方形每个角都是直角呢?在长方形的各个顶点插上木棍,圈上绳子(图 6).另取一段绳子 EF,组成一个三角形 AEF,测量 AE、AF、EF 的长度,计算它

① 注:地球绕太阳的轨道是个椭圆,所以日地距离时刻在变化着.最新测得并规定日地距离为 149597870 千米.

们是否符合

$$EF^2 = AE^2 + AF^2,$$

如果符合,则$\angle A$是直角;如果不符合,则$\angle A$不是直角,还需要调整.

是不是只有3、4、5才能满足勾股定理呢?显然不是,比如5、12、13也满足勾股定理,算一算:$5^2=25$,$12^2=144$,$13^2=169$.

$\because \quad 25+144=169,$

$\therefore \quad 5^2+12^2=13^2.$

人们把满足$a^2+b^2=c^2$的一组数a、b、c叫做“勾股数”.

和外星人建立联系的方法

勾股定理$a^2+b^2=c^2$的证明也很有趣.从古到今有不少人热心寻求勾股定理的证明方法,其中有数学家、物理学家、画家,还有总统.现在,世界上已经找到四百多种证明勾股定理的方法,各有巧妙之处.

先介绍我国古书上的一种证法,很简单.

两个并排在一起的正方形面积之和为a^2+b^2,以AA'为边做一个斜放着的大正方形面积为c^2.我们来证明两个小正方形面积之和等于大正方形的面积.可以把两个小正方形中带○、△、+的三个小三角形剪下来,贴到大正方形中相应的○、△、+上去,你会发现恰好把大正方形填满(图7),这就证明了

$$a^2+b^2=c^2.$$

一千六百多年前,我国数学家赵君卿写的《勾股圆方图》,

是数学史上极有价值的文献，它作为《周髀算经》的注文而保存在该书的注中．全文只有530个字，它是我国第一次给出的勾股定理的理论证明．

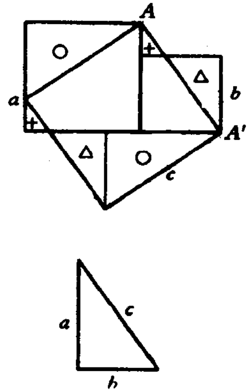


图7

赵君卿证明勾股定理使用的是“弦图”，也叫“赵君卿图”．原文是：

“弦图又可以勾股相乘为朱实二，倍之，为朱实四，以勾、股之差自相乘为中黄实，加差实亦成弦实．”

“朱”就是红色，“实”就是面积．这段话的意思是“弦图的构成(图8)，是把直角三角形的两条直角边相乘正好是两个直角三角形的面积，涂上红色，再两倍，就变成四个相等的三角形，都涂上红色，像弦图那样排列起来．中间是以勾股之差为边的正方形的面积，涂上黄色．这样正好构成一个以直角三角形的斜边(弦)为边的正方形面积．”

2002年8月第24届国际数学家大会(*ICM*)在北京召开，“弦图”被选为这次大会的会徽．

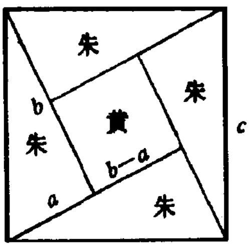


图8

用 a、b、c 表示勾、股、弦，则

$$2ab + (b - a)^2 = c^2,$$

展开整理，得 $a^2 + b^2 = c^2$.

赵君卿的证法简单明了，直到现在仍有人采用．

一百多年前，美国第二十任总统伽菲尔德也提出了一个证明方法．图9是

一个直角梯形，设其面积为 S，则：

$$S=\frac{上底+下底}{2}\times 高$$
$$=\frac{a+b}{2}(a+b)$$
$$=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2).$$

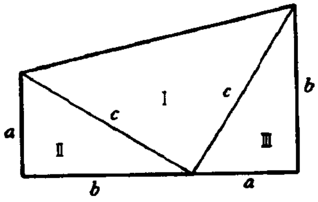


图 9

而这个直角梯形的面积 S 等于三个直角三角形的面积之和，

即 $$S=\triangle\mathrm{I}+\triangle\mathrm{II}+\triangle\mathrm{III}$$
$$=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab$$
$$=\frac{1}{2}c^2+ab.$$

由此得到等式

$$\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)=\frac{1}{2}c^2+ab,$$
$$a^2+2ab+b^2=c^2+2ab,$$
$$a^2+b^2=c^2.$$

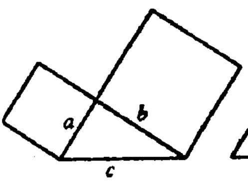


图 10

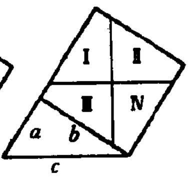


图 11

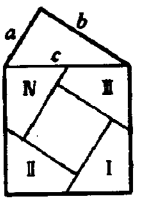


图 12

在对勾股定理的四百多种证法里，以切拼图形的方法为最多.下面再举一例：

第一步，在直角三角形夹直角的两边 a 和 b(设 $b > a$)上，各画一个正方形(图 10)；

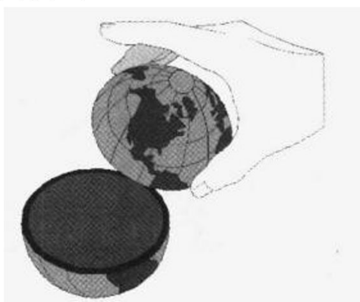
第二步，把以 b 为边长的正方形剪下来，并且通过它的中心点，作水平线和垂直线，把它切成 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 四块(图 11)；

第三步，把以 a 为边长的正方形剪下来，把 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 围在它的周围，恰好拼成一个边长为 c 的正方形(图 12)，这就证明了

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

下面讲一段有趣的事实：

几十年以前，有些科学家从天文望远镜中看到火星上有些地区的颜色有季节性的变化，又看到火星上有运河模样的线条，于是就猜想火星上有高度智慧的生物存在.当时还没有宇宙飞船，怎样和这些智慧生物取得联系呢？



有人就想到，中国、希腊、埃及处在地球的不同地区，但是他们都很早地、独立地发现了勾股定理.由此推想，如果火星上有具有智慧的生物的话，他们也最早知道勾股定理.有的科学家建议：在西伯利亚种上宽排的树林，形成一个直角三角形，或者在撒哈拉大沙漠挖一个直角三角形的大运河，然后在里面倒上石油，晚上点起火来，火星人可能会从望远镜里看到这个直角三角